

I Moments d'une variable aléatoire

- 91** Selon que $0 \leq X \leq 1$ ou $X \geq 1$, on aura $X^k \leq 1$ ou $X^k \leq X^n$. Dans les deux cas, $\forall k \in [1, n], 0 \leq X^k \leq 1 + X^n$.
- 92** On sait que l'existence d'une espérance pour Y (v.a. positive) entraîne l'existence d'une espérance pour tout X telle que $|X| \leq Y$. On en déduit par la majoration précédente que, si X admet un moment d'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$), alors X admet des moments d'ordre k pour tous $k \in [1, n-1]$.

I.A - Fonction génératrice des moments

- 93** $m_n(X)$ s'obtient par la dérivée $n^{\text{ème}}$ en 0 de M - c'est le principe d'identification des séries entières.
- 94** Pour que la variable aléatoire e^{tX} admette une espérance, il faut que

$$\sum_{n \geq 0} |e^{tx_n}| P(X = x_n) = \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k x_n^k}{k!} P(X = x_n) \text{ converge.}$$

Or on reconnaît dans $M_X(t)$ une série double, sommable car tout est positif et convergent : en remplaçant (théorème de transfert) $m_n(t)$ par $\sum_{p=0}^{\infty} P(X = x_p) x_p^n$, il vient

$$M_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} m_n(X) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} \sum_{p=0}^{\infty} P(X = x_p) x_p^n \frac{t^n}{n!}$$

et (en changeant de notations) par le théorème de Fubini il vient bien que $M_X(t) = E(e^{tX})$.

- 95** Réciproquement, s'il existe un réel $R > 0$ tel que, pour tout $t \in]-R, R[$, la variable aléatoire e^{tX} admet une espérance, alors pour tout $t \in]-R, R[$ on a la sommabilité qui permet le calcul précédent, dont le résultat reste valide.
- Donc l'ensemble de définition de la fonction génératrice des moments de X contient $] -R, R[$ et pour tout $t \in]-R, R[$, $M_X(t)$ est encore égal à $E(e^{tX})$.

- 96** Montrons que la variable aléatoire $X + Y$ admet des moments de tous ordres. Comme

$$(X + Y)^p = \sum_{n=0}^p \binom{p}{n} X^n Y^{p-n}$$

où les v.a. X^n et Y^{p-n} sont indépendantes (lemme des coalitions), d'espérance finie (par hypothèse), leurs produits ont aussi une espérance qui est le produit des espérances d'où enfin par linéarité :

$$E((X + Y)^p) = \sum_{n=0}^p \binom{p}{n} E(X^n) E(Y^{p-n}) = \sum_{n=0}^p \binom{p}{n} m_n(X) m_{p-n}(Y).$$

Pour conclure, la famille des $\binom{p}{n} m_n(X) m_{p-n}(Y) \frac{t^p}{p!}$ (où on convient que $\binom{p}{n} = 0$ si $p < n$) est sommable pour t de valeur absolue $< \min(R_X, R_Y)$ puisque par sommation par tranches il vient

$$\begin{aligned} \sum_{p \geq 0} \sum_{n=0}^p \binom{p}{n} m_n(X) m_{p-n}(Y) \frac{t^p}{p!} &= \sum_{p \geq 0} \sum_{n=0}^p \frac{m_n(X)}{n!} t^n \frac{m_{p-n}(Y)}{(p-n)!} t^{p-n} \\ &= \sum_{n, k \geq 0} \frac{m_n(X)}{n!} t^n \frac{m_k(Y)}{k!} t^k = \sum_{n \geq 0} \frac{m_n(X)}{n!} t^n \sum_{k \geq 0} \frac{m_k(Y)}{k!} t^k \end{aligned}$$

autrement dit

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t) \times M_Y(t).$$

(c'est le produit de Cauchy des deux séries entières)

I.B - Exemples

- 97 Z vérifie $\mathcal{P}(Z = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$. Par croissance comparée (à $1/n^2$), Z admet des moments de tous ordres qui valent

$$m_p(Z) = \sum_{n \geq 0} e^{-\lambda} \frac{n^p \lambda^n}{n!}.$$

- 98 La fonction génératrice des moments de Z est (interversion justifiée par sommabilité)

$$\sum_{p \geq 0} m_p(Z) \frac{t^p}{p!} = \sum_{p \geq 0} \sum_{n \geq 0} e^{-\lambda} \frac{n^p \lambda^n}{n!} \frac{t^p}{p!} = e^{-\lambda} \sum_{n \geq 0} \frac{\lambda^n}{n!} \sum_{p \geq 0} \frac{n^p t^p}{p!} = e^{-\lambda} \sum_{n \geq 0} \frac{\lambda^n}{n!} e^{nt} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t - 1)}.$$

On en déduit les valeurs de $m_1(Z)$ et $m_2(Z)$ par dérivation (93) :

$$M_Z(t)' = \lambda e^t e^{\lambda(e^t - 1)}, \quad M_Z(t)'' = (\lambda e^t + \lambda^2 e^{2t}) e^{\lambda(e^t - 1)} \quad m_1(Z) = m'_Z(0) = \lambda, \quad m_2(Z) = \lambda + \lambda^2.$$

On retrouve (pour vérifier!) espérance et variance de la loi de Poisson.

- 99 Pour calculer la fonction génératrice des moments de la variable aléatoire S_n , on pourrait utiliser 96, mais avec la somme de n v.a. indépendantes.

Autrement : la loi de S_n est une loi binomiale $\mathcal{B}(n, \lambda/n)$, avec $\mathcal{P}(S_n = k) = \binom{n}{k} (\frac{\lambda}{n})^k (1 - \frac{\lambda}{n})^{n-k}$.

On en déduit le moment

$$m_p(S_n) = \sum_{k=0}^n k^p \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k},$$

et la FGdM :

$$\begin{aligned} M_{S_n}(t) &= \sum_{p \geq 0} \sum_{k=0}^n k^p \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \frac{t^p}{p!} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \sum_{p \geq 0} k^p \frac{t^p}{p!} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} e^{kt} = \left(1 - \frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda e^t}{n}\right)^n. \end{aligned}$$

- 100 $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_{S_n}(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$ à t fixé en prenant le logarithme, puis l'exponentielle (par continuité de ces fonctions).

- 101 La question 8 donnait le même résultat... on sait que S_n tend vers la loi de Poisson de paramètre λ en un sens ($\ll$ en loi $\gg$), c'est sa définition.

- 102 On a $\mathcal{P}(Y_n = \frac{k}{n}) = \frac{1}{n}$.
D'où le calcul du moment d'ordre p : $m_p = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^p$, et la fonction génératrice des moments de la variable aléatoire Y_n :

$$M_{Y_n}(t) = \sum_{p \geq 0} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^p \frac{t^p}{p!} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{p \geq 0} \frac{1}{p!} \left(\frac{tk}{n}\right)^p = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{tk/n}.$$

- 103 On reconnaît une somme de Riemann : il vient donc à t fixé $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_{Y_n}(t) = \int_0^1 e^{tx} dx = \frac{e^t - 1}{t}$, qui fait figure de FGdM de la distribution uniforme sur le segment $[0, 1]$ (hors-programme).

II. Moments d'une suite numérique

II.A - Étude d'une fonction

914 φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ comme composée de fonctions C^∞ . Quand x tend vers 1 par valeurs inférieures, on a $\varphi(x) \rightarrow 0$ par limite de l'exponentielle en $-\infty$, donc on a même limite à gauche et à droite en 1, et φ est continue sur $\mathbb{R}$.

915 Déjà on a le plaisir de calculer

$$\varphi'(x) = \exp\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x}}\right) \left(\frac{-1}{\sqrt{1-x}} - \frac{x}{(1-x)^{3/2}}\right) = -\frac{\varphi(x)}{(1-x)^{3/2}}$$

L'exponentielle tend vers 0 bien plus vite que $(1-x)^{3/2}$, donc $\lim_{x \rightarrow 1} \varphi'(x) = 0$ (rigoureusement il faudrait

poser $y = \sqrt{1-x}$ pour se ramener à une croissance comparée classique).

La limite à droite est clairement 0 aussi, donc par le théorème de la dérivée prolongée (la fonction est continue, C^1 sauf éventuellement en 1 et sa dérivée y a une limite), φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

916 On montre que, pour tout entier naturel non nul p , il existe deux polynômes P_p et Q_p à coefficients réels tels que, pour tout $x \in]-\infty, 1[$,

$$\varphi^{(p)}(x) = \frac{P_p(\sqrt{1-x})}{Q_p(\sqrt{1-x})} \exp\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x}}\right) = R_p(\sqrt{1-x}) \exp\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x}}\right)$$

par une récurrence immédiate :

- C'est vrai pour $p = 1$ (et même $p = 0$) comme on l'a prouvé.
- Supposant la propriété vraie, en dérivant on va obtenir du $\frac{1}{(1-x)^{3/2}}$ en dérivant l'exponentielle et une autre fraction rationnelle de la variable $\sqrt{1-x}$ en dérivant la fraction $R_p(\sqrt{1-x})$ par dérivation de fonctions composées.

917-18 On en déduit comme en **915** que le théorème de la dérivée prolongée s'applique (supposant par récurrence que φ est de classe C^{p-1} à la dérivée d'ordre p , car $\lim_{x \rightarrow 1} \varphi^{(p)}(x) = 0$ par croissance comparée, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et donc $\varphi^{(p)}(1)$ existe et vaut 0.

II.B - Développement en série

919 Par le développement en série entière de l'exponentielle, il vient

$$\varphi(x) = \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{1}{q!} \frac{(-x)^q}{\sqrt{1-x}} = \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{(-1)^q}{q!} x^q (1-x)^{-q/2}.$$

920 D'après la formule du binôme de Newton, la vraie, la généralisée, on a

$$(1-x)^{-q/2} = \sum_{p \geq 0} \binom{-q/2}{p} (-x)^p = \sum_{p \geq 0} \frac{(-q/2)(-q/2-1)\dots(-q/2-p+1)}{p!} (-1)^p x^p \\ = \sum_{p \geq 0} \frac{(q/2+p-1)\dots(q/2+1)q/2}{p!} x^p$$

Donc, pour tout $x \in]-1, 1[$ et tout $q \in \mathbb{N}^*$, on a

$$(1-x)^{-q/2} = \sum_{p=0}^{+\infty} H_p\left(\frac{q}{2} + p - 1\right) x^p.$$

g21 On a en combinant

$$\varphi(x) = \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{(-1)^q}{q!} x^q (1-x)^{-q/2} = \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{(-1)^q}{q!} x^q \sum_{p=0}^{+\infty} H_p \left(\frac{q}{2} + p - 1 \right) x^p = \sum_{p,q \geq 0} \frac{(-1)^q}{q!} H_p \left(\frac{q}{2} + p - 1 \right) x^{p+q}.$$

En isolant les termes d'indice $q = 0$ dont la contribution vaut $\frac{(-1)^0}{0!} x^0 (1-x)^0 = 1$, et en posant $q = i + 1$ sinon, on trouve bien

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \varphi(x) = 1 + \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j}(x) \right) \quad \text{où l'on a posé } \forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad a_{i,j}(x) = \frac{(-1)^{i+1}}{(i+1)!} H_j \left(\frac{i-1}{2} + j \right) x^{i+j+1}.$$

g22 Observons déjà que $H_j \left(\frac{i-1}{2} + j \right) \geq 0$ puisque i et j sont ≥ 0 (le dernier terme du numérateur est $\frac{i+1}{2}$).

Si x est positif, on a donc $|a_{i,j}(x)| = (-1)^{i+1} a_{i,j}(|x|)$.

Si x est négatif, on a donc $|a_{i,j}(x)| = (-1)^j a_{i,j}(|x|) = (-1)^{i+1} a_{i,j}(x) = (-1)^{i+1} a_{i,j}(-|x|)$.

En reprenant tout le calcul avec $\left(\frac{|x|}{\sqrt{1-|x|}} \right)$, on trouve que le $(-1)^q x^q$ (alias $(-1)^{i+1}$) se simplifie en $|x|^q$, tandis que les x^p (qui proviennent du DSE de la racine) se changent en $|x|^p$.

Quand la poussière retombe, pour tout $x \in]-1, 1[$, il reste effectivement

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} |a_{i,j}(x)| \right) = \exp \left(\frac{|x|}{\sqrt{1-|x|}} \right) - 1.$$

g23 On vient de démontrer une sommabilité, ce qui autorise à Fubiniser : en sommant à $i + j + 1 = n$ (produit de Cauchy), le terme constant étant toujours mis de côté, il vient

$$H_j \left(\frac{i-1}{2} + j \right) = H_j \left(\frac{n+j}{2} - 1 \right) \quad \text{d'où} \quad \forall x \in]-1, 1[, \quad \varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

où

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} H_k \left(\frac{n+k}{2} - 1 \right) \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* \quad (1)$$

II.C - Un prolongement dans $\mathbb{C}$

g24 La sommabilité établie en **g22** montre que, pour tout $z \in \mathcal{D}$, la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge.

g25 Le théorème de dérivation terme à terme des séries entières affirme que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]-1, 1[$, $\Phi_p(x) = \varphi^{(p)}(x)$ et que les séries entières gardent le même rayon de convergence (ici 1) après dérivation. En particulier, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $z \in \mathcal{D}$, la série entière

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+p)(n+p-1) \cdots (n+1) a_{n+p} z^n \text{ converge.}$$

g26 Rappelons que la fonction $\varphi^{(p)}$ s'exprime sous la forme $R_p(\sqrt{1-x}) \exp\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x}}\right)$ pour $x < 1$ (et 0 pour $x \geq 1$). Or cette fonction est continue sur $[-1, 1]$, donc y est bornée (limite nulle en 1).

Donc Φ_p est bornée sur $] - 1, 1[$ car c'est la même!

On admet gentiment que la fonction Φ_p est bornée sur $\mathcal{D}$.

927 Soit r un réel de l'intervalle $]0, 1[$. On sait alors que la série entière

$$\sum_n (n+p)(n+p-1)\cdots(n+1)a_{n+p}r^n e^{ni\theta}$$

converge normalement pour $\theta \in \mathbb{R}$, car $r < R$ rayon de convergence (on est sur un cercle - compact - inclus dans le disque ouvert de convergence).

Ceci autorise à intégrer terme à terme le développement en série de $\Phi_p(re^{i\theta})e^{-ni\theta}$ sur le segment $[0, 2\pi]$. Or $\int_0^{2\pi} (re^{i\theta})^k e^{-ni\theta} d\theta = 0$ quand $k \neq n$, il reste donc

$$(n+p)(n+p-1)\cdots(n+1)a_{n+p}r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_p(re^{i\theta})e^{-ni\theta} d\theta.$$

928 On a donc compte tenu de ce que $|\Phi_p|$ est bornée par une constante K_p (admis en **926**)

$$\forall r \in]0, 1[\quad |a_{n+p}|r^n \leq \frac{1}{(n+p)(n+p-1)\cdots(n+1)} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_p d\theta \leq \frac{K_p}{n^p}$$

et en faisant tendre r vers 1 on a l'inégalité voulue par passage à la limite.

929 La convergence normale de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ sur $[0, 1]$ résulte de la majoration précédente.

On a donc convergence uniforme et continuité de la somme de la série entière, et donc la valeur

de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ est la limite en 1 de φ , qui est 0 d'après **914**.

930 En **928** nous avons établi que $a_{n+p} = O(\frac{1}{n^p})$. Par réindexation (p étant fixé) cela prouve que $a_n = O(\frac{1}{(n-p)^p}) = O(\frac{1}{n^p})$. On a donc une convergence vers 0 plus rapide que n'importe quelle série de Riemann. En particulier, pour $p \in \mathbb{N}^*$ on a $a_n = O(\frac{1}{n^{p+1}})$ et $(n+p)(n+p-1)\cdots(n+1)a_{n+p} = O(\frac{1}{n^{p+1}})$. On en déduit la convergence normale de la série entière $\sum_{n \geq 0} (n+p)(n+p-1)\cdots(n+1)a_{n+p}x^n$ sur $[0, 1]$. **On ne peut appliquer le théorème de dérivation des séries entières sur $[0, 1]$** (seulement sur $[-1, 1]$) mais la convergence normale, donc uniforme, permet d'appliquer la version récursive du théorème de dérivation terme à terme, ce qui donne pour somme de cette série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+p)(n+p-1)\cdots(n+1)a_{n+p}x^n = \varphi^{(p)}(x) = \Phi_p(x)$$

et en particulier

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+p)(n+p-1)\cdots(n+1)a_{n+p} = \Phi_p(1) = 0 \quad \text{d'après 918.}$$

931 On en déduit par récurrence aisée que tous les moments d'ordre p de la suite (a_n) sont nuls. Je me contente d'ébaucher la récurrence :

$$m_0 = \sum_{n \geq 0} a_n = 0 \quad (\text{d'après 929})$$

$$\sum_{n \geq 0} (n+1)a_n \stackrel{(\text{d'après 930})}{=} 0 = \sum_{n \geq 0} n a_n + \sum_{n \geq 0} a_n = m_1 + m_0 \Rightarrow m_1 = 0$$

$$\sum_{n \geq 0} (n+2)(n+1)a_n \stackrel{(\text{d'après 930})}{=} 0 = \sum_{n \geq 0} n^2 a_n + \sum_{n \geq 0} 3n a_n + \sum_{n \geq 0} a_n = m_2 + 3m_1 + 2m_0 \Rightarrow m_2 = 0 \dots$$

III. Moments d'une fonction

III.A - Étude d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$

932 On a $|\theta(x)| = \exp\left(-\frac{\ln^2 x}{4\pi^2}\right)$ où $-\ln^2(x) \rightarrow -\infty$ et donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} |\theta(x)| = 0$.

933 θ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^+$ comme composée de fonctions C^∞ .

On démontre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ qu'il existe $P_n \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$\forall x \in]0, +\infty[\quad \theta^{(n)}(x) = \frac{P_n(\ln x)}{x^n} \theta(x) :$$

- C'est vrai pour $n = 0$ avec $P = 1$
- Supposons l'hypothèse de récurrence vérifiée pour le rang n , alors

$$\theta^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{P_n(\ln x)}{x^n} \theta(x) \right) = \frac{P'_n(\ln x)}{x^{n+1}} \theta(x) - \frac{n P_n(\ln x)}{x^{n+1}} \theta(x) + \frac{P_n(\ln x)}{x^n} \theta'(x)$$

et comme $\theta'(x) = \frac{-\ln x}{2\pi^2} \theta(x) = \frac{P_1(\ln x)}{x} \theta(x)$, on récupère bien

$$\theta^{(n+1)}(x) = \left(\frac{P_{n+1}(\ln x)}{x^{n+1}} \right) \theta(x).$$

(avec $P_{n+1} = P'_n - n P_n + P_1 P_n$, mais quelle importance?)

934 Effectuons le changement de variable $y = -\ln x$. On a alors $y \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow 0^+$, et

$$\theta^{(n)}(x) = P_n(-y) e^{ny} \exp\left(-\frac{y^2}{4\pi^2} - 1 \frac{y}{2\pi}\right) \rightarrow 0 \text{ quand } y \rightarrow +\infty \text{ par croissance comparée.}$$

En effet $e^{-y^2/4\pi^2}$ est imbattable!

935 Comme ci-dessus, (918) on en déduit par le théorème de la dérivée prolongée que θ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

III.B - Étude d'une intégrale

936

L'intégrale $I_p = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-p\pi)^2} \sin t \, dt$ est absolument convergente, car l'intégrande, continu, est dominé en $\pm\infty$ par $1/t^2$ par croissance comparée. Ceci autorise le changement de variable :

$$I_p = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-p\pi)^2} \sin t \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \sin(x + p\pi) \, dx = (-1)^p I_0 = 0$$

car la fonction $x \mapsto e^{-x^2} \sin x$ est impaire!

937 On procède avec conviction au changement de variable $t = \frac{\ln x}{2\pi}$, qui donne

$$e^{-(t-p\pi)^2} dt = \exp\left(-\frac{\ln^2 x}{4\pi^2} + 2p\pi \frac{\ln x}{2\pi} - p^2 \pi^2\right) \frac{dx}{2\pi x}, \text{ d'où}$$

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad I_p = \frac{e^{-p^2 \pi^2}}{2\pi} \int_0^{+\infty} x^{p-1} \exp\left(-\frac{\ln^2 x}{4\pi^2}\right) \sin\left(\frac{\ln x}{2\pi}\right) dx \text{ (oui, même si } p = 0 \text{...)}.$$

938 Conclusion : la fonction très naturelle $x \mapsto \exp\left(-\frac{\ln^2 x}{4\pi^2}\right) \sin\left(\frac{\ln x}{2\pi}\right)$ a tous ses moments nuls. Revoyez l'exercice classique (avec le théorème de Weierstrass) qui montre qu'une fonction continue ayant tous ses moments nuls sur un segment est la fonction nulle!