

exercice 1

2. On tire au hasard un dé parmi les 100 dés.
 Notons T l'événement : « le dé choisi est pipé ».
 Notons A l'événement : « On obtient le chiffre 6 lors du lancer ».
 On demande de calculer $P_A(T)$.
 Le système $(T, \bar{T})$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles.
 On a d'ailleurs, $P(T) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ et donc $P(\bar{T}) = \frac{3}{4}$.
 Alors, d'après la formule de Bayes, on a :

$$P_A(T) = \frac{P(T)P_T(A)}{P_T(A)P(T) + P_{\bar{T}}(A)P(\bar{T})} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}.$$

4. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On choisit au hasard un dé parmi les 100 dés.
 $\forall k \in [1, n]$, on note A_k l'événement « on obtient le chiffre 6 au $k^{\text{ème}}$ lancer ».

On pose $B_n = \bigcap_{k=1}^n A_k$.

On nous demande de calculer $p_n = P_{B_n}(T)$.

Le système $(T, \bar{T})$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles.

On a d'ailleurs, $P(T) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ et donc $P(\bar{T}) = \frac{3}{4}$.

$$\begin{aligned} p_n = P_{B_n}(T) &= \frac{P(B_n) \cdot P(T)}{P(B_n) \cdot P(T) + P(B_n) \cdot P(\bar{T})} \\ &= \frac{\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n}{\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n} = \frac{1}{1 + 3\left(\frac{2}{6}\right)^n} \end{aligned}$$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 1$

si on lance le dé et on obtient un 6 c'est que forte probabilité que le dé soit truqué.

Exercice 3

1. Notons U_1 l'événement le premier tirage se fait dans l'urne U_1 .
 Notons U_2 l'événement le premier tirage se fait dans l'urne U_2 .
 (U_1, U_2) est un système complet d'événements.
 Donc d'après la formule des probabilités totales, $p_1 = P(B_1) = P_{U_1}(B_1)P(U_1) + P_{U_2}(B_1)P(U_2)$.
 Donc $p_1 = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{4}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{17}{35}$.
 On a donc $p_1 = \frac{17}{35}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
 $(B_n, \bar{B}_n)$ est un système complet d'événements.
 Donc, d'après la formule des probabilités totales, $P(B_{n+1}) = P_{B_n}(B_{n+1})P(B_n) + P_{\bar{B}_n}(B_{n+1})P(\bar{B}_n)$.
 Alors en tenant compte des conditions de tirage, on a $p_{n+1} = \frac{2}{5}p_n + \frac{4}{7}(1 - p_n)$.
 Donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}$.
 Donc $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite arithmético-géométrique.
 On résout l'équation $l = -\frac{6}{35}l + \frac{4}{7}$ et on trouve $l = \frac{20}{41}$.
 On considère alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = p_n - l$.
 $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $-\frac{6}{35}$, donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(-\frac{6}{35}\right)^{n-1} u_1$.
 Or $u_1 = p_1 - l = \frac{17}{35} - \frac{20}{41} = -\frac{3}{1435}$.
 On en déduit que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = u_n + l$, c'est-à-dire $p_n = -\frac{3}{1435} \left(-\frac{6}{35}\right)^{n-1} + \frac{20}{41}$.

On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(A_k) \neq 1$.

1. La suite $(B_n)_n$ étant croissante pour l'inclusion, par propriété de continuité croissante, $P(B_n)$
2. Soit $P(A_n) \not\rightarrow 0$ et alors $\ln(1 - P(A_n)) \not\rightarrow 0$ et les deux séries divergent grossièrement, soit $P(A_n) \rightarrow 0$ et $\ln(1 - P(A_n)) \sim -P(A_n) \geq 0$ donc par comparaison de séries à termes positifs,

les deux séries ont même nature.

C'est donc toujours le cas.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant l'indépendance des A_n ,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \ln(1 - P(A_k)) &= \ln \left(\prod_{k=0}^n P(\overline{A_k}) \right) = \ln \left(P \left(\bigcap_{k=0}^n \overline{A_k} \right) \right) \\ &= \ln(1 - P(B_n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} \ln(1 - P(B)) & \text{si } P(B) < 1 \\ -\infty & \text{si } P(B) = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Avec la question précédente, on a bien $P(B) < 1$ si et seulement si $\sum P(A_n)$ converge.

4. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $C_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$. Alors $(C_n)_n$ est décroissante, donc par continuité décroissante, $P(C_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P(I)$.

Posons, pour $n, m \in \mathbb{N}$, $C_n^m = \bigcup_{k=n}^m A_k$. Par continuité croissante, $P(C_n^m) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} P(C_n)$.

Puis, comme dans la question précédente,

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^m \ln(1 - P(A_k)) &= \ln \left(\prod_{k=n}^m P(\overline{A_k}) \right) = \ln \left(P \left(\bigcap_{k=n}^m \overline{A_k} \right) \right) \\ &= \ln(1 - P(C_n^m)) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \begin{cases} \ln(1 - P(C_n)) & \text{si } P(C_n) < 1 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

- Si $P(B) < 1$, alors par croissance, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(C_n) < 1$ donc $\sum_{k \geq n} \ln(1 - P(A_k))$ converge et $1 - P(C_n) = e^{\sum_{k=n}^{+\infty} \ln(1 - P(A_k))} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^0 = 1$ comme reste d'une série convergente. On a donc $P(I) = 0$ par unicité de la limite.
- Si $P(B) = 1$, avec les deux questions précédentes, $\sum \ln(1 - P(A_n))$ diverge, et c'est aussi le cas, pour tout $n \in \mathbb{N}$, de $\sum_{k \geq n} \ln(1 - P(A_k))$. Comme c'est une série à terme négatifs, $\ln(1 - P(C_n^m)) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} -\infty$, donc $P(C_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $P(I) = 1$.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \\
 3. P(\bar{B}|A_2) &= \frac{P(\bar{B} \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{P(A_2|\bar{B}) \times P(\bar{B})}{P(A_2)} = \frac{P(A_2|\bar{B}) \times P(\bar{B})}{P(A_2|B) \times P(B) + P(A_2|\bar{B}) \times P(\bar{B})} \\
 &= \frac{\frac{1}{6} \times \frac{3}{4}}{\frac{1}{10} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{4}} \\
 &= \frac{5}{6}
 \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 3 :

On considère les événements :

A = "L'appareil provient de A",

B = "L'appareil provient de B",

D = "L'appareil est défectueux".

On a par hypothèses :

$$P(A) = 0.6, P(B) = 0.4, P(D|A) = \frac{1}{10} \text{ et } P(D|B) = \frac{3}{10}.$$

$$1. P(D) = P(D|A) \times P(A) + P(D|B) \times P(B) = \frac{1}{10} \times \frac{6}{10} + \frac{1}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{18}{100}.$$

$$2. P(B|D) = \frac{P(D|B) \times P(B)}{P(D)} = \frac{\frac{3}{10} \times \frac{4}{10}}{\frac{18}{100}} = \frac{2}{3}.$$

$$3. P(A|\bar{D}) = \frac{P(\bar{D}|A) \times P(A)}{P(\bar{D})}.$$

$$\text{Or } P(\bar{D}|A) = \frac{P(\bar{D} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(D \cap A)}{P(A)} = 1 - P(D|A).$$

$$\text{Donc, } P(A|\bar{D}) = \frac{(1 - P(D|A)) \times P(A)}{1 - P(D)} = \frac{\frac{9}{10} \times \frac{6}{10}}{\frac{82}{100}} = \frac{54}{82}.$$

$$4. P(B \cap D) = P(B|D) \times P(D) \neq P(B) \times P(D).$$

Correction de l'exercice 4 :

On pose A l'événement "Obtenir pile". On a $P(A) = p \in]0, 1[$ et $P(\bar{A}) = 1 - p = q$.

$$1. P(F_1) = 1 - p,$$

$$P(F_2) = p \times (1 - p),$$

$$P(F_3) = p^2 \times (1 - p), \dots$$

$$\Rightarrow P(F_n) = p^{n-1} \times (1 - p) \text{ et } P(B|F_n) = \frac{1}{n}.$$

2. Comme $(F_n)_{n \geq 1}$ est un système complet d'événements, alors

$$P(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(B \cap F_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(B|F_n) \times P(F_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q}{n} p^{n-1}.$$

3. La pièce est non biaisée, donc $p = q = \frac{1}{2}$. Donc,

$$P(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\frac{1}{2})^n}{n} = -\ln(1 - \frac{1}{2}) = \ln(2).$$

En effet, on a utilisé le fait que $\forall |x| < 1, \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x)$.

Correction de l'exercice 5 :

On a $\{F, \bar{F}\}$ forme un système complet d'événements.

$$1. P(A_n) = P(A_n|F) \times P(F) + P(A_n|\bar{F}) \times P(\bar{F}).$$

2. $(A_n|F)$: "on a obtenu un nombre pair de pile lorsqu'on lance la pièce n fois sachant qu'on a obtenu face à la première lancer"

C'est à dire "on a obtenu un nombre pair de pile lorsqu'on lance la pièce $n-1$ fois" qui est l'événement A_{n-1} . D'où,

$$P(A_n|F) = P(A_{n-1}) \quad \text{et} \quad P(A_n|\bar{F}) = P(\bar{A}_{n-1}).$$

$$\begin{aligned} 3. P(A_n) &= P(A_n|F) \times P(F) + P(A_n|\bar{F}) \times P(\bar{F}) \\ &= P(A_{n-1}) \times (1-p) + (1-P(A_{n-1})) \times p \\ &= P(A_{n-1}) \times (1-2p) + p. \end{aligned}$$

4. Soit $X_n = P(A_n)$. On a

$$X_n = X_{n-1} \times (1-2p) + p.$$

Soit c tel que $c = c(1-2p) + p$. Donc $c = \frac{1}{2}$.

On pose maintenant $Y_n = X_n - c$. Alors, $Y_n = X_n - \frac{1}{2} \Rightarrow X_n = Y_n + \frac{1}{2}$.

Comme $Y_n + \frac{1}{2} = (Y_{n-1} + \frac{1}{2}) \times (1-2p) + p$, alors $Y_n = Y_{n-1} \times (1-2p)$.

Ainsi $(Y_n)_n$ est une suite géométrique et

$$Y_n = Y_1 \times (1-2p)^{n-1}.$$

Or $Y_1 = X_1 - \frac{1}{2} = P(A_1) - \frac{1}{2} = (1-p) - \frac{1}{2} = \frac{1-2p}{2}$. Donc,

$$P(A_n) = X_n = Y_n + \frac{1}{2} = Y_1 \times (1-2p)^{n-1} + \frac{1}{2} = \frac{(1-2p)^n}{2} + \frac{1}{2}.$$

5. Puisque $0 < p < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = \frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 6 :

$$1. - q_1 = P(B_1) = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} - p_1 &= P(A_1) = P(A_1 \cap B_1) + P(A_1 \cap \bar{B}_1), \\ &= P(A_1|B_1) \times P(B_1) + P(A_1|\bar{B}_1) \times P(\bar{B}_1), \\ &= \frac{a+b}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - q_2 &= P(B_2) = P(B_2 \cap B_1) + P(B_2 \cap \bar{B}_1), \\ &= P(B_2|B_1) \times P(B_1) + P(B_2|\bar{B}_1) \times P(\bar{B}_1), \\ &= \frac{a+1-b}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - p_2 &= P(A_2) = P(A_2 \cap B_2) + P(A_2 \cap \bar{B}_2), \\ &= P(A_2|B_2) \times P(B_2) + P(A_2|\bar{B}_2) \times P(\bar{B}_2), \end{aligned}$$

$$= a \times \frac{a+1-b}{2} + b \times \left(1 - \frac{a+1-b}{2}\right).$$

2. $(B_n | B_{n-1})$: "Le n ième tirage est effectué dans A sachant que le $(n-1)$ ième tirage est effectué dans A "

C'est à dire "on a tiré une boule blanche au $(n-1)$ ième tirage sachant que le $(n-1)$ ième tirage est effectué dans A ". Donc c'est l'événement $(A_{n-1} | B_{n-1})$.

$$\begin{aligned} 3. q_n &= P(B_n) = P(B_n \cap B_{n-1}) + P(B_n \cap \overline{B_{n-1}}), \\ &= P(B_n | B_{n-1}) \times P(B_{n-1}) + P(B_n | \overline{B_{n-1}}) \times P(\overline{B_{n-1}}), \\ &= a \times q_{n-1} + (1-b) \times (1 - q_{n-1}). \end{aligned}$$

D'où

$$q_n = q_{n-1} \times (a+b-1) + (1-b).$$

4. On pose

$$X_n = X_{n-1} \times (a+b-1) + (1-b),$$

et soit c tel que $c = c(a+b-1) + (1-b)$. Donc $c = \frac{1-b}{2-a-b}$.

On pose maintenant $Y_n = X_n - c$. Alors,

Comme $Y_n + c = (Y_{n-1} + c) \times (a+b-1) + (1-b)$, alors $Y_n = Y_{n-1} \times (a+b-1)$.

Ainsi $(Y_n)_n$ est une suite géométrique et

$$Y_n = Y_1 \times (a+b-1)^{n-1}.$$

$$\text{Or } Y_1 = X_1 - \frac{1-b}{2-a-b} = q_1 - \frac{1-b}{2-a-b} = \frac{1}{2} - \frac{1-b}{2-a-b}.$$

Donc,

$$Y_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1-b}{2-a-b}\right) \times (a+b-1)^{n-1}.$$

Ainsi,

$$q_n = X_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1-b}{2-a-b}\right) \times (a+b-1)^{n-1} + \frac{1-b}{2-a-b}.$$

$$\begin{aligned} 5. p_n &= P(A_n) = P(A_n | B_n) \times P(B_n) + P(A_n | \overline{B_n}) \times P(\overline{B_n}), \\ &= a \times q_n + b \times (1 - q_n), \\ &= (a-b) \times q_n + b. \end{aligned}$$

6. Puisque $0 < a+b < 2$, alors $0 < a+b-1 < 1$. D'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = \frac{1-b}{2-a-b} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = (a-b) \times \frac{1-b}{2-a-b} + b.$$