

Ensemble dénombrable.

E un ensemble dénombrable.
def $\exists \varphi: \mathbb{N} \rightarrow E$ bijection.

$$\forall x \in E; \exists ! n \in \mathbb{N} \text{ tq } x = \varphi(n)$$

$= \text{noté } x_n$

$$E = \{x_n, n \in \mathbb{N}\} = \text{énumération de } E$$

Propriétés:

1) Soit $F \subseteq E =$ dénombrable

$\Rightarrow F$ est fini ou dénombrable.

Exp: $e \in \mathbb{N}; \{2n+1, n \in \mathbb{N}\}; p \in \mathbb{N}$.

2) Soit E dénombrable et F en bijection avec E .
 $\Rightarrow F$ est dénombrable.

③ Soit E_1 et E_2 deux ensembles dénombrables.
Alors $E_1 \cup E_2$ est dénombrable.

Exp: $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \mathbb{Z}_- =$ dénombrable.

④ Soit $(E_i)_{i \in \mathbb{N}}$ des ensembles dénombrables.

Alors $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i$ est dénombrable.

Exp: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}; p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{Z}^* \right\}$

$$= \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{p}{q}; q \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

$\Rightarrow \mathbb{Q}$ dénombrable.

⑤ Soit $E_1 = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$
 $E_2 = \{y_n, n \in \mathbb{N}\}$ $\Rightarrow$ dénombrable.

Alors $E_1 \times E_2 = \{ (x_n, y_p) \mid n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N} \}$ est dénombrable.

Ex: $\mathbb{N}^2; \mathbb{Z}^2; \mathbb{Q}^2$
 $\mathbb{N}^p, \mathbb{Z}^p, \mathbb{Q}^p$ sont des ensembles
dénombrables.

I ensemble au plus dénombrable.

① famille nommée à termes positifs

$$U_i \geq 0, \forall i \in I$$

Def $(U_i)_{i \in I}$ est nommée

$$\Leftrightarrow \exists \pi \geq 0, \forall F \text{ fini}, \sum_{i \in F} U_i \leq \pi.$$

Dans ce cas.

$$\sum_{i \in I} U_i \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{F \text{ fini} \\ F \subset I}} \left\{ \sum_{i \in F} U_i \right\}$$

Pour $I = \mathbb{N}$

$$U_n \geq 0$$

$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est nommée

$$\Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} U_n < +\infty$$

et on a

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} U_n = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n$$

$$U_n \geq 0$$

$$\sum_{n \geq 0} U_n \Leftrightarrow \exists \pi \geq 0, \sum_{k=0}^n U_k \leq \pi$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n U_k = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \sum_{k=0}^n U_k \right\}$$

l'ensemble au plus dénombrable.

① formule sommable à termes positifs

$$U_i \geq 0, \forall i \in \mathbb{I}$$

Def $(U_i)_{i \in \mathbb{I}}$ est sommable

$$\Leftrightarrow \exists \Pi \geq 0, \forall F \text{ fini } \sum_{i \in F} U_i \leq \Pi$$

Dans ce cas

$$\sum_{i \in \mathbb{I}} U_i \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{F \text{ fini} \\ F \subset \mathbb{I}}} \sum_{i \in F} U_i$$

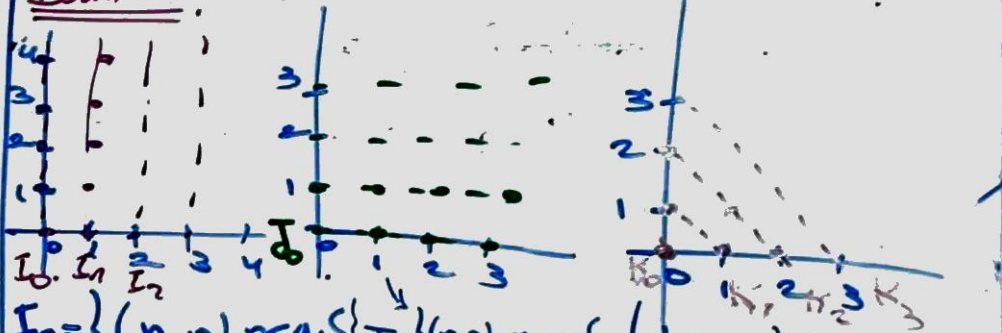
Pour $\mathbb{I} = \mathbb{N}$

$$(U_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est sommable}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} U_n = \sum_{n=0}^{\infty} U_n$$

et on a

Dans $\mathbb{N}^2$



$$I_n = \{(n, p), p \in \mathbb{N}\} \quad J_n = \{(n, p), n \in \mathbb{N}\} \quad K_n = \{(p, q) \in \mathbb{N}^2 \mid p+q = n\}$$

Exp Soit $U_{p,q} = \frac{1}{(p+q)^3}$, $(p,q) \neq (0,0)$
 on a $(K_n)_{n \geq 1}$ est une partition de $\mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\}$
 $n \geq 1$

$$U_{p,q} = \frac{1}{(p+q)^3} = \frac{1}{n^3}, \quad \forall (p,q) \in K_n$$

$$\sum_{(p,q) \in K_n} U_{p,q} = \sum_{(p,q) \in K_n} \frac{1}{n^3} = \frac{\text{card } K_n}{n^3}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{card } K_n}{n^3} \text{ CV} \Rightarrow \text{la famille } (U_{p,q}) \text{ est sommable}$$

Def.

Th 1 Soit $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{I}$ bijective
 $(u_i)_{i \in \mathbb{I}}$ est sommable $\Leftrightarrow$
 $\sum_{n \geq 0} \varphi(n) \text{ CV.}$

Th 2 $I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ avec $I_n \cap I_p = \emptyset$
 $(u_i)_{i \in I}$ est sommable $\Leftrightarrow$
 $\forall n \in \mathbb{N}, (u_i)_{i \in I_n}$ est sommable
 et $\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{i \in I_n} u_i \right)$ est CV

famille sommable.
 et termes reels positifs.

Dans ce cas.
 $\sum_{i \in I} u_i = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i \in I_n} u_i \right)$

$I = \mathbb{N}$
 (u_n) est sommable $\Leftrightarrow$
 $\sum_{n \geq 0} u_n$ est CV

Th 1
 Si $I = I_1 \cup I_2$ avec $I_1 \cap I_2 = \emptyset$
 la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable
 $\Leftrightarrow$
 $(u_i)_{i \in I_1}$ et $(u_i)_{i \in I_2}$ sont sommables

Th 3 $I = \mathbb{N}$
 $(u_{n,p})_{(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ est sommable $\Leftrightarrow$
 $\forall n \in \mathbb{N}, (u_{n,p})_{p \in \mathbb{N}}$ est sommable
 et $\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{p \geq 0} u_{n,p} \right)$ est CV

Si $J \subset I$
 et $(u_i)_{i \in I}$ est sommable.
 Alors $(u_i)_{i \in J}$ est sommable

Dans ce cas.
 $\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I_1} u_i + \sum_{i \in I_2} u_i$

Dans ce cas.
 $\sum_{(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} u_{n,p} = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{p \geq 0} u_{n,p} \right)$
Appel $I = \mathbb{N}$
 $\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{p \geq 0} u_{n,p} \right)$ est CV

Si $0 \leq u_i \leq v_i, i \in I$
 et $(u_i)_{i \in I}$ est sommable
 Alors $(v_i)_{i \in I}$ est sommable

Appel
 $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable $\Leftrightarrow$
 $\sum_{n \geq 0} u_n$ est CV

$$\begin{aligned}
 \text{et } \sum_{p+q=0} U_{p,q} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{(p,q) \in K_n} U_{p,q} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \\
 &= \zeta(2) + \zeta(3)
 \end{aligned}$$

Exercice 1.

$$U_{n,p} = \frac{1}{(n+p^e)(n+p^e+1)} \quad \begin{matrix} n \geq 0 \\ p \geq 1 \end{matrix}$$

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ (fixé).

$$\sum_{n \geq 0} U_{n,p} \text{ CV } \Leftrightarrow \sim \frac{1}{n^e}$$

$$\sum_{n \geq 0} U_{n,p} = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{n+p^e} - \frac{1}{n+p^e+1} \right)$$

$$\sum_{p \geq 1} \frac{1}{p^e} \text{ CV } \Leftrightarrow \frac{1}{p^e}$$

Alors la famille $(U_{n,p})$ est sommable.

$$\begin{aligned}
 \text{et } \sum_{\substack{n \geq 0 \\ p \geq 1}} U_{n,p} &= \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} U_{n,p} \\
 &= \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^e} = \frac{\pi^e}{6}.
 \end{aligned}$$

Exercice 4.

$$a_{ij} = \frac{i+j}{2^{i+j}}, \quad (i,j) \in \mathbb{N}^2$$

Soit $K_n = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid i+j=n\}$

$\Rightarrow (K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une partition de $\mathbb{N}^2$.

Puis $\text{card } K_n < \infty \Rightarrow (a_{ij})_{(i,j) \in K_n}$ est sommable

$$\sum_{(i,j) \in K_n} a_{ij} = \sum_{(i,j) \in K_n} \frac{n}{2^n} = \text{card } K_n \cdot \frac{n}{2^n}$$

$$\sum_{n \geq 0} \frac{n(n+1)}{2^n} \text{ CV (Différent) } = \frac{n(n+1)}{2^n}$$

$\Rightarrow (a_{ij})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable

Def $(U_i)_{i \in I}$ est sommable $\Leftrightarrow$
 $\sum_{i \in I} |U_i|$ est sommable.

Th 1 Sit 1: $I = \mathbb{N} \rightarrow I$ bijectif
 $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est sommable $\Leftrightarrow$
 $\sum_{n \geq 0} U_n$ abs CV.

Th 2 $I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ avec $I_n \cap I_p = \emptyset$
 $(U_i)_{i \in I}$ est sommable $\Leftrightarrow$
 $\forall n \in \mathbb{N}, (U_i)_{i \in I_n}$ est sommable
 et $\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{i \in I_n} |U_i| \right)$ est CV

I = IN
 $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable $\Leftrightarrow$
 $\sum_{n \geq 0} U_n$ est abs CV

famille sommable
 à termes réels ou complexes

Pour ces cas:

$$\sum_{i \in I} U_i = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i \in I_n} U_i \right)$$

Th 3
 Si $I = I_1 \cup I_2$ avec $I_1 \cap I_2 = \emptyset$
 la famille $(U_i)_{i \in I}$ est sommable $\Leftrightarrow$
 $(U_i)_{i \in I_1}$ et $(U_i)_{i \in I_2}$ sont sommables

Th 3 I = IN
 $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable $\Leftrightarrow$
 $\forall n \in \mathbb{N}, (U_p)_{p \geq n}$ est sommable $\Leftrightarrow$
 $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{p \geq n} U_p$ abs CV
 et $\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{p \geq n} |U_p| \right)$ est CV.

Si $J \subset I$ est sommable
 et $(U_i)_{i \in I}$ est sommable
 Alors $(U_i)_{i \in J}$ est sommable

Si $\sum_{i \in I} |U_i| < \infty$
 et $(U_i)_{i \in I}$ est sommable
 Alors $(U_i)_{i \in I}$ est sommable

Dans ce cas:

$$\sum_{i \in I} U_i = \sum_{i \in I_1} U_i + \sum_{i \in I_2} U_i$$

App 1
 $I = \mathbb{N}$
 $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable $\Leftrightarrow$
 $\sum_{n \geq 0} U_n$ abs CV

App 2
 $I = \mathbb{N}$
 $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable $\Leftrightarrow$
 $\sum_{n \geq 0} U_n$ abs CV

$$\sum_{(i,j) \in K_n} a_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(i,j) \in K_n} a_{ij}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n}$$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \forall x \in (-1, 1)$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n \right)' = \frac{e}{(1-x)^3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) x^{n-1} = \frac{e}{(1-x)^3}$$

$x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n} = 6$

Ex Soit $q \in]-1, 1[$.
 Pr la familt. $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $u_n = q^n$
 sommable et Calculer sa somme.

Res

On a: $\sum_{n \geq 0} |u_n| = \sum_{n \geq 0} |q|^n < \infty$.

et $\sum_{n \geq 1} |u_n| = \sum_{n \geq 1} |q|^n < \infty$.

Donc la familt. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sommable.

Alors: $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} u_n$

$= \sum_{n=0}^{\infty} q^n - 1$

$= \frac{1-q}{1-q} - 1$

$= \frac{1-q}{1-q} - 1$

Exercice

$\xi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$

1) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ est une serie de Riemann.

alors elle cvssi $x > 1$.

2) Soit $x \in]-1, 1[$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ (fixe).

$\sum_{n \geq 1} \frac{x^{2n}}{k^{2n}} = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{x^2}{k^2} \right)^n$ cvssi $\left| \frac{x^2}{k^2} \right| < 1$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{k^2} \right)^n = \frac{\frac{x^2}{k^2}}{1 - \frac{x^2}{k^2}} = \frac{x^2}{k^2 - x^2}$

or $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{k^2 - x^2} < \infty$ ($x \neq 0$)

Donc la familt. est sommable.

Actualement

soit $n \in \mathbb{N}^* (f(x))$.

$$\sum_{k \geq 1} \frac{x^{kn}}{k^{2n}} = x^{2n} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^{2n}} \text{ car } (2n > 1)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{kn}}{k^{2n}} = x^{2n} \zeta(2n).$$

or $\lim_{x \rightarrow 1^-} \zeta(x) = 1 \Rightarrow \zeta(x) \sim 1$.

$$\Rightarrow x^{2n} \zeta(2n) \sim x^{2n}.$$

et $\sum_{n \geq 1} x^{2n} \in V \oplus \Rightarrow$ la famille est sommable.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \zeta(2n) x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{kn}}{k^{2n}}$$

puisque la famille $\left(\frac{x^{kn}}{k^{2n}} \right)_{\substack{n \geq 1 \\ k \geq 1}}$ est sommable.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \zeta(2n) \cdot x^{2n} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{kn}}{k^{2n}}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{k^2 - x^2} = \frac{1 - \text{Tr} \cot^2 \pi x}{2}.$$

Pour $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Exercice 3:

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ positif d'ordre sommable.

$$\Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} a_n^2 < \infty.$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n-t}, \quad t \in \mathbb{J} =]-1, 1[.$$

1. $\forall t \in \mathbb{J}, \exists C, \forall n \geq 1, n-t \neq 0$

$$a_n \left| \frac{a_n}{n-t} \right| \leq \frac{1}{2} \left(a_n^2 + \frac{1}{(n-t)^2} \right)$$

$$\text{or } \sum_{n \geq 1} a_n \text{ CV et } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n-t)^p} \text{ CV}$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n-t} \text{ est abs CV} \rightarrow \text{CV}$$

Donc f est définie sur $J =]-1, 1[$.

$$e) f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \cdot \left(\frac{1}{1-t/n} \right) \quad \left(|t/n| < 1 \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t}{n} \right)^k$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_n \frac{t^k}{n^{k+1}}$$

Soit $w_{n,k} = a_n \frac{t^k}{n^{k+1}}$

Soit $n \in \mathbb{N}^* (p. 10)$

$$\sum_{k=0}^{\infty} |w_{n,k}| = \frac{|a_n|}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{|t|}{n} \right)^k \text{ CV.}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} |w_{n,k}| = \frac{|a_n|}{n} \cdot \frac{1}{1-|t|} = \frac{|a_n|}{n(1-|t|)}$$

$$\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} \quad \text{cu d'après 1. p. 15. 5. 11. 1.}$$

Donc la famille (U_n) est sommable.

Alors

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{k+1}} \right) t^k.$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k, \quad \forall t \in J-111C.$$

$$\Rightarrow f \in DSE(0) \text{ sur } J-111C.$$

$$\begin{aligned} & \text{Ex} \\ & (a_n) \\ & \Rightarrow \\ & f(t) \\ & \text{u. v.} \\ & t \\ & \frac{a_n}{n} / \frac{a_n}{n-1} \end{aligned}$$