

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. On rappelle que $\mathcal{P}$ est infini.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, si $q_1, q_2, \dots, q_n$ sont des nombres premiers distincts et $a \in \mathbb{N}^*$, on a l'équivalence suivant

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \ q_i \text{ divise } a \iff \prod_{i=1}^n q_i \text{ divise } a.$$

2) Pour tout $a \in \mathbb{N}^*$ tel que $a \geq 2$, il existe $p \in \mathcal{P}$ tel que p divise a .

Partie I :

Soit ξ la fonction définie par $\xi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$, $\forall x > 1$

1. Soit x un réel tel que $x > 1$. Montrer qu'on définit la loi de probabilité d'une variable aléatoire X à valeur dans $\mathbb{N}^*$ en posant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X = n) = \frac{1}{\xi(x)n^x}$$

On dira qu'une telle variable aléatoire suit la loi de probabilité Zéta de paramètre x .

Dans la suite, on considère X une variable aléatoire qui suit la loi Zéta de paramètre $x > 1$.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur x pour que X admette une espérance finie. Puis exprimer cette espérance à l'aide de ξ .

3. Plus généralement, pour $k \in \mathbb{N}$, donner une condition nécessaire et suffisante portant sur x pour que X^k admette une espérance finie, Puis exprimer $E(X^k)$ à l'aide de ξ .

4. Soit $a \in \mathbb{N}^*$, montrer que $P(X \in a\mathbb{N}^*) = \frac{1}{a^x}$.

Partie II :

Soit $(q_1, \dots, q_n) \in \mathcal{P}^n$ un n -uplet de nombres premiers distincts.

1. Montrer que les événements $(X \in q_1\mathbb{N}^*), \dots, (X \in q_n\mathbb{N}^*)$ sont mutuellement indépendants.

Cela entraîne et on ne demande pas de le démontrer que leurs complémentaires sont mutuellement indépendants.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'évènement $B_n = \bigcap_{k=1}^n (X \notin q_k\mathbb{N}^*)$.

2. a) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n) = P(X = 1)$.

b) Dédurre que

$$\frac{1}{\xi(x)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{q_k^x}\right).$$

3. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi Zéta de paramètre $x > 1$.

Soit l'évènement A "Aucun nombre premier ne divise X et Y simulta-

nément".

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note C_n l'évènement

$$C_n = \bigcap_{k=1}^n (X \notin q_k \mathbb{N}^* \cup (Y \notin q_k \mathbb{N}^*))$$

Exprimer A à l'aide des évènements C_n , puis déduire que $P(A) = \frac{1}{\xi(2x)}$