

## Série "Probabilité"

## Exercice 1

Parmi 100 dés cubiques, 25 sont pipés de telle sorte que la probabilité d'obtenir 6 soit  $\frac{1}{2}$  et que les autres numéros aient la même probabilité d'apparaître.

On prend un dé au hasard parmi les 100 dés et on lance.

- 1) Quelle est la probabilité d'obtenir 6?
- 2) On obtient 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé?
- 3) On obtient 2. Quelle est la probabilité que ce dé ne soit pas pipé?
- 4) a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé  $n$  fois et on obtient  $n$  fois le chiffre 6.

Quelle est la probabilité  $p_n$  que ce dé soit pipé?

(b) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$ . Interpréter ce résultat.

## Exercice 2

Dans un dépôt, un stock d'appareils est constitué de produits provenant de deux usines  $A$  et  $B$  : 60% du stock en provenant de  $A$  et 40% en provenance de  $B$ . On suppose que  $\frac{1}{10}$  des appareils qui proviennent de  $A$  présente un défaut et  $\frac{3}{10}$  des appareils qui proviennent de  $B$  présente un défaut.

1. Déterminer la probabilité qu'un appareil du stock soit défectueux.
2. Parmi les appareils du stock défectueux, quel est la probabilité qu'un appareil provient de  $B$ .
3. Parmi les appareils du stock non défectueux, quel est la probabilité qu'un appareil provient de  $A$ .
4. Vérifier la dépendance des événements "L'appareil provient de  $B$ " et "L'appareil est défectueux".

## Exercice 3

On dispose de deux urnes  $U_1$  et  $U_2$ .

L'urne  $U_1$  contient deux boules blanches et trois boules noires.

L'urne  $U_2$  contient quatre boules blanches et trois boules noires.

On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :

- On choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.
- On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
- Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne  $U_1$ .
- Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne  $U_2$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $B_n$  l'événement « la boule tirée au  $n$  ième tirage est blanche » et on pose  $p_n = P(B_n)$ .

1. Calculer  $p_1$ .
2. Prouver que :  $\forall n \in \mathbb{N}, p_{n+1} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}$
3. En déduire, pour tout entier naturel  $n$  non nul, la valeur de  $p_n$ .

## Exercice 4

Un distributeur de jouets distingue trois catégories de jouets :

Catégories T : les jouets traditionnels (tels que poupées, peluches, ...)

Catégories M : les jouets liés à la mode (inspirés d'un livre, d'un film, ...)

Catégories S : les jouets scientifiques vulgarisant une technique récente.

Le distributeur de jouets a fait les estimations suivantes : Un client qui a acheté un jouet traditionnel une année pour Noël choisira, l'année suivante, un jouet de l'une des trois catégories avec une équiprobabilité.

Un client qui a acheté un jouet inspiré par la mode optera l'année suivante pour un jouet de la catégorie T avec la probabilité  $\frac{1}{4}$ , pour un jouet de la catégorie M avec la probabilité  $\frac{1}{4}$  et pour un jouet de la catégorie S avec la

probabilité  $\frac{1}{2}$

Un client qui a acheté un jouet scientifique optera l'année suivante pour un jouet de la catégorie T avec la probabilité  $\frac{1}{4}$ , pour un jouet de la catégorie M avec la probabilité  $\frac{1}{2}$ , et pour un jouet de la catégorie S avec la probabilité  $\frac{1}{4}$ .

Une année, que l'on appellera l'année 0, on remarque que 45 des jouets vendus étaient de la catégorie T, 25 étaient de la catégorie M et 30 étaient de la catégorie S.

On note  $T_n$  l'évènement " le client achète un jouet de la catégorie T pour le noel de l'année  $n$  ",  $M_n$  l'évènement " le client achète un jouet de la catégorie M pour le noel de l'année  $n$  " et  $S_n$  l'évènement " le client achète un jouet de la catégorie S pour le noel de l'année  $n$  ". Enfin on pose  $p_n = P(T_n)$ ,  $q_n = P(M_n)$  et  $r_n = P(S_n)$ .

- 1) Donner les valeurs de  $p_0, q_0$ , et  $r_0$ .
- 2) A l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que

$$p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{4}r_n.$$

- 3) De la même façon exprimer  $q_{n+1}$  et  $r_{n+1}$  en fonction de  $p_n, q_n$  et  $r_n$ .

4) On pose alors  $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$

- a) Exprimer  $X_{n+1}$  en fonction de  $X_n$ , à l'aide de la matrice  $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ .

- b) Montrer que  $A$  est diagonalisable, puis diagonaliser  $A$ .
- c) Calculer  $A^n \forall n \in \mathbb{N}$ .
- d) Dédurre les expressions de  $p_n, q_n$  et  $r_n$ .

**Exercice 5** Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'évènements dans un même espace probabilisé. On considère les évènements suivants :

$A =$  Il y a une infinité d'évènements parmi les  $A_n$  qui sont réalisés.

$B =$  A partir d'un certain rang, tous les  $A_n$  sont réalisés».

$C =$  Il n'y a jamais deux évènements consécutifs réalisés».

- 1) Exprimer  $A, B$  et  $C$  en fonction des évènements  $A_n$ .
- 2) On suppose les  $A_n$  sont mutuellement indépendants on admet que les évènements  $^C A_n$  restent mutuellement indépendants.
  - a) Calculer  $P(A), P(B)$  et  $P(C)$  lorsque  $P(A_n) = \frac{1}{2}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
  - b) Calculer  $P(A), P(B)$  et montrer que  $\frac{5}{6} \leq P(C) \leq \frac{7}{8}$  lorsque  $P(A_n) = \frac{1}{2^{n+1}}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

### Exercice 6

Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'évènements mutuellement indépendants.

On admettra que la suite d'évènements  $(^C A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  reste mutuellement indépendants.

On suppose que pour tout  $k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(A_k) \neq 1$ .

Posons  $B_n = \bigcup_{k=0}^n A_k, B = \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k$  et  $u_n = \mathbb{P}(B_n)$ .

1. Vérifier que la suite  $(u_n)$  converge vers  $\mathbb{P}(B)$ .
2. Démontrer que les séries  $\sum_{n \geq 0} \ln(1 - \mathbb{P}(A_n))$  et  $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n)$  sont de même nature.
3. En déduire que  $\mathbb{P}(B) < 1$  si et seulement si  $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n)$  converge.
4. Soit  $I = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$ . Démontrer que  $\mathbb{P}(I) = 0$  si et seulement si  $\mathbb{P}(B) < 1$ , et que  $\mathbb{P}(I)$  ne peut valoir que 0 ou 1.

### Exercice 7

Une urne contient une boule blanche. On lance une pièce biaisée. On obtient pile avec la probabilité  $p$ . Si on obtient pile, on ajoute à l'urne une boule noire. Si on obtient face, on tire une boule de l'urne. On considère les événements suivants :

$B$  : "On tire la boule blanche" et  $F_n$  : "On obtient face pour la première fois au  $n$  ième lancer".

1. Déterminer les probabilités suivantes :  $P(F_n)$  et  $P(B|F_n)$ .

2. Montrer que  $P(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-p) \times p^{n-1}}{n}$ .

3. On suppose que la pièce est non biaisée. Montrer que  $P(B) = \ln(2)$ .

### Exercice 8

La probabilité d'obtenir pile en lançant une pièce biaisée est  $p$ . Désignons par  $A_n$  l'événement "on a obtenu un nombre pair de fois pile lorsqu'on lance la pièce  $n$  fois" et par  $F$  l'événement "on a obtenu face à la première lancer".

1. Montrer que  $P(A_n) = P(A_n|F) \times P(F) + P(A_n|\bar{F}) \times P(\bar{F})$ .

2. Vérifier que  $P(A_n|F) = P(A_{n-1})$ .

3. Dédurre que  $P(A_n) = (1-2p) \times P(A_{n-1}) + p$ .

4. Calculer  $P(A_n)$ .

5. Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n)$ .

### Exercice 9

On considère deux urnes  $A$  et  $B$  contenant des boules blanches et des boules noires. L'urne  $A$  contient des boules blanches en proportion  $a$  ( $0 < a < 1$ ), l'urne  $B$  contient des boules blanches en proportion  $b$  ( $0 < b < 1$ ). On effectue  $N$  tirages successifs avec remise de la boule dans l'urne d'où elle provient et ceci de la façon suivante :

On commence par choisir l'une des deux urnes (chaque urne a la même probabilité d'être choisie), puis on tire une boule.

— Si elle est blanche, on tire la boule suivante dans la même urne

— Si elle est noire, on tire la boule suivante dans l'autre urne.

On continue suivant la même règle jusqu'au  $N$  ième tirage. Pour  $1 \leq n \leq N$ , on note par  $A_n$  l'événement "obtenir une boule blanche au  $n$  ième tirage",  $p_n = P(A_n)$ ,  $B_n$  l'événement "Le  $n$  ième tirage est effectué dans l'urne  $A$ " et  $q_n = P(B_n)$ .

1. Calculer  $q_1$ ,  $p_1$ ,  $q_2$  et  $p_2$ .

2. Pour  $2 \leq n \leq N$ , comparer les événements  $(A_{n-1}|B_{n-1})$  et  $(B_n|B_{n-1})$ .

3. Déterminer une relation liant  $q_n$  et  $q_{n-1}$ .

4. Dédurre l'expression de  $q_n$  en fonction de  $a$ ,  $b$  et  $n$ .

5. Déterminer l'expression de  $p_n$  en fonction de  $a$ ,  $b$  et  $n$ .

6. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$ .