

Rappel: "Probabilité"

Ω : l'univers des possibles

$\mathcal{P}(\Omega)$:

$\mathcal{G}$: tribu : $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(\Omega)$

vérifie :

- $\Omega \in \mathcal{G}$
- $\forall A \in \mathcal{G}, A^c \in \mathcal{G}$
- $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{G}, \forall A_i \in \mathcal{G}$

I dénombrable $\Leftrightarrow$ I en bijection avec $\mathbb{N}$

$\exists i \in \mathbb{N}; \exists n \in \mathbb{N}; \forall i = \varphi(n)$

$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_{\varphi(n)}$

Exemples 1. $\mathcal{P}(\Omega)$

② $A \subset \Omega; \mathcal{G} = \{\Omega, A, A^c, \emptyset\}$

③ $\Omega = \{1, 2, 3\}$

$\mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

$\mathcal{G} = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

$\rightarrow A_n$: les n premiers faces sortent des faces.

$A_{n+1} \subset A_n$

$\rightarrow P: \mathcal{G} \rightarrow [0, 1]$ vérifiant:

Probabilité

- $P(\Omega) = 1$
- $P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P(A_n)$

avec $A_n \cap A_{n'} = \emptyset, n \neq n'$

- Si $(A_n)_{n \geq 0}$ suite croissante d'événements

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

Effet.

Soit $B_0 = A_0$.

$$B_1 = A_1 \setminus A_0$$

...

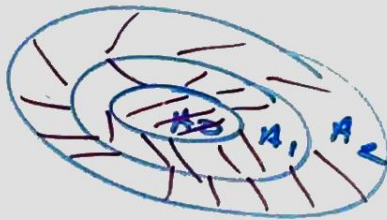
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, B_n = A_n \setminus A_{n-1}$$

$$\forall i \neq j, B_i \cap B_j = \emptyset$$

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$$

$$\bigcup_{k=0}^n B_k = A_n$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) &= P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P(B_n) \quad (\text{car 2 en coup}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n P(B_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{k=0}^n B_k\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \end{aligned}$$



→. $(A_n)_{n \geq 0}$ suite q.c.q.

$$P\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right)$$

car Soit $B_n = \bigcup_{k=0}^n A_k$.

→. $(B_n)_{n \geq 0}$ suite croissante.

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$$

$$\Rightarrow P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right)$$

$$P\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} P(A_k)$$

Remarque:

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite q.c.q. d'événements.

① $B_n = \bigcup_{k=0}^n A_k \rightarrow (B_n)_{n \geq 0} \nearrow$

② $C_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \rightarrow (C_n)_{n \geq 0}$ est $\searrow$
 $= A_n \cup C_{n+1}$

③ $D_n = \bigcap_{k=0}^n A_k \rightarrow (D_n)_{n \geq 0}$ est $\searrow$

④ $H_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \rightarrow (H_n)_{n \geq 0} \nearrow$

→. $P(A) = 1 \Rightarrow P(A \cup B) = 1$
 $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) - P(A \cap B)$

$$P(B) > 0: \quad P_B: \mathcal{G} \longrightarrow [0,1]$$

$$A \mapsto P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

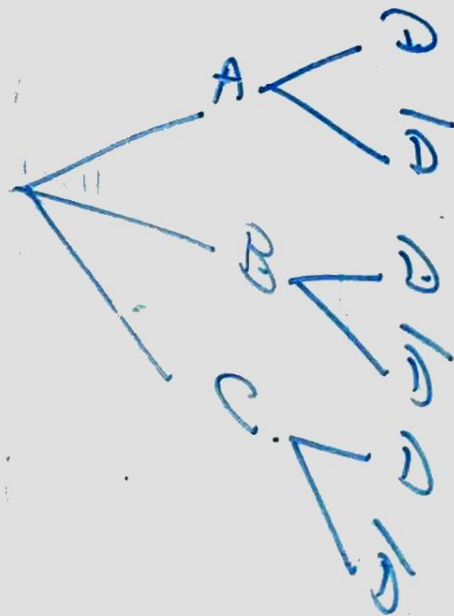
→ si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un syst. complet.

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \Omega \text{ et } k \neq n: A_n \cap A_{n'} = \emptyset$$

$$\forall B \subset \Omega; \quad B = B \cap \Omega = B \cap \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} (B \cap A_n)$$

$$P(B) = \sum_{n=0}^{\infty} P(B \cap A_n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(B) \cdot P(A_n)$$



$$\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$$

$$\begin{cases} i \in I \text{ dénombrables} \\ A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j \end{cases}$$

$\Rightarrow$ la famille $(P(A_i))_{i \in I}$ est sommable et de somme égale 1

$\rightarrow$ A et B sont indépendants

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$\Leftrightarrow P(B) = P(B)$$

$\rightarrow (A_i)_{i \in I}$ sont mutuellement indép

$$\Leftrightarrow \forall \text{ } J \text{ fini } \subset I; P(\cap_{j \in J} A_j) = \prod_{j \in J} P(A_j)$$

Ex (A_1, A_2, A_3) sont mutuellement indép

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$$

$$P(A_1 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_3)$$

$$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2) \cdot P(A_3)$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$$

Exercice 1 "Série 1"

$P(P) = p$ et $P(F) = 1-p$, $0 < p < 1$

B : obtenir pile.

A_n : les n premiers lancers sont des faces.

ona. $A_{n+1} \subset A_n \Rightarrow (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est $\downarrow$

$$\Rightarrow P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n).$$

$$\text{or } \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset \Rightarrow P(\emptyset) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1-p)^n = 0$$

$$\Rightarrow \underline{P(B) = 1}$$

Exercice 2

$$\sum_{n \geq 0} P(A_n) \cdot C.V.$$

$$\text{Pg. } P\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 0$$

$$\text{Soit } B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Alors $(B_n)_{n \geq 0}$ est $\downarrow$.

$$\Rightarrow P\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n).$$

$$\Rightarrow P(D) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k)\right) = 0$$

$$\Rightarrow P(D) = 0. \quad \text{car } \sum_{k=0}^{\infty} P(A_k) < +\infty \text{ C.V.}$$

Exercice 3

1 R.
n-1 B

A_n : le joueur fait son premier 6 lors du $n^{\text{ème}}$ lancer.

B: la boule tirée est rouge.

On a: $(A_n)_{n \geq 1}$ est un système complet

$$\text{Donc } P(B) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B \cap A_n) \\ = \sum_{n=1}^{\infty} P(B) \cdot P(A_n).$$

or B sachant A_n : la boule tirée est rouge sachant q le joueur obtient son premier 6 lors du $n^{\text{ème}}$ lancer.

$$\Rightarrow P(B)_{A_n} = \frac{1}{2}$$

$$P(A_n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \\ = \frac{1}{5} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{5}{6}\right)^n \\ = -\frac{1}{5} \cdot \ln\left(1 - \frac{5}{6}\right) = \frac{\ln 6}{5}$$

Exercice 1 "Serie Proba"

T: de pipe.

$$P(6) = \frac{1}{8} \quad \forall k \leq 5; \quad P(k) = \frac{1}{10}.$$

1) A: obtenir 6.

$$P(A) = P(A \cap T) + P(A \cap \bar{T})$$
$$= P(A) \cdot P(T) + P(A) \cdot P(\bar{T})$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$
$$2) * \quad P(A|T) = \frac{P(A) \cdot P(T)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{8}.$$

* B = obtenir 2.

$$P(\bar{T}) = \frac{P(B) \cdot P(\bar{T})}{P(B)} = \frac{1}{2}.$$

$$= \frac{5}{6}.$$

4) B_n : obtenir n fois le chiffre 6.

$$P_n = P(T) = \frac{P(B_n) \cdot P(T)}{P(B_n)}$$

$$P(B_n) = P(T) \cdot P(B_n) + P(\bar{T}) \cdot P(B_{n-1})$$
$$= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}.$$

$$\Rightarrow P_n = \frac{\frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right) \left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}}$$

$$P_n = \frac{1}{1 + 3 \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Exercice 3

U_1

$\frac{2B}{3N}$

$\frac{4B}{3N}$

U_2

B_n : labouls tirée au n-^{ème} tirage est blanche.

$$P_n = P(B_n)$$

$$\begin{aligned} 1) \quad P_1 &= P(B_1) = P(B_1 \cap U_1) + P(B_1 \cap U_2) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{17}{35} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad P(B_{n+1}) &= P(B_{n+1} \cap B_n) + P(B_{n+1} \cap \overline{B_n}) \\ &= P(B_{n+1}) \cdot P(B_n) + \frac{P(B_{n+1})}{P(B_n)} \cdot P(\overline{B_n}) \\ &= \frac{5}{15} P_n + \frac{4}{15} (1 - P_n) \end{aligned}$$

$$P_{n+1} = \frac{5}{15} P_n + \frac{4}{15}$$

3) on cherche $x \in \mathbb{R}$ tq.

$$x = -\frac{6}{3r}x + \frac{4}{7} \Rightarrow x = \frac{20}{41}.$$

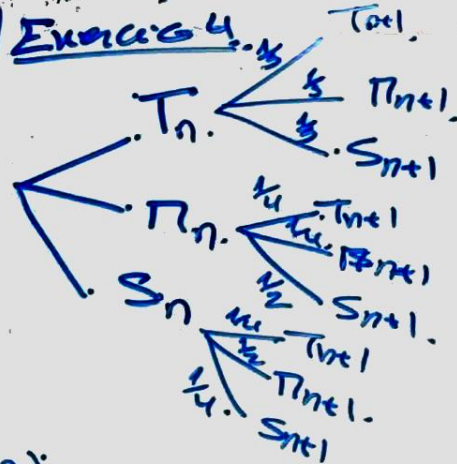
soit $x_n = p_n - x$

$\Rightarrow (x_n)_{n \geq 1}$ suite géométrique de raison $-\frac{6}{3r}$.

$\Rightarrow x_n = x_1 \left(-\frac{6}{3r}\right)^{n-1}, \quad x_1 < 0$

$$p_n = \left(p_1 - \frac{20}{41}\right) \left(-\frac{6}{3r}\right)^{n-1} + \frac{20}{41}.$$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{20}{41}.$



a) $p_n = P(T_n)$; $q_n = P(P_n)$ et $r_n = P(S_n)$

$$p_{n+1} = P(T_{n+1}) = P(T_{n+1} | T_n) \cdot P(T_n) + P(T_{n+1} | P_n) \cdot P(P_n) + P(T_{n+1} | S_n) \cdot P(S_n)$$

$$p_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot p_n + \frac{1}{4} \cdot q_n + \frac{1}{2} \cdot r_n.$$

$$q_{n+1} = \frac{1}{4} p_n + \frac{1}{4} q_n + \frac{1}{2} r_n$$

$$r_{n+1} = \frac{1}{2} p_n + \frac{1}{2} q_n + \frac{1}{2} r_n$$

$$u) X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$$

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} X_n$$

$$X_{n+1} = A X_n$$

$$b) \chi_A(x) = (x-1)(x+\frac{1}{4})(x-\frac{1}{12})$$

χ_A est scindé et à racines simples
 $\Rightarrow A$ est diagonalisable

$$E_1 = \text{vect}(v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$$

$$E_{-\frac{1}{4}} = \text{vect}(v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$$

$$E_{\frac{1}{12}} = \text{vect}(v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$$

$$A = P \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} \end{pmatrix}}_D P^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c) A^n = P D^n P^{-1}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$d) \text{ on a } X_{n+1} = A X_n$$

$$\Rightarrow \text{Par récurrence } X_n = A^n X_0, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$= \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{pmatrix}$$