

I Autour de la fonction Gamma d'Euler

I.A.1) $f(t) = t^{x-1}e^{-t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$ donc $\int_0^1 f(t)dt$ existe si et seulement si $x > 0$.

Puisque $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{x+1}e^{-t} = 0$, $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(\frac{1}{t^2})$ donc $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ existe pour tout x .

Le domaine de définition de Γ est donc $D =]0, +\infty[$.

I.A.2) On intègre par parties pour $x > 0$: $\Gamma(x+1) = [-e^{-t}t^x]_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt = x\Gamma(x)$ puisque l'expression entre crochets a pour limite 0 en 0 et en $+\infty$.

On en déduit par récurrence, pour $n \geq 1$ et $x > 0$: $\Gamma(x+n) = \Gamma(x) \prod_{k=0}^{n-1} (x+k)$.

Pour $x=1$ on obtient avec $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$, $\Gamma(n+1) = n!$ donc $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour $n \geq 1$.

I.A.3) Dans la première intégrale on pose $t = u^{1/2}$ (bijection de classe C^1 de $]0, +\infty[$ dans lui-même):

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \int_0^{+\infty} e^{-u} \frac{1}{2} u^{-1/2} du = \frac{1}{2} \Gamma(1/2) = \Gamma(3/2).$$

Dans la seconde intégrale on pose $t = u^{1/4}$ (bijection de classe C^1 de $]0, +\infty[$ dans lui-même):

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^4}dt = \int_0^{+\infty} e^{-u} \frac{1}{4} u^{-3/4} du = \frac{1}{4} \Gamma(1/4) = \Gamma(5/4).$$

I.B.1) Pour $t > 0$ fixé et x variant entre a et b , $e^{x \ln t}$ est compris entre $e^{a \ln t}$ et $e^{b \ln t}$ donc $t^x \leq \max(t^a, t^b) \leq t^a + t^b$.

I.B.2) Pour $x > 0$ et $t > 0$ posons $f(x, t) = t^{x-1}e^{-t} = e^{(x-1) \ln t - t}$. On calcule $\frac{\partial f^k}{\partial x^k}(x, t) = (\ln t)^k t^{x-1}e^{-t}$.

Pour $x > 0$ fixé: $|(\ln t)^k t^{x-1}e^{-t}| \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(\frac{1}{t^2})$ puisque $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{x+1}(\ln t)^k e^{-t} = 0$.

D'autre part $|(\ln t)^k t^{x-1}e^{-t}| \underset{t \rightarrow 0}{\sim} |\ln t|^k t^{x/2} \frac{1}{t^{1-x/2}} \underset{t \rightarrow 0}{=} o(\frac{1}{t^{1-x/2}})$ qui est intégrable sur $]0, 1]$ puisque $x > 0$. On

en déduit que $t \mapsto \frac{\partial f^k}{\partial x^k}(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

On peut maintenant appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégral:

- Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue et intégrable sur $]0, +\infty[$
- Pour tout $t \in]0, +\infty[$, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$
- Pour tout $x \in]0, +\infty[$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $t \mapsto \frac{\partial f^k}{\partial x^k}(x, t)$ est continue sur $]0, +\infty[$
- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout segment $[a, b] \subset]0, +\infty[$ il existe φ continue et intégrable sur $]0, +\infty[$ telle $\left| \frac{\partial f^k}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$: en appliquant le I.B.1 on peut prendre $\varphi(t) = \left| \frac{\partial f^k}{\partial x^k}(a, t) \right| + \left| \frac{\partial f^k}{\partial x^k}(b, t) \right|$.

On en conclut pour $x > 0$: $\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1}e^{-t}dt$.

I.C.1) Puisque $(\ln t)^2 > 0$ pour $t \neq 1$, on a $\Gamma''(x) > 0$ et donc Γ' est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

Avec $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ on déduit que $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$. On peut appliquer le théorème de Rolle à Γ sur $[1, 2]$ puisqu'elle est de classe C^1 et que $\Gamma(1) = \Gamma(2)$. On en déduit que Γ' s'annule sur $]1, 2[$, une seule fois puisque Γ' est strictement croissante. Il existe un unique ξ tel que $\Gamma'(\xi) = 0$ et sa partie entière est égale à 1.

I.C.2) Pour $0 < x < \xi$, $\Gamma'(x) < 0$ donc Γ est strictement décroissante. Pour $x > \xi$, $\Gamma'(x) > 0$ donc Γ est strictement croissante.

De $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et de $\Gamma(1) = 1$ on déduit par continuité de Γ en 1 que $\Gamma(x) \sim \frac{1}{x}$ au voisinage de 0^+ et par suite Γ a pour limite $+\infty$ en 0^+ .

Puisque Γ est croissante pour $x > 2$ et que $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ on déduit que Γ a pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

De $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ on déduit $\Gamma'(x+1) = \Gamma(x) + x\Gamma'(x)$. Par continuité de Γ' en 1 et avec l'équivalent ob. pour $\Gamma(x)$ en 0^+ on déduit que $\Gamma'(x) \sim -\frac{1}{x^2}$, donc Γ' a pour limite $-\infty$ en 0^+ .

Pour $x > 1$ on a $\Gamma'(x) > 0$ et par suite $\Gamma'(x+1) = \Gamma(x) + x\Gamma'(x) > \Gamma(x)$: on en déduit que Γ' a pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

La courbe représentative de Γ a pour asymptote la droite d'équation $x = 0$. Quand x tend vers $+\infty$ la croissance vers $+\infty$ est très rapide puisque $n!$ croît très vite vers $+\infty$.

II Une transformée de Fourier

II.A Pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$ posons $g(x, t) = e^{-t}t^{-3/4}e^{ixt}$. On calcule $\frac{\partial g^k}{\partial x^k}(x, t) = (it)^k e^{-t}t^{-3/4}e^{ixt}$.

Pour x fixé et $k \in \mathbb{N}$, $t \mapsto \left| \frac{\partial g^k}{\partial x^k}(x, t) \right| = e^{-t}t^{k-3/4}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ puisque $\Gamma(k+1/4)$ existe.

On peut appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégral en dominant la dérivée k -ième par $\varphi(t) = e^{-t}t^{k-3/4}$. F est donc de classe C^∞ et $F^{(k)}(x) = i^k \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{k-3/4}e^{ixt}dt$.

$$F(0) = \Gamma(1/4).$$

II.B.1) En utilisant le développement en série entière de e^{ix} on obtient: $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{-3/4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ixt)^n}{n!} dt$.

Appliquons le théorème d'intégration terme à terme pour la série de fonction $(\sum f_n)$ définie par $f_n(t) = e^{-t}t^{-3/4} \frac{(ixt)^n}{n!}$ (x étant fixé):

- f_n est continue et intégrable sur $]0, +\infty[$ puisque $|f_n(t)| = \frac{|x|^n}{n!} e^{-t}t^{n-3/4}$ et que $\Gamma(n+1/4)$ existe.

- La série $(\sum f_n)$ converge pour tout $t > 0$.

- Si on choisit $|x| < 1$, la série de terme général $u_n = \int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt$ converge.

En effet, $u_n = \frac{|x|^n}{n!} \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{n-3/4} dt = \frac{|x|^n}{n!} \Gamma(n+1/4)$. Pour $n \geq 2$, par croissance de la fonction Γ , on obtient $u_n \leq \frac{|x|^n}{n!} \Gamma(n+1) = |x|^n$ qui est le terme général d'une série géométrique convergente.

On obtient donc pour $|x| < 1$ en intégrant terme à terme: $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(ix)^n}{n!}$ avec $c_n = \Gamma(n+1/4)$.

Avec le résultat du I.A.2) on déduit: $c_n = c_0 \prod_{k=0}^{n-1} (k+1/4)$ avec $c_0 = \Gamma(1/4)$.

b) soit $\vartheta_n = c_n \frac{(ix)^n}{n!}$
 $\forall x \neq 0, \left| \frac{\vartheta_{n+1}}{\vartheta_n} \right| = \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| \cdot \frac{|x|}{n} = \frac{\Gamma(n+1+1/4)}{\Gamma(n+1/4)} \cdot \frac{|x|}{n} = \frac{n+1/4}{n} |x| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |x|$
 Si $|x| < 1 \Rightarrow \sum c_n \frac{(ix)^n}{n!} < \sum |x|^n < \infty \Rightarrow R=1$

II.C.1) Intégrons par parties: $F'(x) = i \int_0^{+\infty} t^{1/4} e^{(ix-1)t} dt = \left[it^{1/4} \frac{e^{(ix-1)t}}{(ix-1)} \right]_0^{+\infty} - \frac{i}{4(ix-1)} \int_0^{+\infty} t^{-3/4} e^{(ix-1)t} dt = -\frac{i}{4(ix-1)} F(x)$ puisque les limites en 0 et en $+\infty$ de l'expression entre crochets sont nulles. On a donc bien

$$F' + AF = 0 \text{ en posant } A(x) = \frac{i}{4(ix-1)} = \frac{1}{4(x+i)}.$$

c) On obtient $A(x) = \frac{x-i}{4(x^2+1)}$ dont une primitive est $G(x) = \frac{1}{8} \ln(1+x^2) - \frac{i}{4} \arctan x$.

On en déduit que $(Fe^G)' = (F' + FG')e^G = 0$ d'où $F(x) = Ce^{-G(x)}$ avec $C = F(0) = \Gamma(1/4)$.

On obtient donc $F(x) = \Gamma(1/4)(1+x^2)^{-1/8} e^{\frac{i}{4} \arctan x}$.

Partie III "Autour de la loi de Poisson"

a) $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda t} \quad \forall t \in \mathbb{R}$
 $\Rightarrow G_X(t) = e^{\lambda(t-1)} ; \quad \forall t \in \mathbb{R} \hookrightarrow D_G = \mathbb{R}$

b) La fonction génératrice G_X est dérivable au point 1, alors X admet une espérance et une variance

avec $E(X) = G'_X(1) = \lambda$.

$V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2 = \lambda$.

c) $X \hookrightarrow P(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow P(p)$ avec X et Y indép

$$\begin{aligned} P(X+Y=n) &= P\left(\bigcup_{k=0}^n \{X=k, Y=n-k\}\right) = \sum_{k=0}^n P(X=k, Y=n-k) \\ &= \sum_{k=0}^n P(X=k) \cdot P(Y=n-k) \quad (X \text{ et } Y \text{ indép}) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \cdot \frac{p^{n-k}}{(n-k)!} e^{-p} \\ &= \frac{e^{-(\lambda+p)}}{n!} \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{\lambda^k p^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{e^{-(\lambda+p)}}{n!} (\lambda+p)^n \end{aligned}$$

D'où $X+Y \hookrightarrow P(\lambda+p)$.

3.) a) Pour récurrence, pour $n=1$; le résultat est vrai puisque $S_1 = X_1 \hookrightarrow P(\lambda)$.
 Soit $n \in \mathbb{N}^+$, supposons que $S_n \hookrightarrow P(n\lambda)$ et mg
 $S_{n+1} \hookrightarrow P((n+1)\lambda)$.

On a $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$.

Puisque les variables aléatoires (X_n) sont mutuellement indépendantes; alors $S_n = X_1 + \dots + X_n$ et X_{n+1} sont indépendantes.

D'après c) et l'hyp de récurrence.

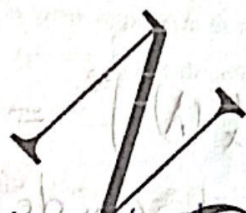
$S_{n+1} \hookrightarrow P(n\lambda + \lambda) = P((n+1)\lambda)$.

$$b) T_n = \frac{S_n - na}{\sqrt{na}}$$

$$\bullet \text{ On a } E(T_n) = E\left(\frac{S_n - na}{\sqrt{na}}\right) = \frac{1}{\sqrt{na}} \cdot (E(S_n) - na) = 0$$

$$\bullet V(T_n) = V\left(\frac{S_n - na}{\sqrt{na}}\right) = \frac{1}{na} \cdot (V(S_n)) = 1$$

Alors la variable aléatoire T_n est centrée et réduite.



4) a) D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

$$P(|T_n - E(T_n)| \geq \epsilon) \leq \frac{V(T_n)}{\epsilon^2} = \frac{1}{\epsilon^2}$$

$$\Leftrightarrow P(|T_n| \geq \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^2}$$

$$b) \text{ On a } \frac{1}{\epsilon^2} \xrightarrow[\epsilon \rightarrow 0]{\epsilon > 0} 0 \quad \forall \epsilon > 0, \exists C_0 \in \mathbb{R} \text{ by } \forall C > C_0$$

$$\frac{1}{\epsilon^2} < \epsilon. \quad \text{D'où } \forall \epsilon > 0, \exists C_0 \in \mathbb{R} \text{ by } \forall C > C_0; P(|T_n| \geq C) \leq \epsilon.$$

4) soient $a < b$ et $n \in \mathbb{N}$ by $\sqrt{n}a + a > 0$.

$$\text{On pose } I_n = \left\{ k \in \mathbb{N}; na + a\sqrt{na} \leq k \leq na + b\sqrt{na} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 (a \leq T_n \leq b) &= P(a \leq \frac{S_n - nd}{\sqrt{nd}} \leq b) \\
 &= P(nd + a\sqrt{nd} \leq S_n \leq nd + b\sqrt{nd}) \\
 &= P\left(\bigcup_{k \in I_n} (S_n = k)\right) \quad (S_n \text{ prend des valeurs entières}) \\
 &= \sum_{k \in I_n} P(S_n = k) \quad (\text{des événements deux à deux incompatibles})
 \end{aligned}$$

b) Puisque S_n suit une loi de Poisson de paramètre nd , alors

$$P(S_n = k) = \frac{(nd)^k}{k!} e^{-nd}$$

Ainsi $\lim_{n \rightarrow \infty} P(a \leq T_n \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b f(x) dx$.

7) Puisque $\int_0^{+\infty} f(t) dt < \infty$, alors $\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_c^{+\infty} f(t) dt = 0 \Rightarrow \exists c_2 > 0$ by $\forall c > c_2, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_c^{+\infty} f(t) dt \leq \varepsilon$

$$8) \bullet P(T_n \geq a) = P(a \leq T_n \leq c) + P(T_n > c)$$

$$|P(T_n \geq a) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^{+\infty} f(x) dx| \leq |P(T_n \geq a) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^c f(x) dx| + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_c^{+\infty} f(x) dx$$

$$\leq |P(a \leq T_n \leq c) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^c f(x) dx| + |P(T_n > c) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_c^{+\infty} f(x) dx|$$

$$\leq |P(a \leq T_n \leq c) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^c f(x) dx| + |P(T_n > c)| + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_c^{+\infty} f(x) dx$$

$$\bullet \text{ Puisque } c > c_2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_c^{+\infty} f(x) dx < \varepsilon$$

$$\bullet \text{ D'autre part on a } P(T_n > c) \leq P(T_n \geq c) \leq P(T_n \geq c)$$

$$\text{Sans } c > c_1, \text{ alors } P(T_n \geq c) \leq \varepsilon \text{ (d'après 4)}$$

$$\Rightarrow P(T_n > c) \leq \varepsilon$$

$$\bullet \text{ et on a } \lim_{n \rightarrow \infty} P(a \leq T_n \leq c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^c f(x) dx$$

$$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ by } \forall n \geq n_0, |P(a \leq T_n \leq c) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^c f(x) dx| \leq \varepsilon$$

Ainsi

Pour $c \gg \max(c_1, c_2)$ et $\forall n \geq n_0$

$$g) \left| P(T_n \geq a) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^{+\infty} f(x) dx \right| \leq \left| P(a \leq T_n \leq c) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^c f(x) dx \right| + \left| P(T_n > c) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_c^{+\infty} f(x) dx \right| \leq 3\varepsilon$$

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(T_n \geq a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^{+\infty} f(x) dx$

10) a) soit $\varepsilon > 0$; l'événement $(T_n = a) \subset (a \leq T_n \leq a + \varepsilon)$
 Alors $P(T_n = a) \leq P(a \leq T_n \leq a + \varepsilon)$
 b) $\Rightarrow 0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} P(T_n = a) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} P(a \leq T_n \leq a + \varepsilon) = \int_a^{a+\varepsilon} f(t) dt$
 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} P(T_n = a) \leq \int_a^{a+\varepsilon} f(t) dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(T_n = a) = 0$

a) $P(T_n > a) = P(T_n > \lfloor na \rfloor) + P(T_n = \lfloor na \rfloor)$
 $\varepsilon na \quad A_n = \sum_{k=0}^{\lfloor na \rfloor} \frac{(na)^k}{k!} e^{-na} = \sum_{k=0}^{\lfloor na \rfloor} P(S_n = k) = P(S_n \leq \lfloor na \rfloor)$
 $= P\left(\frac{S_n - na}{\sqrt{na}} \leq 0\right) = P(T_n \leq 0)$ (puisque S_n ne prend que des valeurs entières)

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(T_n \leq 0)$
 $= \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - P(T_n > 0)$
 $= \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) dt$ (car $P(T_n = 0) = 0$)
 $= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow A_n \sim \frac{1}{2} e^{na}$

$$0 < \lambda < 1$$

$$g_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{t}{n\lambda}\right)^n e^t & \text{si } 0 \leq t < n\lambda \\ 0 & \text{si } t \geq n\lambda \end{cases}$$

a) $\forall t \geq 0$ (t fixe): $\frac{t}{\lambda} \geq 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq

$\forall n \geq n_0$: $\frac{t}{\lambda} < n \Leftrightarrow t < n\lambda$, d'où

$$\forall n \geq n_0: g_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n\lambda}\right)^n e^t = e^{n \ln\left(1 - \frac{t}{n\lambda}\right)} e^t$$

$$\text{or } n \ln\left(1 - \frac{t}{n\lambda}\right) \sim -n \cdot \frac{t}{n\lambda} = -\frac{t}{\lambda} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\frac{t}{\lambda}$$

Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(t) = e^{-\frac{t}{\lambda}} \cdot e^t = e^{t(1 - \frac{1}{\lambda})} = g(t)$

$\Leftrightarrow g_n \xrightarrow{C.S.} g$ sur $[0, +\infty[$.

b) • On a: $\forall n \in \mathbb{N}$, g_n est C. sur $[0, +\infty[$

• $g_n \xrightarrow{C.S.} g$ sur $[0, +\infty[$.

• $\forall t \in [0, n\lambda[$: $0 \leq g_n(t) = e^{n \ln\left(1 - \frac{t}{n\lambda}\right)} \cdot e^t$

$$\leq e^{n \left(-\frac{t}{n\lambda}\right)} \cdot e^t = g(t)$$

• $\forall t \in [n\lambda, +\infty[$: $g_n(t) = 0 \leq g(t)$

$\Rightarrow \forall t \in [0, +\infty[$: $0 \leq g_n(t) \leq g(t)$

D'après le T.C.D) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} g_n(t) dt = \int_0^{+\infty} g(t) dt$

$$= \int_0^{+\infty} g(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{t(1 - \frac{1}{\lambda})} dt$$

c) On a $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} g_n(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{t(1 - \frac{1}{\lambda})} dt$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{n\lambda} \left(1 - \frac{t}{n\lambda}\right)^n e^t dt = \frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda}} \left[e^{t(1 - \frac{1}{\lambda})} \right]_0^{+\infty}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (n\lambda)^{-n} \int_0^{n\lambda} (n\lambda - t)^n e^t dt = \frac{\lambda}{1 - \lambda}$$

13) On a la fonction $t \mapsto e^{\lambda t}$ est C^∞ , alors d'après la formule de Taylor avec reste intégrale entre $n\lambda$ et 0.

$$e^{n\lambda} = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0) \cdot (n\lambda)^k}{k!} + \frac{1}{n!} \int_0^{n\lambda} (n\lambda - t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

$$e^{n\lambda} = \sum_{k=0}^n \frac{(n\lambda)^k}{k!} + \frac{1}{n!} \int_0^{n\lambda} (n\lambda - t)^n e^{\lambda t} dt$$

14) $\sum_{k=0}^n P(S_n = k) = \sum_{k=0}^n \frac{(n\lambda)^k}{k!} e^{-n\lambda}$

D'après 13) $= 1 - \frac{e^{-n\lambda}}{n!} \int_0^{n\lambda} (n\lambda - t)^n e^{\lambda t} dt$

D'après 12) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n\lambda)^n}{n!} \int_0^{n\lambda} (n\lambda - t)^n e^{\lambda t} dt = \frac{\lambda}{1-\lambda}$

Alors

$$\Rightarrow \frac{e^{-n\lambda}}{n!} \int_0^{n\lambda} (n\lambda - t)^n e^{\lambda t} dt \sim \frac{\lambda}{1-\lambda} \cdot \frac{(n\lambda)^n}{n!} e^{-n\lambda}$$

Soit $U_n = \frac{\lambda}{1-\lambda} \frac{(n\lambda)^n}{n!} e^{-n\lambda}$

$$\left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| = \frac{(n+1)^n \lambda^{n+1} e^{-(n+1)\lambda}}{(n+1)! n^n \lambda^n e^{-n\lambda}}$$

$$= \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \cdot \lambda e^{-\lambda} = e^{n \ln(1 + \frac{1}{n})} \lambda e^{-\lambda} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\lambda} \lambda$$

or $0 < \lambda < 1 \Rightarrow \ln(1-\lambda) < -\lambda \Leftrightarrow \lambda < e^{-\lambda} \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} > e^{-\lambda} \Leftrightarrow \frac{\lambda}{e^{-\lambda}} > 1$

D'après la série

$$\sum_{n \geq 0} U_n \text{ cv. } \Rightarrow U_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{-n\lambda}}{n!} \int_0^{n\lambda} (n\lambda - t)^n e^{\lambda t} dt = 0$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n P(S_n = k) = 1$$