

Variable aléatoire

Loi d'une variable aléatoire

* Définition

- Une **variable aléatoire** (v.a) discrète définie sur l'espace $(\Omega, \mathcal{T})$ et à valeurs dans un ensemble E fini ou dénombrable. toute application $X : \Omega \rightarrow E$ telle que

$$\forall x \in X(\Omega), X^{-1}(x) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\} \in \mathcal{T} \text{ (est un événement)}$$

L'événement $X^{-1}(x)$ sera noté ($X = x$).

- ($X \leq a$) = $\{\omega \in \Omega \text{ tel que } X(\omega) \leq a\}$.
- Soit $X : \Omega \rightarrow E$ une v.a. On appelle **loi de la v.a** X , l'application $P_X : \mathcal{P}(X(\Omega)) \rightarrow [0, 1]$ définie par :

$$\text{Pour tout } A \subset X(\Omega), P_X(A) = P(X \in A)$$

* Remarque

On pose $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$, alors la famille $(P(X = x_i))_{i \in I}$ est sommable et

$$\sum_{i \in I} P(X = x_i) = 1$$

* Propriétés

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{T})$, alors

- 1) $(X \in \emptyset) = \emptyset$.
 - 2) Pour tout $U \subset E$ ($X \in {}^c U$) = ${}^c (X \in U)$.
 - 3) $(X \in A \cap B) = (X \in A) \cap (X \in B)$ et $(X \in A \cup B) = (X \in A) \cup (X \in B)$.
- En particulier, si $A \cap B = \emptyset$, alors $(X \in A \cap B) = \emptyset$.

* Propriétés

- 4) Pour toute suite $(A_i)_{i \in I}$ de parties de E , on a

$$(X \in \bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} (X \in A_i), \quad (X \in \bigcap_{i \in I} A_i) = \bigcap_{i \in I} (X \in A_i)$$

- 5) Notons, $X(\Omega) = \{x_k, k \in I\}$ ($I \subset \mathbb{N}$), alors la famille d'événements $(X = x_k)_{k \in I}$ forme un système complets d'événements.

* Fonction de Répartition

Soit X une v.a, on appelle **fonction de répartition** de X la fonction $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = P((X \leq x)).$$

* Proposition

Soit F_X la fonction de répartition d'une v.a X . Alors :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq F_X(x) \leq 1$.
2. La fonction F_X est croissante sur $\mathbb{R}$.
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$.

Couple de variable aléatoire

Loi conjointe

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ avec $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$, $Y(\Omega) = \{y_j, j \in J\}$.

• La loi conjointe des deux variables aléatoires X et Y est l'application définie par : $x_i \in X(\Omega)$ et $y_j \in Y(\Omega)$

$$P((X, Y)(x_i, y_j)) = P(X = x_i, Y = y_j) = P((X = x_i) \cap (Y = y_j)).$$

• Les lois des variables aléatoires X et Y , sont appelées les lois marginales du couple (X, Y) .

Théorème

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ avec $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j, j \in J\}$. Alors

1) La famille d'événements $(X = x_i, Y = y_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est un système complet d'événements.

2) Pour $i \in I$ et $j \in J$, on pose $p_{i,j} = P(X = x_i \cap Y = y_j)$, alors la famille $(p_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ est sommable et on a :

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} p_{i,j} = 1.$$

$$3) \forall i \in I, P(X = x_i) = \sum_{j \in J} P(\{X = x_i, Y = y_j\}) = \sum_{j \in J} p_{i,j}$$

$$\forall j \in J, P(Y = y_j) = \sum_{i \in I} P(\{X = x_i, Y = y_j\}) = \sum_{i \in I} p_{i,j}$$

indépendance

Deux variables aléatoires discrètes X et Y sont dites indépendantes si pour tout $x \in X(\Omega)$ et tout $y \in Y(\Omega)$

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y).$$

Proposition

1) Si X et Y deux v.a indépendantes, alors pour toutes fonction f et g on a les v.a $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

2) Soit X et Y deux v.a indépendantes, suivant des lois de Poisson de paramètres λ et μ . Alors la v.a $Z = X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

indépendance mutuelle

Soit $(X_n)_{n \in I}$ une famille de variables aléatoires, où I est fini ou dénombrable. On dit que les variables aléatoires $(X_n)_{n \in I}$ sont mutuellement indépendantes lorsque, pour toute partie finie $J = \{i_1, \dots, i_p\} \subset I$ pour tout $(x_{i_1}, \dots, x_{i_p}) \in X_{i_1}(\Omega) \times \dots \times X_{i_p}(\Omega)$ on a

$$P(X_{i_1} = x_{i_1}, \dots, X_{i_p} = x_{i_p}) = P(X_{i_1} = x_{i_1}) \dots P(X_{i_p} = x_{i_p}).$$

Proposition

Soient $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé, $X_1, \dots, X_n$, des variables aléatoires sur cet espace $(n > 2)$, à valeurs dans des ensembles au plus dénombrables $E_1, \dots, E_n$ respectivement.

Si les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, pour tout $m \in \{1, \dots, n-1\}$ et toutes fonctions f et g variables aléatoires $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

Proposition

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes sur des espaces probabilisés $(\Omega, \mathcal{T}_n, P_n)$ de lois discrètes respectives L_n (c.a.d $\forall n \in \mathbb{N}, X_1, \dots, X_n$, sont mutuellement indépendantes), alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ tel que, chaque X_n soit une variable aléatoire sur cet espace, de loi L_n .

Loi conditionnelle

Soient X et Y deux v.a et $x \in X(\Omega)$.

- On définit la loi conditionnelle de Y sachant ($X = x$) par : $\forall y \in Y(\Omega)$.

$$P(Y = y | X = x) = \begin{cases} \frac{P(Y = y, X = x)}{P(X = x)} & \text{si } P(X = x) > 0 \\ 0 & \text{si } P(X = x) = 0 \end{cases}$$

- On définit la loi conditionnelle de Y sachant ($X \geq x$) par : Pour toute partie $B \subset Y(\Omega)$.

$$P(Y \in B | X \geq x) = \begin{cases} \frac{P(Y \in B, X \geq x)}{P(X \geq x)} & \text{si } P(X \geq x) > 0 \\ 0 & \text{si } P(X \geq x) = 0 \end{cases}$$

- On définit de même les probabilités conditionnelles $P(\cdot | X > x)$, $P(\cdot | X \leq x)$ et $P(\cdot | X < x)$.

Remarque

Soit X et Y deux v.a On pose $X(\Omega) = \{x_k, k \in I\}$.

La connaissance la loi de Y sachant ($X = x_k$) $\forall k \in I$ et de la loi de X détermine la loi de Y par :

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad P(Y = y) = \sum_{k \in I} P(Y = y, X = x_k) =$$

$$\sum_{k \in I} P(Y = y | X = x_k) P(X = x_k).$$

Théorème

- 1) Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Alors,

$$\forall n, k \in \mathbb{N}, \quad P(X > n + k | X > n) = P(X > k).$$

- 2) Si X est une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ avec $P(X = 1) = p \in]0, 1[$ vérifiant la condition d'absence de mémoire :

$$\forall n, k \in \mathbb{N}, \quad P(X > n + k | X > n) = P(X > k),$$

alors X suit une loi géométrique de paramètre p .

Espérance et variance.

On suppose dans cette partie que $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et X est une variable aléatoire discrète réelle à valeurs dans un ensemble E au plus dénombrable $\Leftrightarrow X(\Omega) \subset E$.

Espérance

- Si X est à valeurs réelles positives, l'espérance de X , notée $E(X)$ est l'élément dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ définie par :

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x)$$

Ainsi X admet une espérance finie si et seulement si la famille $(x P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable.

- Si X est une variable aléatoire à valeurs réelles.

On dit que X admet une espérance finie, notée $E(X)$ si la famille $(x P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x).$$

Remarque

1) Si $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$. Alors X admet une espérance finie si et seulement si la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n P(X = x_n)$ est absolument convergente et dans ce cas

$$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n)$$

Propriétés

1) Si les variables X et Y admettent des espérances finies, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la variable $\lambda X + Y$ admet une espérance finie donnée par :

$$E(\lambda X + Y) = \lambda E(X) + E(Y) \text{ (linéarité).}$$

2) Soient a et b deux réels, alors

$$E(aX + b) = aE(X) + b.$$

3) Si $|X| \leq Y$, et Y admet une espérance finie, alors X admet une espérance finie.

4) Si la variable aléatoire X est positive ($\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \geq 0$) et admet une espérance, alors $E(X) \geq 0$.

• Si X et Y sont indépendantes et admettent des espérances alors XY admet une espérance et on :

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

• Si X et Y deux variables sont indépendantes, f et g deux fonctions définies sur $X(\Omega)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et admettent des espérances finies, alors

$$E(f(X)g(Y)) = E(f(X))E(g(Y)).$$

$(f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes).

Théorème de transfert

Soit X une variable aléatoire et f une fonction définie sur $X(\Omega)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) La variable $f(X)$ admet une espérance.
- (ii) La famille $(f(x)P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable.

Dans ce cas :

$$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X = x)$$

Moment

• Soit $r \in \mathbb{N}$.

On dit que la v.a. X admet un moment d'ordre r si X^r admet une espérance finie. Dans ce cas, le moment d'ordre r de X est $E(X^r)$.

• Si la variable X admet un moment d'ordre 2, alors X admet une espérance.

Inégalité de Cauchy-Schwarz

• Soient X et Y deux variables aléatoires réelles. Si X et Y admettent des moments d'ordre 2, alors XY admet une espérance. De plus

$$(E(XY))^2 \leq E(X^2)E(Y^2).$$

• Les variables aléatoires réelles sur un espace probabilisé au plus dénombrable $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ admettant un moment d'ordre 2 constituent un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Variance et écart type

- Soit X une variable aléatoire discrète. Si X admet moment d'ordre 2, on définit la variance X par :

$$V(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - (E(X))^2.$$

- Soit $a, b \in \mathbb{R}$, alors

$$V(aX + b) = a^2 V(X).$$

Son écart type est défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Variable centrée réduite

Soit X une variable aléatoire réelle.

- On dit que X est centrée si $E(X) = 0$.
- On dit que X est réduite si $V(X) = 1$
- Soit X une variable aléatoire réelle discrète admettant un moment d'ordre 2.

On suppose que $\sigma(X) \neq 0$ et on pose

$$Y = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}.$$

alors la variable Y est centrée réduite.

Covariance

- Soient X et Y deux v.a. chacune de moment d'ordre 2, on définit la covariance de X et Y par :

$$Cov(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

- $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$
- $Cov(X, X) = V(X)$.
- Si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, alors $Cov(X, Y) = 0$

Théorème

- 1) • Soient X, Y deux v.a. admettant des variances, alors

$$V(X + Y) = V(X) + 2 Cov(X, Y) + V(Y).$$

- Si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, alors

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y).$$

- 2) • Soient $X_1, \dots, X_n$ des v.a. admettant des variances, alors

$$V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2 \sum_{i < j} Cov(X_i, X_j)$$

- Si les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont deux à deux indépendantes, alors

$$V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i)$$

Remarque

- 1) Si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, alors

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y).$$

- 2) Si les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont deux à deux indépendantes, alors

$$V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i)$$

Série génératrice

La série génératrice de la variable aléatoire X est la série entière $\sum_{n \geq 0} P(X = n)t^n$.

La fonction génératrice de X est

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)t^n, \quad t \in]-R, R[.$$

Théorème

1) La v.a X admet une espérance si et seulement si la fonction génératrice G_X est dérivable en 1. Dans ce cas on a :

$$E(X) = G'_X(1).$$

2) La variable X admet une variance $V(X)$ si et seulement si la fonction génératrice G_X est deux fois dérivable en 1. Dans ce cas on a :

$$V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2.$$

Fonctions génératrices d'une somme

Soit X et Y sont deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Si X et Y sont indépendantes alors

$$G_{X+Y} = G_X \times G_Y.$$

Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire à valeurs positives admettant une espérance, alors

$$\forall a > 0, \quad P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire discrète admettant un moment d'ordre 2, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

Loi faible des grands nombres

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes et suivant une même loi et admettent un moment d'ordre 2. On pose $m = E(X_n)$ leur espérance commune et $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, alors

$$\forall \varepsilon \geq 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

Résultat d'approximation

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires avec $X_n \rightarrow$

$$B(n; p_n).$$

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} np_n = \lambda$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

2.4.2 Loi Bernoulli

Définition 2.6 * Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire qui ne possède que deux issues possibles : le succès (noté souvent 1) et l'échec (noté souvent 0). Ainsi $\Omega = \{0, 1\}$.

* On dit que la variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre p ($p \in]0; 1[$) si $X(\Omega) = \{0, 1\}$, $P(X = 0) = 1 - p$ et $P(X = 1) = p$.
On note $X \hookrightarrow B(p)$.

Exemple 2.6 On jette une pièce de monnaie. On considère que la pièce tombe sur Pile avec une probabilité p et que l'on gagne le jeu dans ce cas. L'expérience est une épreuve de Bernoulli.

2.4.3 Loi binomiale

Définition 2.7

Une loi binomiale est une loi qui prend pour valeur le nombre de succès dans une suite de n épreuves.

On dit que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p (avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0; 1[$) si $X(\Omega) = \{0, \dots, n\}$ et $\forall k \in \{0, \dots, n\}$ $P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$. On note $X \hookrightarrow B(n, p)$.

Exemple 2.7 Une urne contient des boules blanches en proportion p et des boules rouges en proportion $q = 1 - p$. On tire n boules avec remise dans cette urne et on considère X la variable aléatoire désignant le nombre de boules blanches obtenues dans le tirage alors $X(\Omega) = \{0, \dots, n\}$ et $\forall k \in \{0, \dots, n\}$ $P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$.
D'où $X \hookrightarrow B(n, p)$.

Remarque 2.1

La loi Binomiale est utilisée pour modéliser un "sondage avec remise". Elle permet de mesurer le nombre de succès (probabilité de réussite est égale à p) lorsqu'on répète indépendamment une expérience.

2.4.4 Loi géométrique

Définition 2.8 On dit que la variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre p (avec $p \in]0; 1[$) si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$. On note $X \hookrightarrow G(p)$.

Exemple 2.8 On lance successivement un dé équilibré jusqu'à l'obtention d'un six. On pose X le nombre de lancers nécessaires. On a $P(X = k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6}$. D'où $X \hookrightarrow G\left(\frac{1}{6}\right)$.

2.4.5 Loi de Poisson

Définition 2.9 On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre λ (avec $\lambda > 0$) si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.
On note $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

Exercice 2.1 On considère une urne contenant deux boules noires et deux boules blanches.

1) On considère l'expérience E suivante : On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne, on note leurs couleur puis on les remets dans l'urne.

a) Calculer la probabilité que les deux boules soit de même couleur.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on répète n fois l'expérience E et on note X la variable aléatoire égale au nombre de fois où on a obtenu deux boules de même couleur lors de ces n tirages.

b) Donner la loi de X .

c) Quelle est la probabilité qu'on ait obtenu au moins une fois deux boules de même couleur.

2) On considère une deuxième expérience F : On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne, on note leurs couleur. Si les deux boules sont de même couleur, on les enlève de l'urne. Si elle sont de couleurs différentes on les remets dans l'urne et on refait l'expérience jusqu'à l'urne soit vide.

On note Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour que l'urne soit vide.

On considère l'évènement A : au premier tirage les deux boules tirées sont de même couleur et on pose $a = P(A)$.

a) Calculer a .

b) Calculer $P(Y = 1)$, $P(Y = 2)$ et $P(Y = 3)$.

c) Montrer que pour tout $n \geq 2$, $P(Y = n) = a(1 - a)^{n-2}$.

d) On pose $Z = Y - 1$. Montrer que Z suit une loi géométrique.

Lois discrètes usuelles

	$X(\Omega)$	Loi	Espérance	Variance	Fonction génératrice
Loi uniforme $X \mapsto U(n)$ La probabilité dans un tirage d'un objet parmi n numérotés de 1 à n est constante	$X(\Omega) = \{1, \dots, n\}$	$P(X = k) = \frac{1}{n}$	$E(X) = \frac{n+1}{2}$	$V(X) = \frac{n^2-1}{12}$	$G_X(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n t^k$
Loi de Bernoulli $X \mapsto B(p)$ Expérience aléatoire ayant deux issues possibles la probabilité de succès est p	$X(\Omega) = \{0, 1\}$	$P(X = 1) = p$ $P(X = 0) = 1 - p$	$E(X) = p$	$V(X) = p(1 - p)$	$G_X(t) = (1 - p) + pt, \forall t \in \mathbb{R}$
Loi de Binomiale $X \mapsto B(n, p)$ Le nombre de succès dans une suite de n épreuves, (la probabilité de succès est p).	$X(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$	$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$	$E(X) = np$	$V(X) = np(1 - p)$	$G_X(t) = (1 - p + pt)^n, \forall t \in \mathbb{R}$
Loi géométrique $X \mapsto G(p)$ Nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir le 1er succès avec une probabilité, p .	$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$	$P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$	$E(X) = \frac{1}{p}$	$V(X) = \frac{1-p}{p^2}$	$G_X(t) = \frac{pt}{1 - (1-p)t}, \forall t \in]-\frac{1}{1-p}, \frac{1}{1-p}[$
Loi Poisson $X \mapsto P(\lambda)$	$X(\Omega) = \mathbb{N}$	$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	$E(X) = \lambda$	$V(X) = \lambda$	$G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}, \forall t \in \mathbb{R}$