

probleme

Partie I

1) On a. $\sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\xi(x)} \cdot \frac{1}{n^x} = \frac{\xi(x)}{\xi(x)} = 1$

Alors $P(X=n)$ définit une loi de probabilité

2) X admet une espérance finie si et seulement si la série $\sum_{n \geq 1} n P(X=n)$ est cv.

ssi $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{n^x} < +\infty$ cv.

ssi $\frac{1}{\xi(x)} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{x-1}} < +\infty$ cv.

ssi $x-1 > 1 \Leftrightarrow x > 2$

si $x > 2$ $E(X) = \frac{\xi(x-1)}{\xi(x)}$

3) X^k admet une espérance finie ssi

$\sum_{n \geq 1} \frac{n^k}{\xi(x)} \cdot \frac{1}{n^x} = \frac{1}{\xi(x)} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{x-k}} < +\infty$ cv

ssi $x-k > 1$ ssi $|x| > k+1$

si $|x| > k+1$, alors $E(X^k) = \frac{\xi(x-k)}{\xi(x)}$

$E(X^k) = \frac{\xi(x-k)}{\xi(x)}$

4) $a \in \mathbb{N}^*$;
 $P(X \in a\mathbb{N}^*) = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \{X = a \cdot n\}\right)$

$= \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = a \cdot n)$

(Les événements $\{X = a \cdot n\}; n \geq 1$ sont deux à deux incompatibles.)

Alors

$P(X \in a\mathbb{N}^*) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\xi(x)} \frac{1}{(a \cdot n)^x}$

$= \frac{\xi(x)}{a^x \cdot \xi(x)} = \frac{1}{a^x}$

$\Rightarrow P(X \in a\mathbb{N}^*) = \frac{1}{a^x}$

Partie II

1) Pq. les événements $(X \in q_1 \mathbb{N}^*), \dots, (X \in q_n \mathbb{N}^*)$ sont mutuellement indépendants.

soit I une partie non vide de $\{1, \dots, n\}$

$\bigcap_{i \in I} (X \in q_i \mathbb{N}^*)$ est réalisé si

$\forall i \in I; (X \in q_i \mathbb{N}^*) \Leftrightarrow q_i \text{ divise } X$

$\Leftrightarrow \prod_{i \in I} q_i \text{ divise } X$ (puisque q_i est premier $\forall i \in I$)

$\Leftrightarrow (X \in \prod_{i \in I} q_i \mathbb{N}^*)$

Ainsi

$$P\left(\bigcap_{i \in I} (x \in q_i \mathbb{N}^*)\right) = P\left(x \in \prod_{i \in I} q_i \mathbb{N}^*\right)$$

$$= \frac{1}{\left(\prod_{i \in I} q_i\right)^x} \quad (\text{d'après 5-4/})$$

$$= \prod_{i \in I} \frac{1}{q_i^x} = \prod_{i \in I} P(x \in q_i \mathbb{N}^*)$$

On a donc $P\left(\bigcap_{i \in I} (x \in q_i \mathbb{N}^*)\right) = \prod_{i \in I} P(x \in q_i \mathbb{N}^*)$

Ce qui montre que les événements $(x \in q_i \mathbb{N}^*)_{1 \leq i \leq n}$ sont mutuellement indep

2) a) $B_n = \bigcap_{k=1}^n (x \notin q_k \mathbb{N}^*)$

ona. $B_{n+1} = \bigcap_{k=1}^{n+1} (x \notin q_k \mathbb{N}^*) = B_n \cap (x \notin q_{n+1} \mathbb{N}^*)$

$\Rightarrow B_{n+1} \subset B_n$

Ce qui montre que la suite d'événements $(B_n)_{n \geq 1}$ est une suite décroissante :

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n\right)$
 $= P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{k=1}^n (x \notin q_k \mathbb{N}^*)\right)$
 $= P\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} (x \notin q_k \mathbb{N}^*)\right)$

L'événement $\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} x \notin q_k \mathbb{N}^*\right)$ n° x n'est pas multiple de q_k , $\forall q_k$ nombre premier.

$\Leftrightarrow \forall q_k$ premier : $q_k \nmid x$

$\Leftrightarrow (x=1)$

Ainsi : $\bigcap_{k=1}^{+\infty} (x \notin q_k \mathbb{N}^*) = (x=1)$

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n) = P(x=1)$

b) On a $P(x=1) = \frac{1}{\zeta(x)}$

et $P(B_n) = P\left(\bigcap_{k=1}^n (x \notin q_k \mathbb{N}^*)\right)$

$= P\left(\bigcap_{k=1}^n (x \notin q_k \mathbb{N}^*)\right)$

$= \prod_{k=1}^n P(x \notin q_k \mathbb{N}^*)$ (indép)

$= \prod_{k=1}^n (1 - P(x \in q_k \mathbb{N}^*))$

$= \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{q_k^x}\right)$

alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{q_k^x}\right) = \frac{1}{\zeta(x)}$

A: Aucun nombre premier ne divise x et y simultanément.

$\forall q_k$ un nombre premier $\Leftrightarrow$

$(x \notin q_k \mathbb{N}^*) \cup (y \notin q_k \mathbb{N}^*)$ est l'événement q_k ne divise pas x ou q_k ne divise pas y

d'où
$$A = \bigcap_{k=1}^{+\infty} (x \notin q_k \mathbb{N}^*) \cup (y \notin q_k \mathbb{N}^*)$$

or
$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} C_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{k=1}^n ((x \notin q_k \mathbb{N}^*) \cup (y \notin q_k \mathbb{N}^*))$$

$$= \bigcap_{k=1}^{+\infty} (x \notin q_k \mathbb{N}^*) \cup (y \notin q_k \mathbb{N}^*)$$

d'où
$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} C_n = A$$

$$P(A) = P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} C_n\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} P(C_n) \quad \text{puisque } (C_n) \text{ est } \downarrow$$

or
$$P(C_n) = P\left(\bigcap_{k=1}^n (x \notin q_k \mathbb{N}^*) \cup (y \notin q_k \mathbb{N}^*)\right)$$

$$= P\left(\bigcap_{k=1}^n D_k\right)$$

avec $D_k = (x \notin q_k \mathbb{N}^*) \cup (y \notin q_k \mathbb{N}^*)$

montrons que les événements $(D_k)_{1 \leq k \leq n}$ sont mutuellement indépendants. $\Leftrightarrow \forall q$ les événements $(D_k)_{1 \leq k \leq n}$ sont mutuellement indép.

$$C_{D_k} = (x \in q_k \mathbb{N}^*) \cap (y \in q_k \mathbb{N}^*)$$

soit I une partie non vide $\in \{1, \dots, n\}$.

$$P\left(\bigcap_{k \in I} C_{D_k}\right) = P\left(\bigcap_{k \in I} (x \in q_k \mathbb{N}^*) \cap (y \in q_k \mathbb{N}^*)\right)$$

$$= P\left(\left(\bigcap_{k \in I} (x \in q_k \mathbb{N}^*)\right) \cap \left(\bigcap_{k \in I} (y \in q_k \mathbb{N}^*)\right)\right)$$

$$= P\left(x \in \bigcap_{k \in I} q_k \mathbb{N}^* \cap y \in \bigcap_{k \in I} q_k \mathbb{N}^*\right)$$

$$= P\left(x \in \bigcap_{k \in I} q_k \mathbb{N}^*\right) \cdot P\left(y \in \bigcap_{k \in I} q_k \mathbb{N}^*\right)$$

(x et y indep)

$$\stackrel{1}{=} \prod_{k \in I} P(x \in q_k \mathbb{N}^*) \cdot \prod_{k \in I} P(y \in q_k \mathbb{N}^*)$$

(d'après II.2)

$$= \prod_{k \in I} P(x \in q_k \mathbb{N}^*) \cdot P(y \in q_k \mathbb{N}^*)$$

$$= \prod_{k \in I} P(x \in q_k \mathbb{N}^* \cap (y \in q_k \mathbb{N}^*))$$

$$= \prod_{k \in I} P(C_{D_k})$$

d'où le résultat.

On en déduit que

$$P(C_n) = \prod_{k=1}^n P(D_k)$$

$$= \prod_{k=1}^n (1 - P(D_k))$$

$$= \prod_{k=1}^n (1 - P(X_k \in P_k | W^*) \cdot P(Y \in P_k | W^*))$$

$$= \prod_{k=1}^n (1 - \left(\frac{1}{p_k} | e\right) \left(\begin{array}{c} \text{X et Y sont} \\ \text{loi zeta} \end{array} \right))$$

$$\text{Ainsi } P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_k} | e\right)$$

$$= \frac{1}{e^{2x}} \quad \text{d'après 2 b /}$$