

Si  $X$  admet un moment d'ordre 2  
 On définit:  $V(X) = E(X - E(X))^2$   
 $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Ecart type

Si  $V(X)$  est finie  
 Alors  $E(X)$  est finie

Si  $X$  et  $Y$  admettent des moments d'ordre 2, on définit  
 $Cov(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$   
 $= E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)$   
 Covariance de  $X, Y$

Si  $X$  admet un moment d'ordre 2, alors  
 $\forall a, b \in \mathbb{R}: V(aX + b) = a^2 V(X)$

Si  $X$  et  $Y$  admettent des moments d'ordre 2 et sont indép, alors  $Cov(X, Y) = 0$

Si  $X$  et  $Y$  admettent des moments d'ordre 2, alors  
 $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X, Y)$

Si de plus  $X$  et  $Y$  sont indép, alors  
 $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$

## variance et covariance des v.a. réelles discrètes

Si  $X_1, \dots, X_n$  admettent des moments d'ordre 2.

Alors

$$V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2 \sum_{i < j} Cov(X_i, X_j)$$

Si de plus les  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  sont 2 à 2 indép  
 alors  $V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i)$

Si  $X(0) \subset \mathbb{N}$   
 $X$  admet une variance (moment d'ordre 2)  
 $G_X$  est deux fois dérivable en 1  
 Dans ce cas:  $V(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - (G_X'(1))^2$

$Cov$  est une app bilinéaire et symétrique

$$V(X) = 1 \Leftrightarrow X \text{ est réduite}$$

Si  $V(X)$  est finie, Alors  
 $Y = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$  est centrée et réduite

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev  
 Si  $X$  admet un moment d'ordre 2  
 Alors  $\forall \varepsilon > 0$   
 $P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$

Loi faible des grands nombres  
 Soit  $(X_n)_{n \geq 0}$  suite de v.a. 2 à 2 indép  
 suivant une m loi  $\rightarrow E(X_n) = m$   
 Si  $\forall n \in \mathbb{N}, X_n$  admet un moment d'ordre 2.  
 On pose  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$   
 Alors  $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$