

Série "Famille sommable "

Exercice 1

Vérifier que la famille $\left(\frac{1}{(n+p^2)(n+p^2+1)} \right)_{n \geq 0, p \geq 1}$ est sommable et calculer sa somme.

Exercice 2 "D'après MP 2017"

On pose $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

1. Vérifier que $\zeta(x)$ est défini sur $]1, +\infty[$.
2. Soit $x \in]1, 1[$, montrer de deux manières que la famille $\left(\frac{x^{2n}}{k^{2n}}, k, n \geq 1 \right)$ est sommable.
(On rappelle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \zeta(x) = 1$.)
3. En admettant que pour tout $x \in]1, 1[\setminus \{0\}$, on a :

$$\pi x \cotan(\pi x) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2x^2}{x^2 - k^2}$$

calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \zeta(2n)x^{2n}$, $\forall x \in]1, 1[$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\zeta(2n)}{2^n}$.

Exercice 3

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de réels positifs de carré sommable.

On pose $f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n-t}$.

1. Montrer que f est bien défini sur $] -1, 1[$.
2. Montrer que f est développable en série entière sur $] -1, 1[$.

Exercice 4

1. Montrer pour tout $x \in] -1, 1[$, que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$ converge et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

2. Pour $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, on pose $a_{ij} = \frac{i+j}{2^{i+j}}$. Montrer, de deux manières différentes, que la famille $(a_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ est sommable et calculer sa somme.

Exercice 5

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$.

1. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{z^{2n}}{1 - z^{2^{n+1}}}$ est convergente et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{1 - z^{2^{n+1}}} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^n(2k+1)}.$$

2. Montrer que la famille $(z^p)_{p \geq 1}$ est sommable.

3. En admettant que la famille $A_n = \{2^n(2k+1)\}, n \in \mathbb{N}$, est une partition de $\mathbb{N}^*$, montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}} = \frac{z}{1 - z}.$$

Exercice 6

Soit $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$, avec $g_n(x) = \frac{x}{n} - \log(1 + \frac{x}{n})$.

1. Montrer que F est définie sur $] -1, +\infty[$.
2. Montrer que $\forall x \in] -1, 1[, F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k n^k}$.
3. Soit $x \in] -1, 1[$, montrer que la famille $((-1)^k \frac{x^k}{k^n k})_{n \geq 1, k \geq 2}$ est sommable.
4. Montrer que F est développable en série entière sur $] -1, 1[$.

Exercice 7

Soit $S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{1 + t^n}$.

1. Montrer que S est définie si et seulement si $|t| < 1$.
2. Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $|t| < 1$.
Montrer que la famille $((-1)^k t^{nk})_{k, n \geq 1}$ est sommable.
3. Montrer que $\forall t \in] -1, 1[, S(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^k}{1 - t^k}$.
4. Montrer que la somme $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$.

5. a) Montrer que pour tous réels $x_1, \dots, x_n$ strictement positifs, on a

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}.$$

- b) Dédurre que $S(t) \sim \frac{\ln(2)}{1-t}$

Problème

Partie I.

Dans ce sujet une série L_a est une série de fonctions $\sum_{n \geq 1} a_n \frac{x^n}{1 - x^n}$ où $(a_n)_{n \geq 1}$ est une suite de réels telle que la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$ soit de rayon 1.

Partie I.

Soit une série de fonctions $L_a : \sum_{n \geq 1} a_n \frac{x^n}{1 - x^n}$.

1. Démontrer que pour tout $x \in] -1, 1[$, la série $\sum_{n \geq 1} a_n \frac{x^n}{1 - x^n}$ converge absolument.
2. Donner un exemple de suite $(a_n)_{n \geq 1}$ telle que la série L_a converge en au moins un x_0 n'appartenant pas à l'intervalle $] -1, 1[$.
3. On pose, pour tout $x \in] -1, 1[$, $f(x) = \sum_{n \geq 1} a_n \frac{x^n}{1 - x^n}$.
4. Expression sous forme de série entière

On note $\mathcal{A} = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Lorsque $(u_{n,p})_{(n,p) \in \mathcal{A}}$ est une famille sommable de réels, justifier que

$$\sum_{n \geq 1} \left(\sum_{p \geq 1} u_{n,p} \right) = \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{(k,p) \in I_n} u_{k,p} \right),$$

où $I_n = \{(k,p) \in \mathcal{A}, kp = n\}$.

Démontrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, la famille $(a_n x^{np})_{(n,p) \in \mathcal{A}}$ est sommable.

En déduire que f est DSE(0) sur $] -1, 1[$ avec pour tout $x \in] -1, 1[$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n,$$

à $b_n = \sum_{d|n} a_d$ ($d|n$ signifiant d divise n).

Partie II

1. Dans cette question, pour $n \geq 1$, $a_n = 1$ et on note d_n le nombre de diviseurs de n . Exprimer, pour tout $x \in] -1, 1[$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1 - x^n}$$

comme la somme d'une série entière.

2. Dans cette question, pour $n \geq 1$, on pose $a_n = \varphi(n)$ où $\varphi(n)$ est le nombre d'entiers naturels premiers avec n et inférieurs à n .

Justifier que la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$ est de rayon 1.

(On admet que pour $n \geq 1$, $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$.)

Pour $x \in]-1, 1[$, exprimer $\sum_{n \geq 1} \varphi(n) \frac{x^n}{1 - x^n}$ sous la forme d'un quotient de deux polynômes.

3. En utilisant le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ sur l'intervalle $] -1, 1[$, donner la valeur de la somme $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$.
4. Dans cette question et la suivante, pour $n \geq 1$, $a_n = (-1)^n$ et pour tout $x \in] -1, 1[$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1 - x^n}.$$

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ et donner un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0.

5. Démontrer qu'au voisinage de 1,

$$f(x) \sim \frac{-\ln 2}{1 - x}.$$

On pourra remarquer que pour $x \in]0, 1[$,

$$\frac{1 - x}{1 - x^n} = \frac{1}{1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}}.$$