

Problème 3 Moments d'une variable aléatoire

Partie I .

Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \tau, \mathbb{P})$.

On suppose que $X(\Omega) = \{x_k, k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}^{+*}$.

Soit $p \in \mathbb{N}$, on rappelle que X admet un moment d'ordre p si la variable aléatoire X^p admet une espérance finie. On note alors $m_p(X)$, appelé *moment d'ordre p de X* , l'espérance de X^p .

On remarque que $m_0(X) = 1$.

1. a) Justifier que $\forall k \in \{1, \dots, n\}, 0 \leq X^k \leq 1 + X^n$.
 b) En déduire que, si X admet un moment d'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$), alors X admet des moments d'ordre k pour tous $k \in \{1, \dots, n-1\}$

Fonction génératrice des moments

On suppose que, pour tout entier naturel non nul n , X admet un moment d'ordre n et que la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{m_n(X)t^n}{n!}$ admet un rayon de convergence $R_X > 0$.

Pour tout $t \in]-R_X, R_X[$, on note $M_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{m_n(X)t^n}{n!}$. La fonction M_X s'appelle la *fonction génératrice des moments* de la variable aléatoire X .

2. Justifier que la connaissance de la fonction M_X permet de déterminer de manière unique la suite $(m_n(X))_{n \in \mathbb{N}^*}$.
3. a) Montrer que pour $t \in]-R_X, R_X[$, la famille $(\frac{t^n}{n!} x_k^n P(X = x_k))_{(n,k) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable.
 b) Déduire que, pour tout $t \in]-R_X, R_X[$, la variable aléatoire e^{tX} admet une espérance et que $M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX})$.
4. Montrer réciproquement que, s'il existe un réel $R > 0$ tel que, pour tout $t \in]-R, R[$, la variable aléatoire e^{tX} admet une espérance, alors l'ensemble de définition de la fonction génératrice des moments de X contient $] -R, R[$ et pour tout $t \in]-R, R[$, $M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX})$.
5. On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires réelles discrètes indépendantes à valeurs strictement positives admettant des moments de tous ordres. On note R_X (respectivement R_Y) le rayon de convergence (supposé strictement positif) associé à la fonction M_X (respectivement M_Y). Montrer que la variable aléatoire $X + Y$ admet des moments de tous ordres et que

$$\forall |t| < \min(R_X, R_Y), \quad M_{X+Y}(t) = M_X(t) \times M_Y(t).$$

Exemple 1

λ est un nombre réel fixé.

- 1) On suppose que Z est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suivant la loi de Poisson de paramètre λ . Montrer que Z admet des moments de tous ordres.
- 2) Calculer la fonction génératrice des moments de Z . En déduire les valeurs de $m_1(Z)$ et $m_2(Z)$.

Exemple 2

Soit n un entier naturel non nul. Pour $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, X_i est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suivant une loi de Bernoulli de paramètre λ/n . On suppose que $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes et on pose

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

- 1) Calculer la fonction génératrice des moments de la variable aléatoire S_n .
- 2) Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_{S_n}(t)$.

Exemple 3

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, U_n est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suivant la loi uniforme sur $\forall k \in \{1, \dots, n\}$. On pose

$$Y_n = \frac{1}{n} U_n.$$

- 1) Calculer la fonction génératrice des moments de la variable aléatoire Y_n .
- 2) Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_{Y_n}(t)$.

Partie II Cas des variables aléatoires discrètes finies

Soit X une variable aléatoire discrète prenant un nombre fini de valeurs $x_1, \dots, x_r$ avec les probabilités respectives $p_1, \dots, p_r$, où $r \in \mathbb{N}^*$. Dans cette partie, on définit la fonction φ_X sur $\mathbb{R}^*$ par,

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad \varphi_X(t) = \frac{1}{t} \ln(M_X(t))$$

1. Montrer que M_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et que pour tout entier naturel k , $M_X^{(k)}(0) = \mathbb{E}(X^k)$.
2. (a) Montrer que φ_X est bien définie sur $\mathbb{R}^*$ et prolongeable par continuité en 0. On pose $\varphi_X(0) = \mathbb{E}(X)$ et on note encore φ_X la fonction ainsi prolongée.
- (b) Démontrer que φ_X est dérivable en 0 et calculer $\varphi_X'(0)$ en fonction de la variance $V(X)$ de X .
- (c) i. Montrer que pour tout $u \leq 0$, $e^u \leq 1 + u + \frac{1}{2}u^2$.
- ii. Montrer que si X ne prend que des valeurs négatives ou nulles, alors, pour tout $t \geq 0$,

$$\varphi_X(t) \leq \mathbb{E}(X) + \frac{t}{2} \mathbb{E}(X^2).$$

(Ind : utiliser $\ln(1+x) \leq x$, $\forall x > -1$)

- (d) i. Pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq r$, on note f_i la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $t \mapsto e^{tx_i}$ et Φ l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ tel que $\Phi(f) = f'$.
Montrer que pour tout $1 \leq i \leq r$, f_i est un vecteur propre de Φ puis déduire que la famille $(f_1, \dots, f_r)$ est libre.
 - ii. En déduire que deux variables discrètes finies X et Y (avec $X(\Omega) = Y(\Omega)$) ont la même loi si, et seulement si, les fonctions φ_X et φ_Y sont égales.
 - (e) Montrer que si $(X_n)_{n \geq 2}$ sont des variables discrètes finies mutuellement indépendantes, alors,
- $$\varphi_{X_1+X_2+\dots+X_n} = \sum_{i=1}^n \varphi_{X_i}.$$
- (f) En déduire M_X , lorsque X suit une loi binomiale de paramètre s et p , s est un entier naturel non nul et $0 \leq p \leq 1$.
 - (g) On dit qu'une variable aléatoire réelle X est symétrique si X et $-X$ ont la même loi. Montrer que φ_X est impaire si, et seulement si, X est une variable aléatoire réelle symétrique.
 3. On considère une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires discrètes finies mutuellement indépendantes sur (Ω, τ, P) , qui suivent la même loi que X . On note μ l'espérance de X et σ son écart-type que l'on suppose strictement positif.

On pose, pour tout entier naturel non nul, $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ et $S_n^* = \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}}$

- (a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n et tout réel non nul t ,

$$\varphi_{S_n^*}(t) = \frac{-m\sqrt{n}}{\sigma} + \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \varphi_X\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right).$$

- (b) En déduire que $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{S_n^*}(t) = \frac{t}{2}$.

Partie III

Cas des variables aléatoires discrètes réelles infinies

Soit X une variable aléatoire discrète réelle infinie, notons I_X l'ensemble des réels t pour lesquels M_X existe.

1. (a) Montrer que, pour tous réels a, b, c tels que $a < b < c$ et tout réel x , $e^{bx} \leq e^{ax} + e^{cx}$.
(b) En déduire que I_X est un intervalle contenant 0.
2. Soit Y une variable aléatoire discrète réelle qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer la fonction génératrice des moments M_Y de Y .
3. On suppose que la fonction M_X est définie sur un intervalle de la forme $] -a, a[$ ($a > 0$). Notons $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une énumération des valeurs de X .
Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in] -a, a[$, $u_n(t) = P(X = x_n)e^{tx_n}$. Soit $\alpha > 0$, tel que $]-\alpha, \alpha] \subset] -a, a[$ et soit $\rho \in]\alpha, a[$.
 - (a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, tout $t \in] -\alpha, \alpha[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n^{(k)}(t)| \leq P(X = x_n)|x_n|^k e^{\rho|x_n|}$, où $u_n^{(k)}$ désigne la dérivée k -ème de la fonction u_n .
 - (b) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $M_k > 0$, pour tout $t \in] -\alpha, \alpha[$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n^{(k)}(t)| \leq M_k P(X = x_n) e^{\rho|x_n|}.$$

- (c) En déduire que M_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -a, a[$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X^k) = M_X^{(k)}(0)$.
4. En déduire l'espérance et la variance d'une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.