Examen Analyse
Durée 3 h

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté et au soin de la présentation.

Problème

Partie I (Autour de la fonction Gamma d'Euler).

Soit $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de Γ.
2. Montrer que $\forall x \in \mathcal{D},\ \Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$.
3. (a) Montrer que $\forall x \in \mathcal{D},\ \forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \Gamma(x+n) = \Gamma(x)\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(x+k)$.
   (b) Déduire la valeur de $\Gamma(n)$, pour $n \in \mathbb{N}^\star$.
4. Montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ et donner sa valeur que sachant que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.
5. Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}$ et exprimer, pour $k \in \mathbb{N}^\star$, $\Gamma^{(k)}$ sous forme intégrale.
6. (a) Montrer que Γ' s'annule en un unique réel α vérifiant $\alpha \in]1,\ 2[$.
   (b) En déduire les variations de Γ sur $\mathcal{D}$.
7. a) Montrer que $\Gamma(x) \sim_{0^+} \frac{1}{x}$ et que $\Gamma'(x) \sim_{0^+} -\frac{1}{x^2}$.
   b) Montrer que $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} \Gamma(x) = +\infty$.
8. Donner l'allure de la courbe représentative de Γ.

Partie II (Une transformé de Fourier)

$\forall x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{-\frac{3}{4}}\, e^{itx} dt$ où i est le nombre complexe vérifiant $i^2 = -1$.

1. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer, pour $k \in \mathbb{N}^\star$, $F^{(k)}$ sous forme intégrale.
2. (a) Montrer que $\forall x \in]-1, 1[,\ F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n \frac{(ix)^n}{n!}$ avec $c_n = \Gamma(n + \frac{1}{4})$.

(b) Déterminer le rayon R de convergence de la série entèiere $\sum_{n\geq 0} c_n \frac{(ix)^n}{n!}$.

3. (a) Montrer que F est une solution de l'équation différentielle suivante :

$$(E): \quad y' + \frac{1}{4(x+i)}\, y = 0$$

(b) Déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \Gamma(\frac{1}{4})(1+x^2)^{-\frac{1}{8}}\ e^{\frac{i}{4}\arctan(x)}$

Partie III (Autour de la loi de Poisson)

On rappelle qu'une variable aléatoire X, à valeurs dans $\mathbb{N}$, suit la loi de poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$ si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X=n) = \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$, on rappelle aussi la fonction génératrice G_X de la variable aléatoire X est défine par

$$G_X(t) = E(t^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)\ t^k.$$

On considère dans la suite la fonction f défine sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

1. a) Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.
   Déterminer la fonction génératrice G_X en précisant son domaine de définition.
   b) Calculer l'epérance $E(X)$, la variance $V(X)$ de X aprés avoir justifier leurs existances.
2. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois de poissons de paramètres respectif $\lambda > 0$ et $\mu > 0$.
   Montrer que $X+Y$ suit la loi de poisson paramètre $\lambda + \mu$.

   Dans la suite on considère $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi de poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

3. a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.
   Montrer que S_n suit une loi de poisson de paramètre $n\lambda$.
   b) Déduire que la variable aléatoire $T_n = \frac{S_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}$ est centrée réduite.
4. a) Soit $c > 0$, montrer que $P(|\ T_n \ |\geq c) \leq \frac{1}{c^2}$.
   b) Déduire que $\forall \varepsilon > 0$, il existe un réel $c_1 > 0$ vérifiant $\forall\, c > c_1$ on a $P(|\ T_n\ |\geq c) \leq \varepsilon$.
5. Dans la suite, on fixe deux réels a et b tels que $a < b$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a + \sqrt{n\lambda} > 0$, on pose

$$I_n = \{k \in \mathbb{N} /\ \ n\lambda + a\sqrt{n\lambda} \leq k \leq n\lambda + b\sqrt{n\lambda}\}.$$

On admet que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \sum_{k\in I_n} \frac{(n\lambda)^k}{k!}e^{-n\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b f(t)dt.$

6. a) Montrer que $P(a \leq T_n \leq b) = \sum_{k \in I_n} P(S_n = k)$.

   b) Déduire $\lim_{n \longrightarrow +\infty} P(a \leq T_n \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b f(t)dt$.

7. Montrer que pour $\varepsilon > 0$, il existe un réel $c_2 > 0$ vérifiant $\forall\ c > c_2$, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_c^{+\infty} f(t)dt \leq \varepsilon$.

8. Soit $\varepsilon > 0$ et $c \geq max(c_1, c_2)$.

   Montrer que $\left|P(T_n \geq a) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^{+\infty} f(t)dt\right| \leq \left|P(a \leq T_n \leq c) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^c f(t)dt\right| +$ $P(T_n > c) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_c^{+\infty} f(t)dt$.

9. Déduire que $\lim_{n \longrightarrow +\infty} P(T_n \geq a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^{+\infty} f(t)dt$.

10. a) Justifier que $P(T_n = a) \leq P(a \leq T_n \leq a + \varepsilon)$, pour tout $\varepsilon > 0$.

    b) Déduire que $\lim_{n \longrightarrow +\infty} P(T_n = a) = 0$, puis que $\lim_{n \longrightarrow +\infty} P(T_n \geq a) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} P(T_n > a)$.

11. Soit $A_n = \sum_{k=0}^{E(n\lambda)} \frac{(n\lambda)^k}{k!}$ où $E(.)$ désigne la fonction partie entière.

    a) Montrer que $e^{-n\lambda} A_n = P(T_n \leq 0)$.

    b) Déduire que $A_n \sim \frac{1}{2} e^{n\lambda}$.

12. On suppose dans cette question $0 < \lambda < 1$ et on considère la suite de fonctions suivante :

$$g_n(t) = \begin{cases} (1 - \frac{t}{n\lambda})^n e^t & \text{si } 0 \leq t < n\lambda \\ 0 & \text{si } t \geq n\lambda \end{cases}$$

    a) Montrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction $g : t \longmapsto e^{t(1-\frac{1}{\lambda})}$.

    b) Montrer que $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^{n\lambda} (1 - \frac{t}{n\lambda})^n e^t\ dt = \int_0^{+\infty} e^{t(1-\frac{1}{\lambda})}\ dt$.
    (On rappelle que $\ln(1 + x) \leq x$, $\forall x > -1$).

    c) Déduire que $\lim_{n \longrightarrow +\infty} (n\lambda)^{-n} \int_0^{n\lambda} (n\lambda - t)^n\ e^t\ dt = \frac{\lambda}{1 - \lambda}$.

13. En utilisant la formule de Taylor avec reste intégrale, montrer pour $n \in \mathbb{N}^*$ que

$$e^{n\lambda} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n\lambda)^k}{k!} + \int_0^{n\lambda} \frac{(n\lambda - t)^n}{n!}\ e^t\ dt.$$

14. Soit $0 < \lambda < 1$, montrer que $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n} P(S_n = k) = 1$.