

Problème 2 Variable aléatoire

Partie I. Suites et intégrales.

1. Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on pose

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} e^{-xt} dt$$

2. Montrer que f est définie et continue sur $[0, +\infty[$ et de classe C^2 sur $]0, +\infty[$.

3. Déterminer les limites de f et f' en $+\infty$.

4. Exprimer f'' sur $]0, +\infty[$ à l'aide de fonctions usuelles et en déduire que

$$\forall x > 0, f'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$$

5. Montrer

$$\forall x > 0, f(x) = x \ln(x) - \frac{1}{2} x \ln(x^2 + 1) - \arctan(x) + \frac{\pi}{2} \text{ et } f(0) = \frac{\pi}{2}$$

6. Montrer

$$\forall s \in \mathbb{R}, |s| = \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(st)}{t^2} dt$$

7. Etude d'une suite d'intégrales

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1 - (\cos(t))^n}{t^2} dt$$

- a) Justifier l'existence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et préciser la monotonie de la sous-suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$.

- b) Montrer que $u_1 = u_2 = \frac{\pi}{2}$.

8. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}} v_n \text{ avec } v_n = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \left(\cos\left(\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)\right)^n}{u\sqrt{u}} du$$

9. Montrer que

$$\forall (n, u) \in \mathbb{N}^* \times]0, 1], \left| 1 - \left(\cos\left(\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)\right)^n \right| \leq u$$

10. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite finie ℓ vérifiant

$$\ell = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-u}}{u\sqrt{u}} du$$

11. On admet la relation

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du = \sqrt{\pi}.$$

Conclure que

$$u_n \sim \sqrt{\frac{\pi n}{2}}.$$

Partie II . Autour du pile ou face.

Dans cette partie, on considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, à valeurs dans $\{-1, 1\}$ et telles que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

L'espérance d'une variable aléatoire réelle finie Z est notée $E(Z)$ et sa variance $V(Z)$.

1. a) Déterminer l'espérance et la variance de S_n .
 b) Soit S et T deux variables aléatoires réelles finies indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que T et $-T$ ont même loi.
 Montrer que $E(\cos(S+T)) = E(\cos(S))E(\cos(T))$.
 c) On considère la fonction φ_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\varphi_n(t) = E(\cos(S_n t))$ pour tout réel t . Montrer que $\varphi_n(t) = (\cos(t))^n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel t .
 d) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, que $E(|S_n|) = \frac{2}{\pi} u_n$.
 (Ind : on utilisera l'expression intégrale de la valeur absolue obtenue à la question I.6).
2. On se propose de démontrer que la suite $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers 0, c'est-à-dire qu'il existe un événement négligeable $Z \in \mathcal{A}$ tel que

$$\forall \omega \in \Omega \setminus Z, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = 0$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$U_n = \left(\frac{S_n}{n}\right)^4 \quad \text{et} \quad Z_n = \left\{ \omega \in \Omega, \exists k \geq n, U_k(\omega) \geq \frac{1}{\sqrt{k}} \right\}$$

- a)i) Calculer $E(S_n^2)$
 ii) Montrer que $E(S_n^4) = 3n^2 - 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
 b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(U_n \geq \frac{1}{\sqrt{n}}) \leq \frac{3}{n^{\frac{3}{2}}}$.
 c) Montrer que $Z_n \in \mathcal{A}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $\lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n) = 0$
 e) En considérant $Z = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Z_n$, montrer que $\left(\frac{S_n}{n}\right)$ converge presque sûrement vers 0.