

Famille Sommable

1 Ensembles dénombrables

Définition 1.1 * Un ensemble E est dit **dénombrable** s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.
Ce la signifie $\exists \varphi : \mathbb{N} \rightarrow E$ est une application bijective, on dit que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_n = \varphi(n)$ est une énumération des éléments de E et on peut écrire $E = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$.

* Un ensemble est fini ou dénombrable (au plus dénombrable) s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.

Exemple 1.1 2) L'ensemble $2\mathbb{N}$ est dénombrable.
L'app $f : \mathbb{N} \rightarrow 2\mathbb{N}$ est bijective.
 $n \mapsto 2n$

Exemple 1.2 2) L'ensemble $\mathbb{Z}$ est dénombrable.

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$$
$$n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{Si } n \text{ est paire} \\ -\frac{(n+1)}{2} & \text{Si } n \text{ est impaire} \end{cases}$$

En effet

soit $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$

$$n \mapsto \begin{cases} 2n & \text{si } n \geq 0 \\ -(2n+1) & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

On a $g \circ f(n) = ?$

si n paire $\Rightarrow f(n) = \frac{n}{2} \Rightarrow g \circ f(n) = n$

si n impaire $\Rightarrow f(n) = -\frac{(n+1)}{2} < 0 \Rightarrow g \circ f(n) = n$

$$\Rightarrow g \circ f = \text{id}_{\mathbb{N}}$$

et $f \circ g(n) = f(2n) \quad \text{si } n \geq 0$

$$f \circ g(n) = \frac{2n}{2} = n$$

$f \circ g(n) = f(-\frac{1}{2}(2n+1)) = n \quad \text{si } n < 0$

$$\Rightarrow f \text{ est bijective}$$

Théorème 1.1 Si F est une partie infinie de $\mathbb{N}$, alors F est dénombrable.

Preuve F est infinie $\Rightarrow F \neq \emptyset$; on pose
 On pose $u_0 = \min F$, et on construit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par récurrence.
 $u_{n+1} = \min F \setminus \{u_0, u_1, \dots, u_n\}$. Alors la suite (u_n) est st $\nearrow$
 On pose $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow F$
 $n \mapsto u_n$
 La suite (u_n) est st $\nearrow \Rightarrow \varphi$ est injective.
 Soit $x \in F \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } x \leq u_{n_0} \Rightarrow x \in F \cap [a - u_{n_0}]$
 $\Rightarrow \exists p \text{ tq } u_p = x \Rightarrow \varphi$ surjective $\rightarrow \varphi$ bij.

Propriétés 1.1

- 1) $\begin{cases} \text{Si } A \subset E \\ \text{et } E \text{ est dénombrable} \end{cases}$ alors A est finie ou bien dénombrable.
- 2) La réunion d'un nombre fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.
- 3) La réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.
- 4) Le produit cartésien de deux ensembles dénombrables est dénombrable.

Si $E = \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ et $F = \{b_n, n \in \mathbb{N}\}$, alors $E \times F = \{(a_n, b_p) \mid n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}\}$.

- 5) Si $E_1, E_2, \dots, E_p$ sont des ensembles dénombrables, alors le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$ est dénombrable.

Exemples :

L'ensemble des entiers pairs et l'ensemble des entiers impairs sont dénombrables.

$\mathbb{N}^2, \mathbb{Z}^2$ sont dénombrables.

Théorème 1.2 Si E est un ensemble dénombrable et si F est un ensemble en bijection avec E , alors F est dénombrable.

Exemples :

$\mathbb{Q}$ est un ensemble dénombrable.

En effet :

Soit $\varphi: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$
 $\frac{p}{q} \mapsto \varphi\left(\frac{p}{q}\right) = (p, q)$
 avec $\frac{p}{q}$ est l'écriture irréductible de $\frac{p}{q}$ et $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ dénombrable $\Rightarrow \mathbb{Q}$ dénombrable.
 φ bij
Rq $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

2 Famille sommable

2.1 Famille à termes réels positifs

Dans cette partie I désigne un ensemble au plus dénombrable (I fini ou dénombrable) $(I = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}^2, \dots)$

Définition 2.1 On dit qu'une famille $(u_i)_{i \in I}$ de réels positifs est sommable s'il existe un réel M tel que pour toute partie F finie $\subset I$, $\sum_{i \in F} u_i \leq M$

Si tel est le cas, on pose $\sum_{i \in I} u_i = \sup_{F \text{ finie } \subset I} \sum_{i \in F} u_i$

Si non, on pose $\sum_{i \in I} u_i = +\infty$.

Exemple 1 $I = \mathbb{N}$

une famille de réels positifs $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est sommable si, et seulement si, la série $\sum_{i \geq 0} u_i$ converge.

Dans ce cas, on a :

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} u_i = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i$$

En effet

Si $\sum_{i \geq 0} u_i$ converge, alors $\exists M \geq 0$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$: $\sum_{i=0}^n u_i \leq M$.
 Soit F finie $\hookrightarrow F \subset \mathbb{N} \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $F \subset \{0, 1, \dots, n_0\}$
 $\Rightarrow \sum_{i \in F} u_i \leq \sum_{i=0}^{n_0} u_i \leq M \Rightarrow \sum_{i \in \mathbb{N}} u_i$ est sommable
 et $\sum_{i \in F} u_i \leq \sum_{i=0}^{+\infty} u_i$. D'autre part si $\sum_{i \in \mathbb{N}} u_i$ est sommable
 alors $\exists M \geq 0$ tq $\sum_{i \in F} u_i \leq M$
 $\Rightarrow \sum_{i=0}^n u_i \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} u_i \leq M$
 $\Rightarrow \sum_{i=0}^{+\infty} u_i$ converge.

Exemple 2

Soit $q \in [0, 1[$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ avec $u_n = q^{|n|}$, $q \in \mathbb{Z}$.

La famille $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable et $\sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n = \frac{1+q}{1-q}$

Réponse

Soit $F \subset \mathbb{Z}$ un ensemble fini, alors
 $\exists p \in \mathbb{N}$ tq $F \subset \{-p, -p+1, \dots, 0, \dots, p\}$
 $\Rightarrow \sum_{n \in F} u_n \leq \sum_{k=-p}^p q^{|k|} = \sum_{k=-p}^{-1} q^{-k} + q^0 + \sum_{k=1}^p q^k$

$$= 1 + q \sum_{k=1}^p q^{k-1} = 1 + q \frac{1 - q^p}{1 - q} \leq 1 + \frac{2q}{1 - q} = \frac{1 + q}{1 - q}$$

$\Rightarrow \sum_{n \in F} u_n$ est majorée par $\frac{1+q}{1-q}$

$$\Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n \leq \frac{1+q}{1-q} \quad \text{De plus } \sum_{n=-p}^p u_n \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \frac{1+q}{1-q} \Rightarrow \sup = \frac{1+q}{1-q}$$

Proposition 2.1 Soit $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille de réels positifs. **i)** Si $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est sommable, alors $\sum_{i \in \mathbb{N}} u_i \geq 0$.

ii) Soit $J \subset I$.

Si la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable alors la sous-famille $(u_i)_{i \in J}$ l'est aussi et on a :

$$\sum_{i \in J} u_i \leq \sum_{i \in I} u_i$$

Théorème 2.1 "de comparaison"

Soit $(u_i)_{i \in I}$ et $(v_i)_{i \in I}$ deux familles de réels positifs telles que

$$0 \leq u_i \leq v_i \text{ pour tout } i \in I,$$

alors

Si la famille $(v_i)_{i \in I}$ est sommable alors la famille $(u_i)_{i \in I}$ l'est aussi et dans ce cas on a :

$$\sum_{i \in I} u_i \leq \sum_{i \in I} v_i$$

En effet

2.2 Regroupement de la Sommation

Proposition 2.2 Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs. On suppose $I = I_1 \cup I_2$ avec I_1 et I_2 sont disjoints. Alors $(u_i)_{i \in I}$ est sommable si et seulement si $(u_i)_{i \in I_1}$ et $(u_i)_{i \in I_2}$ sont sommables.

De plus on a : $\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I_1} u_i + \sum_{i \in I_2} u_i$

Une famille $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de réels positifs est sommable si, et seulement si, les familles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ le sont. De plus, on a : $\sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$

Prevenons l'écrit

et $\sum_{n \geq 0} u_n$ sont $\subset \mathbb{V}$.

$$u_n = 9^{|n|}$$

Théorème 2.2 "Somme par paquets"

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs et $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une partition de I

(c. a. d. $\forall n \neq m, I_n \cap I_m = \emptyset$ et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n = I$). Alors on a l'équivalences suivantes :

(i) la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, la famille $(u_i)_{i \in I_n}$ est sommable et la série $\sum_{n \geq 0} \sum_{i \in I_n} u_i$ converge.

De plus, si tel est le cas

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i \in I_n} u_i$$

Exercice 3 /

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \in]0, 1[$

1) Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^{2^n}}{1 - x^{2^{n+1}}}$ est convergente et que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2^n}}{1 - x^{2^{n+1}}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} x^{2^n(2k+1)}$.

2) a) Justifier que la famille $(x^p)_{p \geq 1}$ est sommable.

b) En admettant que la famille $A_n = \{2^n(2k+1), k \in \mathbb{N}\}, n \in \mathbb{N}$ est une partition de

$\mathbb{N}^*$, montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2^n}}{1 - x^{2^{n+1}}} = \frac{x}{1-x}$.

Réponse /

1) On a $|x| < 1 \Rightarrow \frac{x^{2^n}}{1 - x^{2^{n+1}}} \sim \frac{x^{2^n}}{1} \Rightarrow \left| \frac{x^{2^n}}{1 - x^{2^{n+1}}} \right| \sim |x^{2^n}|$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2^n}}{1 - x^{2^{n+1}}} \sim \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2^n} < +\infty$

• $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2^n}}{1 - x^{2^{n+1}}} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2^n} \sum_{k=0}^{+\infty} (x^{2^{n+1}})^k = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} x^{2^n(2k+1)}$

2) a) La famille $(x^p)_{p \geq 1}$ est sommable, puisque la série $\sum_{p \geq 1} x^p$ est CV.

b) $\sum_{p=1}^{+\infty} x^p = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i \in A_n} x^i = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} x^{2^n(2k+1)} = \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2^n}}{1 - x^{2^{n+1}}} \right] = \frac{x}{1-x}$

Corollaire 2.1 Soit $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow I$ une bijection.

la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable, si et seulement si la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_{\varphi(n)}$ converge.

En effet

La famille $(I_n = \varphi(n)), n \in \mathbb{N}$ forme une partition de $\mathbb{N}$.

$(u_i)_{i \in I}$ sommable $\Leftrightarrow$ la série $\sum_{n \geq 0} \sum_{i \in I_n} u_i$ CV

$\sum_{n \geq 0} u_{\varphi(n)}$ CV.

Exemple

Soit φ une bijection de $\mathbb{N}^*$ montrant que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n\varphi(n)}$ converge.

On a $\frac{1}{n\varphi(n)} \leq \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(\varphi(n))^2}$.
 Puisque la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ cv $\Leftrightarrow$ la famille $(\frac{1}{n^2})$ est sommable $\Rightarrow$ la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ cv.
 Ainsi la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n\varphi(n)}$ cv.

2.3 Famille à termes réels ou complexes

Dans toute cette partie I est un ensemble au plus dénombrable.

Définition 2.2 Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de nombres réels ou complexes.
 On dit que la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable si la famille à termes positifs $(|u_i|)_{i \in I}$ est sommable c.à.d. s'il existe un réel M tel que pour toute partie F finie $\subset I$, $\sum_{i \in F} |u_i| \leq M$

Exemple

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, la famille $(\frac{e^{in\theta}}{1+n^2})_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable.

car: $|\frac{e^{in\theta}}{1+n^2}| = \frac{1}{1+n^2}$, $n \in \mathbb{Z}$.
 Puisque les séries $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{1+n^2}$ et $\sum_{n \leq -1} \frac{1}{1+(-n)^2}$ cv, alors
 la famille $(\frac{1}{1+n^2})_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable $\Leftrightarrow$ la famille
 $(\frac{e^{in\theta}}{1+n^2})_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable.

Conséquence

Une famille de nombres réels ou complexes $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable si, et seulement si, la famille $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable si, et seulement si, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est absolument convergente.

Théorème 2.3 "de comparaison"

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de nombres réels ou complexes et $(v_i)_{i \in I}$ famille de réels positifs telles que

$$0 \leq |u_i| \leq v_i \text{ pour tout } i \in I,$$

alors

Si la famille $(v_i)_{i \in I}$ est sommable alors la famille $(u_i)_{i \in I}$ l'est

Définition-Proposition 2.1 "Somme d'une famille sommable"

1) Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de nombre réels. Pour tout $i \in I$, on pose

$$u_i^+ = \max(u_i, 0) \text{ et } u_i^- = \max(-u_i, 0)$$

La famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable si et seulement si les familles de réels positifs $(u_i^+)_{i \in I}$ et $(u_i^-)_{i \in I}$ sont sommables. Dans ce cas

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} u_i^+ - \sum_{i \in I} u_i^-.$$

2) Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de nombre complexes. Alors la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable si et seulement si les familles de réels $(\operatorname{Re}(u_i))_{i \in I}$ et $(\operatorname{Im}(u_i))_{i \in I}$ sont sommables. Dans ce cas, on a :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} \operatorname{Re}(u_i) + j \sum_{i \in I} \operatorname{Im}(u_i).$$

Conséquence

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de nombre complexes. Alors la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable si et seulement si la famille $(\overline{u_i})_{i \in I}$ est sommable. Dans ce cas, on a :

$$\sum_{i \in I} \overline{u_i} = \overline{\sum_{i \in I} u_i}.$$

2.4 Regroupement de la Sommation

Proposition 2.3 Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels ou complexes. On suppose $I = I_1 \cup I_2$ avec I_1 et I_2 sont disjoints. Si $(u_i)_{i \in I}$ est sommable, alors $(u_i)_{i \in I_1}$ et $(u_i)_{i \in I_2}$ sont sommables.

De plus on a : $\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I_1} u_i + \sum_{i \in I_2} u_i$

Exemple

2.5 Somme double

Théorème 2.5 Soit $(u_{n,p})_{(n,p) \in \mathbb{N}^2}$ une famille de réels positifs. Alors la famille $(u_{n,p})_{(n,p) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$ (fixe) la série

$\sum_{p \geq 0} u_{n,p}$ converge et la série $\sum_{n \geq 0} \sum_{p \geq 0} |u_{n,p}|$ converge.

Dans ce cas, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p} = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p}.$$

Exemple Justifier que $\left(\frac{1}{(n+p^2)(n+p^2+1)} \right)_{n \geq 0}$ est sommable.
 Soit $p \in \mathbb{N}^*$ fixe.
 $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+p^2)(n+p^2+1)}$ cv. et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+p^2)(n+p^2+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+p^2} - \frac{1}{n+p^2+1} = \frac{1}{p^2}$ et $\sum_{p \geq 1} \frac{1}{p^2} < +\infty$
 Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+p^2)(n+p^2+1)} = \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+p^2)(n+p^2+1)} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Théorème 2.6 Soit $(u_{n,p})_{(n,p) \in \mathbb{N}^2}$ une famille de réels ou de complexes. Si la famille $(u_{n,p})_{(n,p) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p} = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p}.$$

Remarque Pour vérifier que la famille de nombre réels ou de complexes $(u_{n,p})_{(n,p) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable, on applique le théorème précédent, c à d. on montre que : pour tout $n \in \mathbb{N}$ (fixe) la série $\sum_{p \geq 0} |u_{n,p}|$ converge et la série $\sum_{n \geq 0} \sum_{p \geq 0} |u_{n,p}|$ converge.

Exemple Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $|a| < 1$.
 a) Justifier que la famille $(u_{p,q})_{p,q \geq 1}$ est sommable.
 b) Prouver que $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{ap}{1-a^{2p}} = \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{a^{2q-1}}{1-a^{2q-1}}$

Réponse :
 1) Soit $q \geq 1$ fixe. La série $\sum_{p \geq 1} |a|^{p(2q-1)}$ cv. $|a|^{2q-1} < 1$
 et $\sum_{p=1}^{+\infty} |a|^{p(2q-1)} = \sum_{p=1}^{+\infty} (|a|^{2q-1})^p = \frac{|a|^{2q-1}}{1-|a|^{2q-1}}$
 $\sum_{q \geq 1} \frac{|a|^{2q-1}}{1-|a|^{2q-1}}$ cv. $\Rightarrow$ la famille $|a|^{p(2q-1)}$ sommable.
 2) Puisque la famille est sommable, on a :
 $\sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{q=1}^{+\infty} a^{p(2q-1)} = \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{+\infty} a^{p(2q-1)} = \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{a^{2q-1}}{1-a^{2q-1}}$
 (9) $\sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{q=1}^{+\infty} (a^p)^{2q-1} = \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{a^p}{1-a^{2p}} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{a^p}{1-a^{2p}}$