

Famille sommable

Ensembles dénombrables.

Définition

* Un ensemble E est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.

Ce la signifie si $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow E$ est une application bijective, on dit que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_n = \varphi(n)$ est une énumération des éléments de E et on peut écrire $E = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$.

* Un ensemble est fini ou dénombrable (au plus dénombrable) s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.

Propriétés

- 1) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } A \subset E \\ \text{et} \\ A \text{ est dénombrable} \end{array} \right\}$ alors A est fini ou bien dénombrable.
- 2) La réunion d'un nombre fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.
- 3) La réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.
- 4) Le produit cartésien de deux ensembles dénombrables est dénombrable.

5) Si $E_1, E_2, \dots, E_p$ sont des ensembles dénombrables, alors le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$ est dénombrable.

Théorème

- 1) Si F est une partie infinie de $\mathbb{N}$, alors F est dénombrable.
- 2) Si E est un ensemble dénombrable et si F est un ensemble en bijection avec E , alors F est dénombrable.

Dans la suite I désigne un ensemble au plus dénombrable (I fini ou dénombrable) ($I = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}^2, \dots$).

Famille Sommable à termes réels positifs

Définition

On dit qu'une famille $(u_i)_{i \in I}$ de réels positifs est sommable s'il existe un réel M tel que pour toute partie F finie $F \subset I$,

$$\sum_{i \in F} u_i \leq M$$

Si tel est le cas, on pose $\sum_{i \in I} u_i = \sup_{F \text{ finie } F \subset I} \sum_{i \in F} u_i$

Si non, on pose $\sum_{i \in I} u_i = +\infty$.

Théorème

Soit $(u_i)_{i \in I}$ et $(v_i)_{i \in I}$ deux familles de réels positifs telles que

$$0 \leq u_i \leq v_i \text{ pour tout } i \in I,$$

alors

Si la famille $(v_i)_{i \in I}$ est sommable alors la famille $(u_i)_{i \in I}$ l'est aussi et dans ce cas on a :

$$\sum_{i \in I} u_i \leq \sum_{i \in I} v_i$$

Proposition

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs. On suppose $I = I_1 \cup I_2$ avec I_1 et I_2 sont disjoints. Alors $(u_i)_{i \in I}$ est sommable si et seulement si $(u_i)_{i \in I_1}$ et $(u_i)_{i \in I_2}$ sont sommables.

De plus on a : $\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I_1} u_i + \sum_{i \in I_2} u_i$

Sommation par paquets

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs et $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une partition de I

(c. a. d. $\forall n \neq m, I_n \cap I_m = \emptyset$ et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n = I$). Alors on a

l'équivalences suivantes :

(i) la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, la famille $(u_i)_{i \in I_n}$ est sommable et la série $\sum_{n \geq 0} \sum_{i \in I_n} u_i$ converge.

De plus, si tel est le cas

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i \in I_n} u_i$$

Corollaire

Soit $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow I$ une bijection.

la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable, si et seulement si la série

$\sum_{n \in \mathbb{N}} u_{\varphi(n)}$ converge.

A Retenir

1) une famille de réels positifs $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable $\iff$ la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge. Dans ce cas, on a :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

2) Une famille $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de réels positifs est sommable si, et seulement si, les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et la série $\sum_{n \geq 1} u_{-n}$ sont convergentes. De plus, on a : $\sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n}$.

Famille Sommable à termes réels ou complexes

Définition

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de nombres réels ou complexes.

On dit que la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable si la famille a termes positifs $(|u_i|)_{i \in I}$ est sommable c. à d. s'il existe un réel M tel que pour toute partie F finie $\subset I$, $\sum_{i \in F} |u_i| \leq M$

Sommation par paquets

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels ou complexes.

1) On suppose $I = I_1 \cup I_2$ avec I_1 et I_2 sont disjoints.

Si $(u_i)_{i \in I}$ est sommable, alors $(u_i)_{i \in I_1}$ et $(u_i)_{i \in I_2}$ sont sommables.

De plus on a : $\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I_1} u_i + \sum_{i \in I_2} u_i$

2) Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une partition de I
(c. a. d. $\forall n \neq m, I_n \cap I_m = \emptyset$ et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n = I$). Alors on a :

Si la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, la famille $(u_i)_{i \in I_n}$ est sommable et la série $\sum_{n \geq 0} \sum_{i \in I_n} u_i$ est absolument convergente.

Dans ce cas on a :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i \in I_n} u_i$$

Corollaire

Soit $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow I$ une bijection. Si la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable, alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_{\varphi(n)}$ converge absolument.

A Retenir

1) Une famille de nombres réels ou complexes $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable si, et seulement si, la famille $((u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable $\iff$ la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est absolument convergente.

2) Une famille $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de nombres réels ou complexes est sommable $\iff$ les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 1} u_{-n}$ sont absolument

convergentes. Dans ce cas on a : $\sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n}$.

Linéarité

Soient $(u_i)_{i \in I}$ et $(v_i)_{i \in I}$ deux familles d'éléments de $IK = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Si $(u_i)_{i \in I}$ et $(v_i)_{i \in I}$ sont sommables alors $\forall \lambda \in IK$ $(\lambda u_i + v_i)_{i \in I}$ est sommable et on a :

$$\sum_{i \in I} \lambda u_i + v_i = \lambda \sum_{i \in I} u_i + \sum_{i \in I} v_i$$

Sommes Doubles

Théorème

Soit $(u_{n,p})_{(n,p) \in \mathbb{N}^2}$ une famille de réels positifs. Alors la famille $(u_{n,p})_{(n,p) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$ (fixe) la série $\sum_{p \geq 0} u_{n,p}$ converge et la série

$$\sum_{n \geq 0} \sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p} \text{ converge.}$$

Dans ce cas, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p} = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p}.$$

Théorème

Soit $(u_{n,p})_{(n,p) \in \mathbb{N}^2}$ une famille de réels ou de complexes.

Si la famille $(u_{n,p})_{(n,p) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p} = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p}.$$