

Probabilité

1 Généralités

Tribu

Soit Ω un ensemble. On appelle une tribu sur Ω toute partie $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant :

- i) $\Omega \in \mathcal{T}$
- ii) $\forall A \in \mathcal{T}, {}^c A \in \mathcal{T}$
- iii) Pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{T}$, on a $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{T}$

Définitions

- On appelle événement une partie A de Ω tel que $A \in \mathcal{T}$. Soient A et B deux événements.
- $\emptyset$ est l'événement impossible.
- Ω est l'événement certain ou l'univers.
- Si A est un événement, $\bar{A} = {}^c A$ est appelé l'événement contraire de A .
- Les singletons $\{\omega\}$ sont appelés événements élémentaires.
- On note $A \subset B$. Si l'événement A implique B .
- $A \cap B$ est l'événement A et B se réalisent.
- $A \cup B$ est l'événement A se réalise ou B se réalise.
- Si $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont incompatibles.

Définition

Soit Ω un ensemble et $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω . On appelle probabilité sur Ω une application $P : \mathcal{T} \rightarrow [0, 1]$ vérifiant :

- i) $P(\Omega) = 1$
- ii) Pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles, on a : $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$.

Le triplet $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ est appelé espace probabilisé.

Dans la suite, on considère $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ espace probabilisé

Propriétés

1) $P(\emptyset) = 0$.

2) Si $(A_k)_{0 \leq k \leq n}$ une famille finie d'événements deux à deux incompatibles, alors

$$P\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) = \sum_{k=0}^n P(A_k).$$

3) $\forall A \in \mathcal{T}, P({}^c A) = 1 - P(A)$.

4) Si $A \subset B$, alors $P(A) \leq P(B)$.

5) $\forall A \in \mathcal{T}, \forall B \in \mathcal{T},$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

D'où $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$.

6) Soit $(A_0, \dots, A_n)$ des événements, alors

$$P\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) \leq \sum_{k=0}^n P(A_k).$$

7) Pour une suite quelconque $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements on a :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

* Théorème de continuité monotone

1) Pour toute suite croissante $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements $(A_n \subset A_{n+1})$, on a :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n).$$

2) Pour toute suite décroissante $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements $(A_{n+1} \subset A_n)$, on a :

$$P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n).$$

* Corollaire

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite quelconque d'événements, alors on a :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right)$$

$$P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{k=0}^n A_k\right).$$

Retenons

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) & \text{Si les } A_n, n \in \mathbb{N} \text{ sont 2 à 2 incompatibles} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) & \text{Si } (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) & \text{Si } (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est une suite quelconque} \end{cases}$$

$$P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) & \text{Si } (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est une suite décroissante} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{k=0}^n A_k\right) & \text{Si } (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est une suite quelconque} \end{cases}$$

* Événements négligeables, événements presque sûrs

Soient $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et A un événement de Ω .

1) On dit A est un événement négligeable si $P(A) = 0$.

2) On dit A est un événement presque sûr si $P(A) = 1$. par

Soient A et B deux événements de Ω .

3) a) Si A est un événement négligeable et $B \subset A$, alors B est négligeable.

b) A est un événement négligeable, alors $A \cap B$ est négligeable et on a $P(A \cup B) = P(B)$.

4) a) Si A est un événement presque sûr, alors l'événement $A \cup B$ est presque sûr.

b) Si A est un événement presque sûr, alors $P(A \cap B) = P(B)$

Probabilité Conditionnelles.

Dans toute la suite, on considère $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé.

* Définition-Proposition

Soit B un événement de Ω tel que $P(B) > 0$.

La probabilité conditionnelle de A sachant B , notée $P_B(A)$ (ou $P(A|B)$) est définie par :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

L'application $P_B : A \mapsto P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$.

Formule des probabilités composées

i) Soient A et B deux événements, alors

$$P(A \cap B) = P_B(A) P(B)$$

ii) Soit $A_1, \dots, A_n$ des événements de Ω , alors

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)P(A_1 \cap A_2)(A_3) \dots P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})(A_n)$$

Système complet

Soit I un ensemble fini ou dénombrable.

On appelle système complet d'événements toute famille $(A_i)_{i \in I}$ d'événements

vérifiant :

i) $\forall (i, j) \in I^2$ avec $i \neq j$, on a : $A_i \cap A_j = \emptyset$

ii) $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$

Autrement dit, la famille $(A_i)_{i \in I}$ est une famille au plus dénombrable d'événements deux à deux incompatibles et de réunion Ω .

Formule des probabilités totales

Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, alors pour tout événement B de Ω , la série $\sum_{n \geq 0} P(B \cap A_n)$ converge et on a :

$$P(B) = \sum_{n=0}^{\infty} P(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{A_n}(B)P(A_n).$$

Remarque

1) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, alors la série $\sum_{n \geq 0} P(A_n)$ converge et on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(A_n) = 1.$$

En particulier si $\Omega = \{w_n, n \in \mathbb{N}\}$ (où les w_n sont deux à deux distincts), alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(w_n) = 1.$$

Formule de Bayes

1) Si A et B sont deux événements de probabilités non nulles, alors

$$P_B(A) = \frac{P_A(B)P(A)}{P(B)}.$$

2) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, alors pour tout événement B de Ω de probabilité non nulle et tout $k \in \mathbb{N}$

$$P_B(A_k) = \frac{P_{A_k}(B)P(A_k)}{\sum_{n=0}^{\infty} P_{A_n}(B)P(A_n)}$$

Indépendance

• On dit que deux événements A et B de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ sont indépendants si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

• On dit qu'une famille $(A_k)_{k \in I}$ d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ sont mutuellement indépendants si

$$\forall \mathcal{I} \subset I, \quad P\left(\bigcap_{k \in \mathcal{I}} A_k\right) = \prod_{k \in \mathcal{I}} P(A_k).$$