

Partie B - Variables aléatoires sous-gaussiennes

8) Soit $t \in \mathbb{R}$. D'après le cours, on a $\text{ch } t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!}$ et $e^{t^2/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2^n \times n!}$.

Soit $n \geq 1$. Pour tout $k \in \llbracket n+1, 2n \rrbracket$ on a $0 < 2 \leq k$, donc par produit il vient : $0 < 2^n \leq \frac{(2n)!}{n!}$.

Or $\frac{t^{2n}}{2^n \times (2n)!} \geq 0$ donc $\frac{t^{2n}}{(2n)!} \leq \frac{t^{2n}}{2^n \times n!}$ et, les séries étant convergentes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2^n \times n!}.$$

Enfin, les deux termes de ces séries pour $n = 0$ sont égaux (à 1) donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2^n n!}$ ce qui démontre que $\boxed{\text{ch}(t) \leq e^{t^2/2}}$.

9) Soit $t \in \mathbb{R}$ et $x \in [-1, 1]$.

Alors $\frac{1+x}{2}$ et $\frac{1-x}{2}$ sont deux réels positifs de somme 1.

La fonction $\exp$ étant convexe (de dérivée seconde positive) sur l'intervalle $\mathbb{R}$, intervalle contenant les deux points t et $-t$, une inégalité de convexité donne :

$$\exp\left(\frac{1+x}{2}t + \frac{1-x}{2}(-t)\right) \leq \frac{1+x}{2}\exp(t) + \frac{1-x}{2}\exp(-t)$$

et cette inégalité se réécrit ainsi après simplification : $\exp(tx) \leq \frac{1+x}{2}\exp(t) + \frac{1-x}{2}\exp(-t)$.

- 10) • Soit $t \in \mathbb{R}$. Posons Y la variable aléatoire $Y = \frac{1+X}{2}e^t + \frac{1-X}{2}e^{-t} - \exp(tX)$

Par hypothèse, X est à valeurs dans $[-1, 1]$ donc Y est une variable aléatoire positive.

Par positivité et linéarité de l'espérance, et sachant que $E(X) = 0$, on obtient : $\text{ch}(t) - E(\exp(tX)) \geq 0$

Ayant également $\text{ch}(t) \leq e^{t^2/2}$, on obtient $E(e^{tX}) \leq e^{t^2/2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ ce qui montre que X est 1-sous-gaussienne.

- Supposons maintenant que X est bornée par α , et posons $Y = \frac{1}{\alpha}X$. Alors Y est centrée (linéarité de l'espérance) et bornée par 1.

Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors $\alpha \times t \in \mathbb{R}$ et d'après ce qui précède, $E(e^{\alpha t Y}) \leq \exp((\alpha t)^2/2)$,

inégalité qui se réécrit $E(e^{tX}) \leq e^{\alpha^2 t^2/2}$ et fournit le caractère α -sous-gaussien de X .

- 11) Soit $t \in \mathbb{R}$.

L'indépendance mutuelle des variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ implique l'indépendance mutuelle des variables aléatoires $e^{t\mu_1 X_1}, \dots, e^{t\mu_n X_n}$. Ainsi :

$$E\left(\exp\left(t \sum_{i=1}^n \mu_i X_i\right)\right) = E\left(\prod_{i=1}^n \exp(t\mu_i X_i)\right) = \prod_{i=1}^n E(\exp(t\mu_i X_i)).$$

Or, pour tout $i \in [1, n]$ on a $0 \leq E(\exp(t\mu_i X_i)) \leq \exp(t^2 \mu_i^2 \alpha^2/2)$. Donc par produit :

$$E\left(\exp\left(t \sum_{i=1}^n \mu_i X_i\right)\right) \leq \prod_{i=1}^n \exp(t^2 \mu_i^2 \alpha^2/2) = \exp\left(\sum_{i=1}^n t^2 \mu_i^2 \alpha^2\right) = \exp(\alpha^2 t^2/2),$$

ce qui achève de démontrer que $\sum_{i=1}^n \mu_i X_i$ est α -sous-gaussienne.

- 12) • Soit $t > 0$.

Par conséquence de l' α -sous-gaussianité de X , e^{tX} est d'espérance finie. C'est également une variable aléatoire positive. Par ailleurs, $e^{t\lambda}$ est un réel strictement positif.

Par conséquence de l'inégalité de Markov :

$$P(e^{tX} \geq e^{t\lambda}) \leq \frac{E(e^{tX})}{e^{t\lambda}} \leq \exp(\alpha^2 t^2/2 - t\lambda),$$

car $e^{t\lambda} > 0$ et X est une variable aléatoire α -sous-gaussienne.

Or l'événement $\{e^{tX} \geq e^{t\lambda}\}$ est exactement l'événement $\{X \geq \lambda\}$ par stricte croissance de la fonction exponentielle et stricte positivité de t .

Donc $P(X \geq \lambda) \leq \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda\right)$.

- En choisissant $t = \frac{\lambda}{\alpha^2}$ (qui est bien un réel strictement positif) dans l'inégalité précédente, on obtient :

$$P(X \geq \lambda) \leq \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\alpha^2}\right).$$

Maintenant, on vérifie facilement que $-X$ est une variable aléatoire α -sous-gaussienne.

En effet, si $t \in \mathbb{R}$, alors $-t \in \mathbb{R}$, donc $E(\exp(-tX)) \leq \exp(\alpha^2 (-t)^2/2)$, ce qui donne :

$$E(\exp(t(-X))) \leq \exp(\alpha^2 t^2/2).$$

Ainsi, d'après ce qui précède, $P(-X \geq \lambda) \leq \exp(-\lambda^2/(2\alpha^2))$.

Enfin, l'événement $\{|X| \geq \lambda\}$ est la réunion disjointe des événements $\{X \geq \lambda\}$ et $\{-X \geq \lambda\}$, donc la somme des deux inégalités précédemment obtenues fournit :

$$P(|X| \geq \lambda) \leq 2 \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\alpha^2}\right).$$

- 13) • Supposons que X est d'espérance finie.
Alors, l'inégalité $0 \leq \lfloor X \rfloor \leq X$ assure que $\lfloor X \rfloor$ est aussi d'espérance finie, et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
D'après le résultat admis, la série de terme général $P(\lfloor X \rfloor \geq k)$ converge, et est de somme $E(\lfloor X \rfloor)$.
Or, pour tout entier naturel k et par conséquent de la définition de la partie entière, l'événement $\{\lfloor X \rfloor \geq k\}$ est exactement l'événement $\{X \geq k\}$.
Donc $P(X \geq k) = P(\lfloor X \rfloor \geq k)$ ce qui assure la convergence de la série de terme général $P(X \geq k)$

et donne également $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k) = E(\lfloor X \rfloor)$.

L'inégalité $\lfloor X \rfloor \leq X \leq \lfloor X \rfloor + 1$, et la croissance et la linéarité de l'espérance fournissent alors l'inégalité souhaitée (en notant que $E(1) = 1 \dots$):

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k) \leq E(X) \leq 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k).$$

- Supposons que la série de terme général $P(X \geq k)$ converge.
Alors, ayant $P(\lfloor X \rfloor \geq k) = P(X \geq k)$ pour tout k entier et $\lfloor X \rfloor$ à valeur dans $\mathbb{N}$, la variable aléatoire $\lfloor X \rfloor$ est d'espérance finie donc $\lfloor X \rfloor + 1$ également.
Ayant $0 \leq X \leq \lfloor X \rfloor + 1$, on en déduit que X est d'espérance finie.

- 14) • Soit $k \geq 2$.

L'événement $\{\exp(\beta^2 X^2 / 2) \geq k\}$ est exactement l'événement $\left\{ |X| \geq \sqrt{\frac{2 \ln(k)}{\beta^2}} \right\}$ par stricte croissance des fonctions qui vont bien et stricte positivité des réels qui vont bien.

Le réel $\sqrt{\frac{2 \ln(k)}{\beta^2}}$ étant strictement positif, on peut appliquer l'inégalité de la question 12) :

$$P\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geq k\right) \leq 2 \exp\left(-\frac{1}{2\alpha^2} \times \frac{2 \ln(k)}{\beta^2}\right) = 2k^{-\eta},$$

en posant $\eta = \alpha^{-2} \beta^{-2}$.

- Lorsque $k = 1$, l'inégalité est évidente car elle s'écrit $P\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geq k\right) \leq 2$.
• En supposant $0 < \alpha\beta < 1$, on a alors $1 < (\alpha\beta)^{-2} = \eta$ par stricte décroissance de $u \mapsto u^{-2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ ce qui assure la convergence de la série de terme général $\frac{1}{k^\eta}$. L'inégalité :

$$0 \leq P\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geq k\right) \leq \frac{2}{k^\eta}$$

assure alors la convergence de la série de terme général $P\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geq k\right)$.

D'après la question précédente, $\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right)$ est donc d'espérance finie et :

$$\begin{aligned} E\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right)\right) &\leq 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} P\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geq k\right) \\ &\leq 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{k^\eta} \\ &= \boxed{1 + 2\zeta(\eta)}. \end{aligned}$$

Partie C - Recouvrements de la sphère

- 15) Raisonnons par l'absurde et supposons qu'on ne puisse pas trouver de recouvrement fini. Construisons alors par récurrence une suite (a_n) à valeurs dans K de la manière suivante :

- initialisation : puisque $K \neq \emptyset$, on peut choisir $a_0 \in K$

• supposons avoir construit $a_0, \dots, a_n$. Puisque $K \not\subset \bigcup_{k=0}^n B_{a_k, \varepsilon/2}$, on peut choisir :

$$a_{n+1} \in K \setminus \left(\bigcup_{k=0}^n B_{a_k, \varepsilon/2} \right).$$

Puis par compacité de K , on peut trouver une extraction φ telle que la suite $a_{\varphi(n)}$ tende vers une limite $a \in K$. En particulier, il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N, \|a - a_{\varphi(n)}\| \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Remarquons alors que par l'inégalité triangulaire on a $\|a_{\varphi(N+1)} - a_{\varphi(N)}\| \leq \varepsilon/2$, d'où $a_{\varphi(N+1)} \in B_{a_{\varphi(N)}, \varepsilon/2}$. Or puisque $\varphi(N+1) > \varphi(N)$, par construction on a $a_{\varphi(N+1)} \notin B_{a_{\varphi(N)}, \varepsilon/2}$, d'où contradiction.

- 16) On se donne un ensemble A du même type que dans la question précédente. Puisque $\Lambda \subset K$, on peut construire une application $\theta : \Lambda \rightarrow A$, qui à $x \in \Lambda$ associe un $a \in A$ tel que $x \in B_{a, \varepsilon/2}$. Montrons que θ est injective, et pour cela donnons-nous $x \neq y$ dans Λ . Si on avait $\theta(x) = \theta(y) = a$, alors par l'inégalité triangulaire on aurait :

$$\|x - y\| \leq \|x - a\| + \|a - y\| \leq \varepsilon,$$

ce qui est absurde. Ainsi, θ est bien injective. Ensuite, on peut par exemple remarquer que :

$$\Lambda = \theta^{-1}(A) = \bigcup_{a \in A} \theta^{-1}(\{a\}).$$

Or par injectivité de θ , chaque image réciproque $\theta^{-1}(\{a\})$ est soit vide, soit égale à un singleton. Dans tous les cas elle est finie. Donc comme union finie d'ensembles finis, Λ est finie; son cardinal vérifie :

$$\text{Card}(\Lambda) \leq \sum_{a \in A} \text{Card}(\theta^{-1}(\{a\})) \leq \sum_{a \in A} 1 = \boxed{\text{Card}(A)}.$$

Si Λ est de cardinal maximal, supposons que : $K \not\subset \bigcup_{a \in \Lambda} B_{a, \varepsilon}$. On pourrait alors choisir :

$$b \in K \setminus \bigcup_{a \in \Lambda} B_{a, \varepsilon} \supset K \setminus \Lambda.$$

L'ensemble $\tilde{\Lambda} = \Lambda \cup \{b\}$ serait de cardinal strictement supérieur à $\text{Card}(\Lambda)$, et vérifierait :

$$\forall (x, y) \in \tilde{\Lambda}^2, x \neq y \Rightarrow \|x - y\| > \varepsilon.$$

On aurait alors une contradiction sur la maximalité de $\text{Card}(\Lambda)$. Donc $K \subset \bigcup_{a \in \Lambda} B_{a, \varepsilon}$.

- 17) Soit $a \in \Lambda$, et montrons que $B_{a, \varepsilon/2} \subset B_{0, 1+\varepsilon/2}$. Pour cela, donnons-nous $x \in B_{a, \varepsilon/2}$. Par l'inégalité triangulaire on a :

$$\|x\| \leq \|x - a\| + \|a\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 1,$$

car $a \in S^{n-1}$. Par ailleurs, donnons-nous $a \neq b$ dans Λ et supposons qu'il existe un $x \in B_{a, \varepsilon/2} \cap B_{b, \varepsilon/2}$. Alors par l'inégalité triangulaire on aurait :

$$\|b - a\| \leq \|b - x\| + \|x - a\| \leq \varepsilon,$$

ce qui est absurde. Donc les $B_{a, \varepsilon/2}$ sont deux à deux disjointes pour $a \in \Lambda$. Puisque Λ est fini, on peut écrire :

$$\mu(B_{0, 1+\varepsilon/2}) \geq \mu\left(\bigcup_{a \in \Lambda} B_{a, \varepsilon/2}\right) = \sum_{a \in \Lambda} \mu(B_{a, \varepsilon/2}).$$

On en déduit : $\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^n \geq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^n \times \text{Card}(\Lambda)$, soit encore : $\boxed{\text{Card}(\Lambda) \leq \left(\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}\right)^n}$.

18) Dans cette question, on fixe $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Rappelons ensuite que S^{n-1} est compact (cf. question A-1)). Il est bien sûr non vide, puisqu'il contient par exemple $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$. On invoque ensuite les différentes questions de cette partie les unes après les autres :

- la question 15) montre qu'il existe un ensemble fini $A \subset S^{n-1}$ tel que : $S^{n-1} \subset \bigcup_{a \in A} B_{a, \varepsilon/2}$.

- puis on considère l'ensemble :

$$X = \{\text{Card}(\Lambda) / \Lambda \subset S^{n-1} \text{ et } \forall (x, y) \in \Lambda^2, x \neq y \Rightarrow \|x - y\| > \varepsilon\}$$

La question 16) montre qu'un tel ensemble Λ est nécessairement fini, si bien que la définition de X est légitime. De plus $\Lambda = \{e_1\}$ convient, donc l'ensemble X est non vide. Enfin, la question 16) montre qu'il est majoré, donc il admet un plus grand élément. Λ_n associé est alors de cardinal maximal, et une nouvelle invocation de la question 16) montre que :

$$S^{n-1} \subset \bigcup_{a \in \Lambda_n} B_{a, \varepsilon}$$

- la question 17) montre alors que : $\text{Card}(\Lambda) \leq \left(\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}\right)^n = 5^n$.

Partie D - Norme d'une matrice aléatoire

19) Soit $i \in [1, n]$, et remarquons que : $y_i = \sum_{j=1}^n M_{i,j}^{(n)} x_j$, avec $\sum_{j=1}^n x_j^2 = 1$.

De plus, les variables aléatoires $(M_{i,1}^{(n)}, \dots, M_{i,n}^{(n)})$ sont mutuellement indépendantes, car elles forment une sous-famille d'une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

La question B-11) montre alors immédiatement que y_i est α -sous-gaussienne. L'inégalité d'Orlicz (admise à la fin de la partie B) montre alors que :

$$\forall i \in [1, n], E(e^{\gamma y_i^2}) \leq 5.$$

L'indépendance mutuelle des $M_{i,j}^{(n)}$ fournit l'indépendance mutuelle des y_i , car chaque y_i s'écrit comme combinaison linéaire des $M_{i,j}^{(n)}$, et les différentes combinaisons linéaires ont des supports deux à deux disjoints. Donc par produit on obtient :

$$E(e^{\gamma \|y\|^2}) \leq 5^n.$$

Soit maintenant $r > 0$. Par stricte croissance de l'exponentielle et stricte positivité de γ on a :

$$P(\|y\| \geq r\sqrt{n}) = P(e^{\gamma \|y\|^2} \geq e^{\gamma r^2 n}).$$

Puis en utilisant l'inégalité de Markov il vient : $P(\|y\| \geq r\sqrt{n}) \leq (5e^{-\gamma r^2})^n$.

20) Il existe $t \in S^{n-1}$ tel que : $\|M^{(n)} t\| = \|M^{(n)}\|_{op}$, puis il existe $a \in \Lambda_n$ tel que : $t \in B_{a, 1/2}$. Par la question A-2) il vient alors :

$$\|M^{(n)}\|_{op} \leq \|M^{(n)} t - M^{(n)} a\| + \|M^{(n)}(a)\| \leq \frac{1}{2} \|M^{(n)}\|_{op} + \|M^{(n)}(a)\|,$$

soit encore : $\|M^{(n)}(a)\| \geq \frac{1}{2} \|M^{(n)}\|_{op}$.

Maintenant, soit $r > 0$, et supposons que $\|M^{(n)}\|_{op} \geq 2r\sqrt{n}$. Alors on obtient immédiatement :

$$\|M^{(n)}(a)\| \geq r\sqrt{n}.$$

les différentes
tion A-1)). Il est

En écrivant :

$$\{\|M^{(n)}\|_{op} \geq 2r\sqrt{n}\} \subset \bigcup_{a \in \Lambda_n} \{\|M^{(n)}(a)\| \geq r\sqrt{n}\},$$

et en utilisant le fait que Λ_n est fini, on obtient :

$$\begin{aligned} P(\|M^{(n)}\|_{op} \geq 2r\sqrt{n}) &\leq \sum_{a \in \Lambda_n} P(\|M^{(n)}(a)\| \geq r\sqrt{n}) \\ &\leq \sum_{a \in \Lambda_n} (5e^{-\gamma r^2})^n && \text{d'après 19)} \\ &= (5e^{-\gamma r^2})^n \times \text{Card}(\Lambda_n) \\ &\leq \boxed{(25e^{-\gamma r^2})^n} && \text{d'après C-17).} \end{aligned}$$