

Partie I - Suites et intégrales

I.A - Étude d'une intégrale à paramètres

I.A - 1) Soit $\Phi : [0, +\infty[\times]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de sorte que pour tout réel $x \geq 0$, $f(x) = \int_0^{+\infty} \Phi(x, t) dt$.
 $(x, t) \mapsto \frac{1 - \cos t}{t^2} e^{-xt}$

- Pour chaque réel $x \in [0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto \Phi(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$;
- Pour chaque réel $t \in]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \Phi(x, t)$ est continue sur $[0, +\infty[$;
- Pour tout $(x, t) \in [0, +\infty[\times]0, +\infty[$, $|\Phi(x, t)| \leq \frac{1 - \cos t}{t^2} = \varphi_0(t)$. De plus, la fonction φ_0 est continue par morceaux et positive sur $]0, +\infty[$, prolongeable par continuité en 0 car $\frac{1 - \cos t}{t^2} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2}$, et dominée par $\frac{1}{t^2}$ en $+\infty$. La fonction φ_0 est donc intégrable sur $]0, +\infty[$.

D'après le théorème (d'existence et) de continuité des intégrales à paramètres,

f est définie et continue sur $[0, +\infty[$.

Soit $a > 0$. Φ admet sur $[a, +\infty[\times]0, +\infty[$ des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 par rapport à sa première variable x et pour tout $(x, t) \in [a, +\infty[\times]0, +\infty[$.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t) = -\frac{1 - \cos t}{t} e^{-xt} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x, t) = (1 - \cos t) e^{-xt}.$$

- Pour $k \in \{1, 2\}$ et $x \in [a, +\infty[$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^k \Phi}{\partial x^k}(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$;
- Pour $k \in \{1, 2\}$ et $t \in]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial^k \Phi}{\partial x^k}(x, t)$ est continue sur $[a, +\infty[$;

$$\left| \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq (1 - \cos t) e^{-at} = \varphi_2(t).$$

De plus, les fonctions φ_1 et φ_2 sont continues par morceaux et positives sur $]0, +\infty[$, prolongeable par continuité en 0 (par 0), et négligeables devant $\frac{1}{t^2}$ en $+\infty$. Les fonctions φ_1 et φ_2 sont donc intégrables sur $]0, +\infty[$.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres (théorème de LEIBNIZ), f est de classe C^2 sur $[a, +\infty[$ et ses dérivées successives s'obtiennent par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout $a > 0$,

f est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$, $f'(x) = - \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} e^{-xt} dt$ et $f''(x) = \int_0^{+\infty} (1 - \cos t) e^{-xt} dt$.

I.A - 2) La fonction $u : t \mapsto \frac{1 - \cos t}{t^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et admet des limites réelles en 0 et $+\infty$ (à savoir $\frac{1}{2}$ et 0). On en déduit que cette fonction est bornée sur $]0, +\infty[$. Soit M un majorant de cette fonction sur $]0, +\infty[$. Pour $x > 0$,

$$|f(x)| = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} e^{-xt} dt \leq M \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{M}{x}.$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{M}{x} = 0$, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. De même, La fonction $u : t \mapsto \frac{1 - \cos t}{t^2}$ est bornée sur $]0, +\infty[$ et par un travail analogue, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

Autrement.

• $\forall \varepsilon > 0$; $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} e^{-xt} = 0$ 1

• $\left| \frac{1 - \cos t}{t^2} e^{-xt} \right| \leq \frac{1 - \cos t}{t^2}$ qui est intégrable 2

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} e^{-xt} dt = 0$

$\int_0^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} e^{-xt} dt = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0.$$

I.A - 3) Soit $x > 0$. $f''(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt - \int_0^{+\infty} \cos t e^{-xt} dt = \frac{1}{x} - \int_0^{+\infty} \cos t e^{-xt} dt$ puis

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \cos t e^{-xt} dt &= \operatorname{Re} \left(\int_0^{+\infty} e^{(-x+i)t} dt \right) = \operatorname{Re} \left(\left[\frac{e^{(-x+i)t}}{-x+i} \right]_0^{+\infty} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{x-i} + \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{(-x+i)t}}{-x+i} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{x-i} \right) \quad (\text{car } x > 0 \text{ et donc } \left| \frac{e^{(-x+i)t}}{-x+i} \right| = \frac{e^{-xt}}{|-x+i|} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{x+i}{x^2+1} \right) = \frac{x}{x^2+1}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\forall x > 0, f''(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}.$$

Par suite, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \ln x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C$. Quand x tend vers $+\infty$,

$$\ln x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) = \ln x - \ln x - \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) = o(1),$$

et donc quand x tend vers $+\infty$, on obtient $C = 0$ (d'après la question précédente).

$$\forall x > 0, f'(x) = \ln x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1).$$

I.A - 4) Une intégration par parties fournit

$$\int \frac{1}{2} \ln(x^2+1) = \frac{x}{2} \ln(x^2+1) - \int \frac{x^2}{x^2+1} dx = \frac{x}{2} \ln(x^2+1) - \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx = \frac{x}{2} \ln(x^2+1) - x + \operatorname{Arctan} x + \lambda$$

Donc, de nouveau, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > 0$,

$$f(x) = x \ln x - x - \frac{x}{2} \ln(x^2+1) + x - \operatorname{Arctan} x + \lambda = x \ln x - \frac{x}{2} \ln(x^2+1) - \operatorname{Arctan} x + \lambda.$$

Quand x tend vers $+\infty$, $x \ln x - \frac{x}{2} \ln(x^2+1) = x \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \sim \frac{1}{x}$ et donc $x \ln x - \frac{x}{2} \ln(x^2+1)$ tend vers 0. Quand x tend vers $+\infty$, on obtient donc $-\frac{\pi}{2} + \lambda = 0$ et donc

$$\forall x > 0, f(x) = x \ln x - \frac{x}{2} \ln(x^2+1) - \operatorname{Arctan} x + \frac{\pi}{2}.$$

Enfin, f est continue en 0 et donc $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{\pi}{2}$ d'après un théorème de croissances comparées.

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} dt = f(0) = \frac{\pi}{2}.$$

I.A - 5) L'égalité est vraie quand $s = 0$. Soit $s > 0$. En posant $u = st$ et donc $dt = \frac{du}{s}$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos u}{u^2/s^2} \frac{du}{s} = s \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos u}{u^2} du = \frac{\pi}{2} s$$

et donc $|s| = s = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(st)}{t^2} dt$. Si $s < 0$,

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(st)}{t^2} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(-st)}{t^2} dt = -s = |s|.$$

Finalement,

$$\forall s \in \mathbb{R}, \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(st)}{t^2} dt = |s|.$$

I.B - Étude d'une suite d'intégrales

I.B - 1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto \frac{1 - (\cos t)^n}{t^2}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$.

$\frac{1 - (\cos t)^n}{t^2} \underset{t \rightarrow 0}{=} \frac{1 - \left(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right)}{t^2} = \frac{n}{2} + o(1)$. Donc, la fonction $t \mapsto \frac{1 - (\cos t)^n}{t^2}$ se prolonge par continuité en 0 et en particulier, est intégrable sur un voisinage de 0.

$\frac{1 - (\cos t)^n}{t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Donc, la fonction $t \mapsto \frac{1 - (\cos t)^n}{t^2}$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$.

Finalement, la fonction $t \mapsto \frac{1 - (\cos t)^n}{t^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et on en déduit l'existence de u_n .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$u_{2n} - u_{2n+2} = \int_0^{+\infty} \frac{\cos^{2n} t (1 - \cos^2 t)}{t^2} dt > 0$$

(intégrale d'une fonction continue, positive et non nulle). Donc,

la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante.

I.B - 2) $u_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt = f(0) = \frac{\pi}{2}$. Puis, en posant $x = \frac{t}{2}$

$$u_1 = \int_0^{+\infty} \frac{2 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{2 \sin^2 x}{4x^2} 2dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} dx = u_2.$$

$$u_1 = u_2 = \frac{\pi}{2}.$$

I.C - Calcul d'un équivalent de u_n

I.C - 1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En posant $t = \sqrt{\frac{2u}{n}}$ et donc $dt = \sqrt{\frac{2}{n}} \frac{1}{2\sqrt{u}} du = \frac{1}{\sqrt{2n}} \frac{1}{\sqrt{u}} du$, on obtient

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \left(\cos\left(\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)\right)^n}{\frac{2u}{n}} \frac{1}{\sqrt{2n}} \frac{1}{\sqrt{u}} du = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \left(\cos\left(\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)\right)^n}{u\sqrt{u}} du.$$

I.C - 2) Soit $(n, u) \in \mathbb{N}^* \times]0, 1]$. On sait que pour tout réel x , $|\sin x| \leq |x|$, et donc

$$\begin{aligned} \left|1 - \left(\cos\left(\sqrt{2u/n}\right)\right)^n\right| &= \left|1 - \cos\left(\sqrt{2u/n}\right)\right| \left|1 + \cos\left(\sqrt{2u/n}\right) + \dots + \left(\cos\left(\sqrt{2u/n}\right)\right)^{n-1}\right| \\ &\leq n \left(1 - \cos\left(\sqrt{2u/n}\right)\right) = 2n \sin^2\left(\sqrt{u/2n}\right) \\ &\leq 2n \left(\sqrt{u/2n}\right)^2 = u. \end{aligned}$$

I.C - 3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit g_n la fonction définie par : $\forall u > 0, g_n(u) = \frac{1 - \left(\cos\left(\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)\right)^n}{u\sqrt{u}}$ de sorte que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = \int_0^{+\infty} g_n(u) du.$$

- Chaque fonction $g_n, n \in \mathbb{N}^*$, est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$;
- Soit $u > 0$.

$$1 - \left(\cos\left(\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)\right)^n = 1 - e^{n \ln\left(\cos\left(\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)\right)} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - e^{n \ln\left(1 - \frac{u}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - e^{-u} + o(1)$$

et donc la suite de fonctions $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction $g : u \mapsto \frac{1 - e^{-u}}{u\sqrt{u}}$. De plus, la fonction g est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

- Pour tout $(n, u) \in \mathbb{N}^* \times]0, +\infty[$, d'après la question précédente,

$$|g_n(u)| \leq \begin{cases} u/u\sqrt{u} \text{ si } u \in]0, 1] \\ 2/u\sqrt{u} \text{ si } u \in]1, +\infty[\end{cases} = \begin{cases} 1/\sqrt{u} \text{ si } u \in]0, 1] \\ 2/u\sqrt{u} \text{ si } u \in]1, +\infty[\end{cases} = \varphi(u).$$

La fonction φ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$, intégrable sur un voisinage de 0 (car $\frac{1}{2} < 1$) et sur un voisinage de $+\infty$ (car $\frac{3}{2} > 1$). Donc, la fonction φ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

D'après le théorème de convergence dominée, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge, la fonction g est intégrable sur $]0, +\infty[$ et enfin

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \int_0^{+\infty} g(u) du = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-u}}{u\sqrt{u}} du.$$

I.C - 4) Soient ε et A deux réels tels que $0 < \varepsilon < A$. Les deux fonctions $u \mapsto 1 - e^{-u}$ et $u \mapsto \frac{1}{\sqrt{u}}$ sont de classe C^1 sur le segment $[\varepsilon, A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit :

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^A \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du &= \left[\frac{1 - e^{-u}}{\sqrt{u}} \right]_{\varepsilon}^A + \frac{1}{2} \int_{\varepsilon}^A \frac{1 - e^{-u}}{u\sqrt{u}} du \\ &= \frac{1 - e^{-A}}{\sqrt{A}} - \frac{1 - e^{-\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{1}{2} \int_{\varepsilon}^A \frac{1 - e^{-u}}{u\sqrt{u}} du \end{aligned}$$

Quand A tend vers $+\infty$, $\frac{1 - e^{-A}}{\sqrt{A}}$ tend vers 0 et d'autre part, $\frac{1 - e^{-\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}} \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} = \sqrt{\varepsilon}$ et donc $\frac{1 - e^{-\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}}$ tend vers 0 quand ε tend vers 0.

Quand A tend vers $+\infty$ et ε tend vers 0, on obtient

$$1 = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-u}}{u\sqrt{u}} du = 2 \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du = 2\sqrt{\pi}.$$

On en déduit que $u_n = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}} v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}} \times 2\sqrt{\pi} = \sqrt{\frac{n\pi}{2}}$.

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1 - (\cos t)^n}{t^2} dt \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{n\pi}{2}}.$$

Partie II - Autour du pile ou face

II.A - Étude de $E(|S_n|)$

II.A - 1) Pour $k \in [1, n]$, $E(X_k) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ puis

$$V(X_k) = E(X_k^2) - (E(X_k))^2 = \frac{1}{2} \times 1^2 + \frac{1}{2} \times (-1)^2 - 0 = 1.$$

Autour de pile ou face.

$$\forall n \in \mathbb{N}; X_n(\omega) = \{-1, 1\}.$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*; P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

$$A) 1. \forall k \in \mathbb{N}^*; E(X_k) = 1 \cdot P(X_k = 1) + (-1) \cdot P(X_k = -1) \\ = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{E(X_k) = 0}$$

$$E(X_k^2) = 1 \cdot P(X_k = 1) + (-1)^2 \cdot P(X_k = -1) \\ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\text{D'où } V(X_k) = E(X_k^2) - (E(X_k))^2 = 1 \Rightarrow \boxed{V(X_k) = 1}$$

$$\star E(S_n) = E\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n E(X_k) = 0 \Rightarrow \boxed{E(S_n) = 0}$$

→ Puisque $(X_1, \dots, X_n)$ sont mutuellement indep, alors

$$E(S_n) = \sum_{k=1}^n V(X_k) = n \Rightarrow \boxed{E(S_n) = n}$$

$$E(\cos(S+T)) = E(\cos S \cos T - \sin S \sin T) \\ = E(\cos S)E(\cos T) - E(\sin S)E(\sin T)$$

car S et T indep, alors $\begin{cases} \cos S \text{ et } \cos T \\ \sin S \text{ et } \sin T \end{cases}$ sont indep

Puisque T et $-T$ ont la m. loi, alors $\sin T$ et

$$\sin(-T) = -\sin T \text{ ont la m. loi} \Rightarrow E(\sin T) = 0$$

$$\text{Ainsi } E(\cos(S+T)) = E(\cos S) \cdot E(\cos T).$$

$$3) \varphi_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; t \mapsto E(\cos(S_n t))$$

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $\varphi_n(t) = (\cos t)^n$

• Pour $n=1$: $\varphi_1(t) = E(\cos S_1 t) = \dots$

$$= P(\cos t) + \cos(-t) \cdot P(X=-1)$$

$$= \frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2} \cos t = \cos t.$$

$\Rightarrow \varphi_1(t) = \cos t.$

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$: Supposons que $\varphi_n(t) = (\cos t)^n$ et montrons pour $n+1$.

$$\varphi_{n+1}(t) = E(\cos(S_{n+1} t)) = E(\cos(S_n + X_{n+1} t))$$

$$= E(\cos(S_n t)) \cdot E(\cos(X_{n+1} t)) \quad (\text{car } X_{n+1} \text{ et } S_n \text{ sont i.i.d.})$$

Or $E(\cos(X_{n+1} t)) = \cos t P(X=1) + \cos(-t) P(X=-1)$

$$= \cos t$$

$\Rightarrow \varphi_{n+1}(t) = (\cos t)^n \cos t = (\cos t)^{n+1}$

4) $E(|S_n|) = \sum_{s \in S_n(\Omega)} |s| P(S_n = s)$

$$= \sum_{s \in S_n(\Omega)} \frac{e}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1 - \cos(st)}{t^2} \right) dt P(S_n = s) \quad \text{d'après (I.A.r.)}$$

$$= \frac{e}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sum_{s \in S_n(\Omega)} (1 - \cos(st))}{t^2} \right) dt P(S_n = s)$$

$$= \frac{e}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sum_{s \in S_n(\Omega)} P(S_n = s) - \sum_{s \in S_n(\Omega)} \cos(st) P(S_n = s)}{t^2} \right) dt$$

$$= \frac{e}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - E(\cos(S_n t))}{t^2} dt$$

$$= \frac{e}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - (\cos t)^n}{t^2} dt = \frac{e}{\pi} U_n.$$

$\Rightarrow \boxed{E(|S_n|) = \frac{e}{\pi} U_n}$

On a $E(S_n^2) = V(S_n) = E(S_n^2) - E(S_n)^2$

$E(S_n^2) = n$

b) D'ailleurs que $E(S_n^4) = 3n^2 - 2n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $n=1 \rightarrow E(S_1^4) = E(X_1^4) = 1 = 3 - 2$ vérifié.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$: Supposons que $E(S_n^4) = 3n^2 - 2n$

et montrons que $E(S_{n+1}^4) = 3(n+1)^2 - 2(n+1) = 3n^2 + 4n + 1$

On a: $E(S_{n+1}^4) = E((S_n + X_{n+1})^4)$

$= E\left(\sum_{k=0}^4 C_4^k S_n^k (X_{n+1})^{4-k}\right)$

$= E\left(C_4^0 X_{n+1}^4 + C_4^1 S_n (X_{n+1}^3) + C_4^2 S_n^2 X_{n+1}^2 + C_4^3 S_n^3 X_{n+1} + C_4^4 S_n^4\right)$

$= E(X_{n+1}^4) + 4 \cdot E(S_n) \cdot E(X_{n+1}^3) + 6 E(S_n^2) \cdot E(X_{n+1}^2) + C_4^3 E(S_n^3) E(X_{n+1}) + E(S_n^4)$

$\begin{matrix} \text{L} \rightarrow S_n \text{ et } X_{n+1} \text{ indep} \\ \Rightarrow S_n \text{ et } X_{n+1}^3 \text{ indep} \end{matrix}$

$= 1 + 0 \cdot n + 3n^2 - 2n$

$\Rightarrow E(S_{n+1}^4) = 3n^2 + 4n + 1 = 3(n+1)^2 - 2(n+1)$

c) $n \in \mathbb{N}^*$, d'après l'inégalité de Markov.

$P(U_n \geq \frac{1}{\sqrt{n}}) \leq \frac{E(U_n)}{1/\sqrt{n}} = E\left(\frac{S_n^4}{n^2}\right) \cdot \sqrt{n} =$

$\leq \frac{(3n^2 - 2n)\sqrt{n}}{n^2} \leq \frac{3n^2 \sqrt{n}}{n^2} = \frac{3}{\sqrt{n}}$

$\Rightarrow \left|P(U_n \geq \frac{1}{\sqrt{n}})\right| \leq \frac{3}{\sqrt{n}}$

$$3) Z_n = \left\{ \omega \in \Omega; \exists k \geq n \text{ tq } |U_k(\omega)| \geq \frac{1}{\sqrt{k}} \right\}$$

$$= \bigcup_{k=n}^{+\infty} \left(U_k \geq \frac{1}{\sqrt{k}} \right)$$

Puisque $\left(U_k \geq \frac{1}{\sqrt{k}} \right) \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{k=n}^{+\infty} \left(U_k \geq \frac{1}{\sqrt{k}} \right) \in \mathcal{A}$

$$P(Z_n) = P \left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} \left(U_k \geq \frac{1}{\sqrt{k}} \right) \right) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} P \left(U_k \geq \frac{1}{\sqrt{k}} \right)$$

$$\leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{3}{k^{3/2}}$$

Comme la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ est convergente ($\frac{3}{2} > 1$), alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^{3/2}} = 0. \text{ Ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} P(Z_n) = 0$$

4) Soit $Z = \bigcap_{n=1}^{+\infty} Z_n$

On a $Z_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} \left(U_k \geq \frac{1}{\sqrt{k}} \right) = \left(U_n \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \cup Z_{n+1}$

$\Rightarrow Z_{n+1} \subset Z_n \Rightarrow (Z_n)$ est une suite $\downarrow$

$\Rightarrow P(Z) = P \left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} Z_n \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(Z_n) = 0$

Z est un événement négligeable.

* Soit $\omega \notin Z \Rightarrow \omega \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} Z_n^c$

$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ tq } \omega \notin Z_n \Leftrightarrow \forall k \geq n, |U_k(\omega)| \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$

$\Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|S_k(\omega)|}{k} = 0$

II) A) a) Montrons que T_n^e admet une espérance finie.

On a $T_n = \sum_{k=1}^n a_k x_k \Rightarrow T_n^e = \sum_{k=1}^n a_k^e x_k^e + e \sum_{i \neq j} a_i a_j x_i x_j$

$\Rightarrow E(T_n^e) = \sum_{k=1}^n a_k^e \underbrace{E(x_k^e)}_1 + e \sum_{i \neq j} a_i a_j \underbrace{E(x_i)}_1 \underbrace{E(x_j)}_0$

$= \sum_{k=1}^n a_k^e < \infty.$

(T)

On obtient $E(|T_n|) = \frac{e}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t \cdot \cos \frac{t}{3} \dots \cos \frac{t}{2^{n-1}}}{t^2} dt$

$$E(|T_n|) = \frac{e}{\pi} J_n$$

Comme la suite $(E(|T_n|))$ est π et majorée, alors (J_n) est π et majorée. (La suite $\sum_{n \geq 1} a_k^e c v_k$

Neorava Novala