

Série entière:

$$\sum_{n \geq 0} a_n z^n \rightarrow R: \text{rayon de CV}$$

$$\sum_{n \geq 0} n x^n, \sum_{n \geq 0} x^{2n}$$

$$\sum_{n \geq 0} x^{np} = \sum_{n \geq 0} a_n x^n \text{ avec } a_{np} = 1, a_p = 0 \text{ si } p \nmid n$$

$$\sum_{n \geq 0} x^{n^2} = \text{not a series}$$

Rayon de CV:

$$R = \sup \{ r > 0 \mid (a_n r^n) \text{ bornée} \}$$

$$R \in \mathbb{R}_+ \cup \{ \infty \}$$

Lemme d'Abel:

Si la suite (a_n) est bornée.

Alors, $\forall z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \Rightarrow \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est abs CV

$$\sum_{n \geq 0} a_n z^n \rightarrow R > 0$$

si $|z| < R$.

si $|z| > R$.

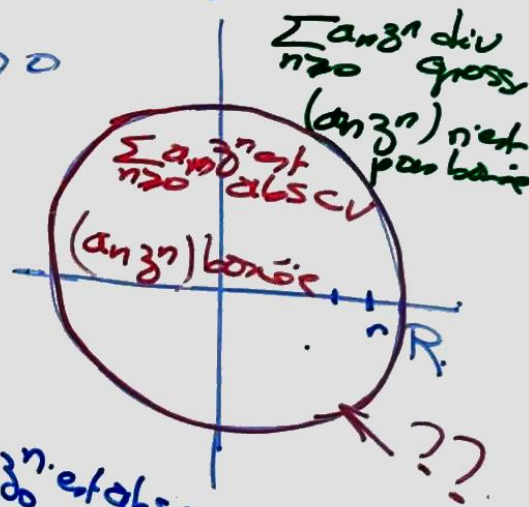
si $|z| = R$.

Rigue..

$$1) \exists z_0 \in \mathbb{C} \mid \sum_{n \geq 0} a_n z_0^n \text{ est abs CV} \Rightarrow |z_0| \leq R$$

$$2) \exists z_0 \in \mathbb{C} \mid \sum_{n \geq 0} a_n z_0^n \text{ bornée}$$

$$3) \exists z_0 \in \mathbb{C} \mid \sum_{n \geq 0} a_n z_0^n \text{ diverge} \Rightarrow |z_0| \geq R$$



$$c) \exists z_0 \in \mathbb{C} \text{ tq. } \sum_{n \geq 1} a_n z_0^n \text{ div et } a_n z_0^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow |z_0| = R^c.$$

* $\sum_{n \geq 0} a_n z^n \leadsto R_a = ??$

$|a_n| \leq 1 \Rightarrow R_a = 1$

$\sum_{n \geq 0} b_n z^n = \sum_{n \geq 0} z^n \leadsto R_b = 1$

$\Rightarrow R_a \geq 1$

Pour $z_0 = 1 \Rightarrow \sum_{n \geq 0} a_n$ div.

$\Rightarrow R_a \leq 1$

$\Rightarrow R_a = 1$

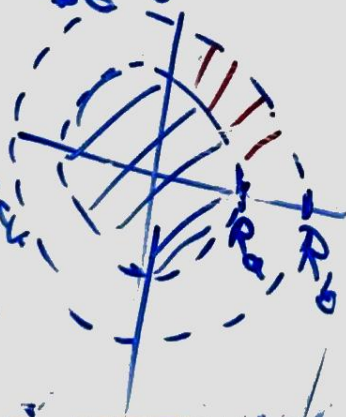
$\rightarrow \sum_{n \geq 0} a_n z^n \leadsto R_a, \sum_{n \geq 0} b_n z^n$

Satz 1.1; $|z| < R_a$

$\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont abs.

$\Rightarrow \sum (a_n + b_n) z^n$ est abs.

$\Rightarrow R_{a+b} \geq R_a$



soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_0| < R_b$
 $\Rightarrow \sum_{n \geq 0} a_n z_0^n$ div. et $\sum_{n \geq 0} b_n z_0^n$ cv.
 $\Rightarrow \sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) z_0^n$ div. $\Rightarrow R_{a+b} < R_a$

$\rightarrow \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$

$\frac{1}{(1-x)^2}$ avec $C_n = \sum_{k=0}^n 1 = n+1$

$\Rightarrow \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$ avec $|x| < 1$

App la déf
 $R = \sup\{r \geq 0 \mid (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$

Appliquer la règle de
 D'Alembert à
 $U_n(z) = a_n z^n$

Si $a_n = F(n)$: fraction
 rationnelle en n .
 Alors $R = 1$

$\sum_{n \geq 0} d_n z^n \rightarrow R = \frac{1}{|d|} (d \neq 0)$

Si $|a_n| \leq |b_n| \Rightarrow R_a \geq R_b$
 $|a_n| = O(|b_n|)$
 $|a_n| = o(|b_n|) \Rightarrow R_a = R_b$
 Si $|a_n| \sim |b_n| \Rightarrow R_a = R_b$

$\sum_{n \geq 0} a_n z^n \rightarrow R_a \Rightarrow R_{a+b} \geq \min(R_a, R_b)$
 $\sum_{n \geq 0} b_n z^n \rightarrow R_b$ et $\forall \epsilon > 0 \exists N \mid |z| < \min(R_a, R_b)$
 $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$

Détermination du
 rayon de CV

* Si $R_a \neq R_b \Rightarrow R_{a+b} = \min(R_a, R_b)$
 $\sum_{n \geq 0} c_n z^n$ produit des deux séries
 $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ avec $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$
 $\Rightarrow R_c \geq \min(R_a, R_b)$
 et $|z| < \min(R_a, R_b) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right)$

$\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$ a.m. rayon de CV $\geq \sum_{n \geq 0} a_n z^n$
 $\sum_{n \geq 1} n^k a_n z^n$ " " "
 $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n z^{n+1}}{n!}$ " " "
 $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n z^n}{n!}$ " " "

$\exists \beta < R_b \mid R_a = R_b$
 $R_a \leq R_b \mid R_a = R_b$
 $R_a = R_b$

Exercice 1 "Série 1"

c) $\sum_{n \geq 2} \frac{\cos n \cdot \pi}{n(n-1)} z^n$ атлауа.

$$\sum_{n \geq e} \cos n \theta^{n-e} \dots$$

$$\sum_{n \geq 0} \cos n z^n.$$

$$|con| \leq L \rightarrow R \geq 1$$

$$Z_0 = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \text{Conduct.} \Rightarrow R_{\text{eq}} \Rightarrow R = 1$$

9) Soit $U_n(z) = \frac{n!}{2^{2n} \cdot \sqrt{\pi n}!} z^n$.

$$V_3 \neq 0, \quad \left| \frac{U_{n+1}(z)}{U_n(z)} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{|z|}{\delta}.$$

D'Alembert $\Rightarrow$ si $|\frac{1}{2}| < 1 \Rightarrow (3/4)^n \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (3/4)^n$ abs.
 si $|\frac{1}{2}| > 1 \Rightarrow (3/4)^n \rightarrow \sum$ div.
 $\Rightarrow R = 1/2$

$$\Rightarrow \underline{R=8}$$

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\sin z$

$$k_{int} = \frac{c_{in}}{c_{out}} \approx \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \sum_{n \geq 0} C_n n z^n$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \Rightarrow R = \frac{1}{2}$

Exercice 1 "Series"

$$5) \sum_{n \geq 0} \left(\int_n^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} \right) z^n$$

ona. $\frac{1}{1+x^2} \sim \frac{1}{x^2}$

et $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ intég au $\mathcal{C}(\infty)$

$$\Rightarrow \int_n^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \sim \int_n^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{n}$$

or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} z^n \leadsto R=1$ (Dirichlet)

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 0} \left(\int_n^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} \right) z^n \leadsto R=1$$

$$6) \sum_{n \geq 0} \frac{a^n}{1+b^n} z^n \quad a > 0, b > 0$$

soit $\alpha_n = \frac{a^n}{1+b^n}$

* si $b=1 \Rightarrow \alpha_n = \frac{1}{2} a^n \Rightarrow \sum_{n \geq 0} \alpha_n z^n$

est de rayon $\frac{1}{|a|}$

* si $b > 1 \Rightarrow b^n \rightarrow \infty \Rightarrow 1+b^n \sim b^n$
 $\Rightarrow \alpha_n \sim \left(\frac{a}{b}\right)^n$

or $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{a}{b}\right)^n z^n \leadsto R = \sqrt{\frac{b}{a}} \Rightarrow R_a = \sqrt{\frac{b}{a}}$

* si $b < 1 \Rightarrow b^n \rightarrow 0 \Rightarrow 1+b^n \sim 1$
 $\Rightarrow \alpha_n \sim a^n \Rightarrow R_a = \sqrt{\frac{1}{a}}$

$$\rightarrow S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^{n+1/2}; x \in [0,1] \\ = \sqrt{x} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$$

$\sum 2^n x^n$ serie entiere de rayon 1
 $n \geq 0$
 $\Rightarrow x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$ est continue sur $] -1, 1[$
 $\Downarrow$
 et $x \mapsto \sqrt{x}$ continue sur $[0,1]$
 $\Rightarrow S$ continue sur $[0,1]$

$$\rightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}, x \in]-1, 1[\\ \text{Alors } f \text{ continue sur }]-1, 1[\\ \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightarrow R > 0$$

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 a_n x^n dx$$

Si $a \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$
 $\{a\} \subset \mathbb{R}, \mathbb{C}$

$\Downarrow$
Oui

$$\rightarrow \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \Big|_{x=0} = a_0$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} \right) \Big|_{x=0} = 0$$

Si $a = \mathbb{R}$

Appliquer les th.
 de permutacion des
 serie de fonctions

Régularité des fonctions nom.

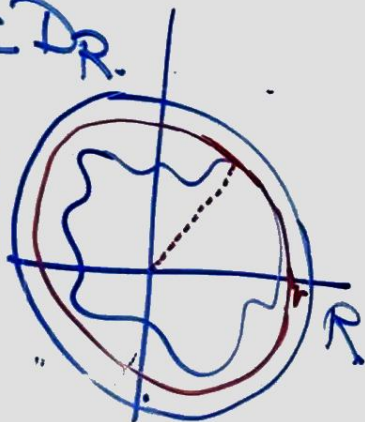
$$\sum_{n \geq 0} a_n z^n \rightsquigarrow R > 0$$

on pose $D_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$
= disque ouvert de CV.

Lemme.

$$\sum_{n \geq 0} a_n z^n \subset \mathbb{N} \Rightarrow \text{CV sur}$$

tout compact $C \subset D_R$.



$$r = \sup \{|z| \mid z \in C\} \\ = |z_0| \quad (z_0 \in C)$$

$$\frac{r}{2} < R \\ \forall z \in C, |z| \leq r$$

$$\Rightarrow \sup_{z \in C} |a_n z^n| \leq |a_n| r^n$$

$$\sum_{n \geq 0} |a_n| r^n < \infty$$

Th de Continuité

L'app $S: D_R \rightarrow \mathbb{C}$
 $z \mapsto S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est continue

Th de dérivabilité

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n \rightsquigarrow R > 0$$

Alors l'app $S:]-R, R[\rightarrow \mathbb{C}$

est dérivable. $x \mapsto S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$
et $\forall k \in \mathbb{N}, S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}$

$$\Rightarrow S^{(k)}(0) = k! a_k$$

$$a_k = \frac{S^{(k)}(0)}{k!}$$

Test DSE(0).

$$f:]-\alpha, \alpha[\rightarrow \mathbb{C}$$

$$\text{Test DSE}(0) \Leftrightarrow \exists \sum_{n \geq 0} a_n x^n \rightarrow R > 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \forall x \in]-R, R[\cap \mathbb{R}$$

→ Si Test DSE(0) alors Test ∞
 et $\forall k \in \mathbb{N}; a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

"Le développement en série de Taylor de f"

→ Si f admet un DSE(0), alors f admet un $\Delta_n(0)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

~~$\infty \Rightarrow$~~ DSE(0)

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Test ∞ sur $\mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 0$

Si f admet un DSE(0) $\Rightarrow \exists p > 0$ $\forall x \in]-p, p[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0$

→ Test ∞ sur $]-\alpha, \alpha[$.

f admet un DSE(0) $\Leftrightarrow \exists R > 0$.

App. Test ∞ $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]-R, R[\cap \mathbb{R}$
 $\exists \eta > 0$ $\forall x \in]-\eta, \eta[$, $|f^{(n)}(x)| \leq \eta$
 $\Rightarrow$ Test DSE(0)

Can one find $\infty \Rightarrow$

D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange.

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \Pi \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \forall x \in]-R, R[.$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$R = +\infty$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$R = +\infty$$

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$R = +\infty$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$R = 1$$

$$\ln(1-x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$