

Problème Révision Variable aléatoire

Soit n un entier strictement positif. On identifie $\mathbb{R}^n$ à l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des vecteurs colonnes à n coordonnées réelles. Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on note :

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i)^2}$$

La sphère unité de $\mathbb{R}^n$ est notée $S^n = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1\}$. On identifie une matrice carrée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé et on note $\sigma(M)$ l'ensemble de ses valeurs propres réelles.

A. Norme d'opérateur d'une matrice

Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Justifier que S^n est un compact de $\mathbb{R}^n$ et en déduire l'existence de la quantité :

$$\|M\|_{op} = \max\{\|Mx\|; x \in S^n\}.$$

2. Montrer que l'application qui à $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe $\|M\|_{op}$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer en outre que pour tous x et y dans $\mathbb{R}^n$, on a l'inégalité :

$$\|Mx - My\| \leq \|M\|_{op} \cdot \|x - y\|.$$

3. Si M est symétrique, établir l'égalité $\|M\|_{op} = \max\{|\lambda|; \lambda \in \sigma(M)\}$. On pourra commencer par le cas où M est une matrice diagonale.
4. a) Déterminer les valeurs propres et les sous espaces propres de la matrice J_n dont tous les coefficients sont des 1, en précisant la dimension des espaces propres.
b) En déduire la valeur de $\|J_n\|_{op}$.

Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

5. a) Vérifier que la matrice ${}^tMM$ est une matrice symétrique et que ses valeurs propres sont positives.
b) Démontrer l'inégalité $\|M\|_{op} \geq \max\{|m_{i,j}|; 1 \leq i, j \leq n\}$.
6. Établir que :

$$\|M\|_{op} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (m_{i,j})^2}$$

et donner une condition nécessaire et suffisante sur le rang de M pour que cette inégalité soit égale.

On note Σ_n l'ensemble des matrices $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $|m_{i,j}| \leq 1$ pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

7. Montrer que pour tout $M \in \Sigma_n$, $\|M\|_{op} \leq n$. Caractériser et dénombrer les matrices M de Σ_n pour lesquelles $\|M\|_{op} = n$.

B. Variables aléatoires sous-gaussiennes

Dans toute la suite du problème, toutes les variables aléatoires considérées sont réelles et discrètes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soit $\alpha > 0$. On dit que la variable aléatoire X est α -sous-gaussienne si : $\forall t \in \mathbb{R}, E(\exp(tX))$ existe et finie et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad E(\exp(tX)) \leq \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right).$$

1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\text{ch}(t) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$.
2. Soit $t \in \mathbb{R}$. Démontrer que si $x \in [-1, 1]$, on a l'égalité suivante :

$$e^{tx} \leq \frac{1+x}{2} e^t + \frac{1-x}{2} e^{-t}.$$

3. a) Soit X une variable aléatoire réelle bornée par 1 et centrée. Montrer que X est 1-sous-gaussienne.
b) En déduire que si X une variable aléatoire réelle bornée par $\alpha > 0$ et centrée. Montrer que X est α -sous-gaussienne. (On notera $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$)
4. a) Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et α -sous-gaussiennes, et $\mu_1, \dots, \mu_n$ des nombres réels tels que $\sum_{i=1}^n (\mu_i)^2 = 1$.

Montrer que la variable aléatoire $\sum_{i=1}^n \mu_i X_i$ est α -sous-gaussienne.

- b) Dédurre que si X est α -sous-gaussienne, alors $-X$ est α -sous-gaussienne.
5. Soit X une variable aléatoire α -sous-gaussienne et $\lambda > 0$. Montrer que pour tout $t > 0$:

$$P(X \geq \lambda) \leq \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda\right).$$

- b) En déduire que $P(X \geq \lambda) \leq \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\alpha^2}\right)$ puis que

$$P(|X| \geq \lambda) \leq 2 \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\alpha^2}\right).$$

6. a) Soit X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n kP(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - nP(X > n)$

En déduire que X est d'espérance finie si et seulement si la série de terme général $P(X \geq k)$ converge et que $E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k)$.

- b) Soit X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, montrer que si X est d'espérance finie, alors la série de terme général $P(X \geq k)$ converge et que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k) \leq E(X) \leq 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k)$$

(Ind : Utiliser que $[X] \leq X \leq [X] + 1$ avec $[X]$ est la partie entière de X .)

7. a) Soit X une variable aléatoire α -sous-gaussienne et $\beta > 0$. Montrer que pour tout entier $k > 0$:

$$P\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geq k\right) \leq \frac{2}{k^\eta}$$

où $\eta = \frac{1}{\alpha^2 \beta^2}$.

b) Dédurre que si $\alpha\beta < 1$, alors $E(\exp(\frac{\beta^2 X^2}{2}))$ existe et finie et $E(\exp(\frac{\beta^2 X^2}{2})) \leq 1 + 2\zeta(\eta)$, avec $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$, $x > 1$.

c) En admettant que $1 + 2\zeta(2) \leq 5$, montrer que $E(\exp(\frac{X^2}{4\alpha^2})) \leq 5$.

C. Norme d'une matrice aléatoire

On fixe un nombre réel $\alpha > 0$ et on pose $\gamma = \frac{1}{4\alpha^2}$.

Soit n un entier naturel non nul. On définit une famille de variables aléatoires réelles $M_{i,j}$ indexées par $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, mutuellement indépendantes et α -sous-gaussiennes. On note M la matrice aléatoire $(M_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$. Si $x \in S^n$, on note $y = Mx$ qui est ainsi un vecteur aléatoire dont les composantes $y_1, \dots, y_n$ sont des variables aléatoires réelles.

1. a) Vérifier que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la variable aléatoire y_i est α -sous-gaussienne.
- b) En déduire que $E(\exp(\gamma \|y\|^2)) \leq 5^n$ et que pour tout réel $r > 0$:

$$P(\|y\| \geq r\sqrt{n}) \leq (5e^{-\gamma r^2})^n.$$

2. On admet qu'il existe Λ_n une partie finie de S^n de cardinal majoré par 5^n vérifiant

$$S^n \subset \bigcup_{a \in \Lambda_n} B_f(a, \frac{1}{2})$$

.

Pour tout réel $r > 0$, montrer que $\|M\|_{op} \geq 2r\sqrt{n}$ implique l'existence d'un $a \in \Lambda_n$ tel que $\|Ma\| \geq r\sqrt{n}$.

En déduire que :

$$P(\|M\|_{op} \geq 2r\sqrt{n}) \leq (25e^{-\gamma r^2})^n.$$