

Problème

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n \rightarrow R=1$$

1) on a $1-x^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \Rightarrow 1-x^n \sim 1$

$$\Rightarrow \left| \frac{a_n x^n}{1-x^n} \right| \sim |a_n x^n|$$

or $x \in]-1,1[\Rightarrow \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est abscu

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 0} \frac{a_n x^n}{1-x^n} \text{ abscu, } \forall x \in]-1,1[$$

est (a_n) b. $\begin{cases} a_{2n} = 0 \\ a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{n} \end{cases}$, n.e.u.

$$\sum_{n \geq 1} \frac{a_n x^n}{1-x^n} = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n(1-x^{2n})}$$

pour $x = -1 \Rightarrow \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 2n} \text{ cv}$

ou bien $a_n = \frac{1}{n \cdot 2}$

pour $x > 1$: $x^n \sim -x^n$

$$\Rightarrow \left| \frac{a_n x^n}{1-x^n} \right| \sim |a_n| = \frac{1}{n \cdot 2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} \frac{a_n x^n}{1-x^n} \text{ cv pour } x > 1$$

2) $\forall x \in]-1,1[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n x^n}{1-x^n}$
 f est continue sur $] -1,1[$.

Soit $f_n(x) = \frac{a_n x^n}{1-x^n}$, $x \in]-1,1[$.
 Mein f_n continue sur $] -1,1[$.

Soit $[-b,b] \subset]-1,1[$, q.b.s.

$$|f_n(x)| \leq \frac{|a_n b^n|}{1-b^n} \quad (1-b^n \leq 1-|x^n| \leq |1-x^n|)$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in E(b, b^2)} |f_n(x)| \leq |a_n| \frac{b^n}{1-b^n}$$

$$\text{or } \sum_{n \geq 0} \frac{|a_n| b^n}{1-b^n} < \infty \Rightarrow \sum_{n \geq 0} \sup_{x \in E(b, b^2)} |f_n(x)| < \infty$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 0} f_n \in C.N \Rightarrow C.W \text{ on } E(b, b^2)$$

Donc: f est continue sur $J =]-1, 1[$.

$$4) I_n = \{ (k, p) \in (\mathbb{N}^*)^2 \mid k, p = n \}$$

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} I_n = (\mathbb{N}^*)^2$$

$$k, n \in \mathbb{N}^*, I_n \subset (\mathbb{N}^*)^2 \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} I_n \subset (\mathbb{N}^*)^2$$

$$\Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} I_n = (\mathbb{N}^*)^2 \Rightarrow \exists n = k, p \text{ s.t. } (k, p) \in I_n$$

$$\text{Donc: } \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} I_n = (\mathbb{N}^*)^2$$

Soit $n \neq n'$ $m(k, p) \in I_n \cap I_{n'}$
 $\Rightarrow k \cdot p = n = n'$ imp $\Rightarrow I_n \cap I_{n'} = \emptyset$

Donc $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une partition de $(\mathbb{N}^*)^2$

et on a la famille $(U_{n,p})_{n,p}$ est sommable

Alors $\sum_{(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2} U_{n,p} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{(k,p) \in I_n} U_{k,p}$

5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{p \geq 0} |a_n x^{np}| = |a_n| \sum_{p \geq 0} (|x^n|)^p$
 et $\sum_{p=0}^{\infty} |a_n| |x^{np}| = |a_n| \frac{|x^n|}{1 - |x^n|}$
 et $\sum_{n \geq 0} \frac{|a_n x^n|}{1 - |x^n|} < \infty \Rightarrow$ la famille sommable

d'après 1 pour $|x|$

$$d) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}, x \in]-1, 1[$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{p=1}^{\infty} x^{np}$$

or la famille $(a_n x^{np})_{n,p}$ est sommable
 $n \geq 1, p \geq 1$

D'après 4)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{(k,p) \in I_n} a_n x^{kp}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n \text{ avec } b_n = \sum_{d|n} a_d$$

$\Rightarrow f$ est DSE(0) sur $] -1, 1[$.

Partie II:

$$a_n = 1. \Rightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n \text{ avec}$$

$$b_n = \sum_{d|n} 1 = d_n = \text{nombre de diviseurs de } n$$

$$2) a_n = \varphi(n) = \text{Card} \{ p \in \{1, \dots, n\} : p \wedge n = 1 \}$$

$$\text{ona } 1 \leq l \leq \varphi(n) \leq n = d_n$$

$$\Rightarrow R_d \leq R_a \leq R_p$$

$$\text{or } R_d = R_p = L \Rightarrow \underline{R_a = L}$$

$$* \forall x \in]-1, 1[, f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n) x^n}{1-x^n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n \text{ avec } b_n = \sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = x \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)'$$

$$= \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2.$$

$$4) a_n = (-1)^n ; f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{1-x^n}$$

$$\frac{f(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{1-x^n}, \quad x \in]-1, 1[.$$

$$\forall n \geq 1, \lim_{x \rightarrow 0} (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{1-x^n} = \begin{cases} 1 & \text{si } n=1 \\ 0 & \text{si } n \neq 1 \end{cases}$$

Soit $b > 0$; $\sup_{x \in [b, 1[} \left| \frac{(-1)^{n-1} x^{n-1}}{1-x^n} \right| \leq \frac{b^{n-1}}{1-b^n}$

$$\text{on } \sum_{n \geq 1} \frac{b^{n-1}}{1-b^n} \subset \mathbb{R} \quad (\sim b^{n-1}) \quad (b < 1)$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} x^{n-1}}{1-x^n} \subset \mathbb{R} \Rightarrow \subset W_{\text{unif}}([-b, b]).$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow 0} (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{1-x^n} = -1.$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{f(x)}{x} \sim -x.}$$

5) req. $(1-x)f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\ln 2.$

$$\text{on a } (1-x)f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)x^n (-1)^{n-1}}{1-x^n}.$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{1+x+\dots+x^{n-1}}.$$

Soit $g_n(x) = \frac{(-1)^{n-1} x^n}{1+x+\dots+x^{n-1}}, \quad x \in]0, 1[.$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \lim_{x \rightarrow 0} g_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n} < \infty.$

$\forall x \in]0, 1[; \sum_{n \geq 1} g_n(x)$ est alternée.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |g_n(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-x)x^n}{1-x^n} = 0.$$

$$\frac{|g_{n+1}(x)|}{|g_n(x)|} = \frac{x(1+x+\dots+x^{n-1})}{1+x+\dots+x^n} \leq 1.$$

Alors la suite $(|q_n(x)|)_{n \geq 1}$ est décroissante.

D'après T.S.A.

$$|R_n(x)| \leq |q_{n+1}(x)| = \frac{x^{n+1}}{1+x+\dots+x^n}, \quad \forall x \in J_0 \cup I.$$

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}; \quad x^k \geq x^{n+1}.$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^n x^k \geq (n+1)x^{n+1} \Rightarrow \frac{x^{n+1}}{\sum_{k=0}^n x^k} \leq \frac{1}{n+1}.$$

$$\Rightarrow |R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1}, \quad \forall x \in J_0 \cup I.$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in J_0 \cup I} |R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} q_n \text{ converge sur } J_0 \cup I.$$

Ainsi.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow 1^-} x^n q_n(x)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = -\ln 2.$$

Arithmetic (Σx_i^2)

$$\text{thm. } \forall x > 0; \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

$$\text{Proof } x_i = x^i, \forall i \in \{0, \dots, n\}$$

$$\sqrt[n+1]{\prod_{i=0}^n x^i} \leq \frac{\sum_{i=0}^n x^i}{n+1}$$

$$\left(x^{\frac{n(n+1)}{2}} \right)^{\frac{1}{n+1}} \leq \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[n+1]{x^{\frac{n(n+1)}{2}}}} \leq \frac{1}{n+1} \cdot x^{\frac{n}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[n+1]{x^{\frac{n(n+1)}{2}}}} \leq \frac{1}{n+1} \cdot x^{\frac{n}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{x^{\frac{n}{2}}}{n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n+1}$$