

Série I

Probabilité et variable aléatoire

Exercice 1 .

On lance une pièce truquée indéfiniment. La probabilité de tomber sur pile est $p \in]0, 1[$.

On considère une expérience aléatoire B consistant à lancer la pièce jusqu'à obtenir pile.

Calculer $P(B)$.

(Ind : considérer, A_n : l'événement, les n premiers lancers sont des faces).

Exercice 2 .

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ tel que la série $\sum_{n \geq 0} P(A_n)$ converge.

Montrer que l'événement $\bigcap_{n=0}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$ est négligeable.

Exercice 3 .

Une urne contient une boule rouge. Un joueur lance un dé équilibré indéfiniment de fois. S'il obtient un six, il tire une boule dans l'urne. Sinon, il rajoute une boule blanche dans l'urne et répète la manipulation. Sachant qu'il est presque sûr que le joueur fera un six, quelle est la probabilité que la boule tirée soit rouge ?

(Ind : On considère le système complet d'événements $(A_n)_{n \geq 1}$ avec A_n : le jour fait son premier 6 lors du n ième lancer

Exercice 4 .

On lance un dé non truqué à 5 faces et on regarde le nombre inscrit sur sa face inférieure. On note p_n la probabilité que la somme des résultats obtenus

lors des n premiers lancers soit paire.

1) Calculer p_1 et p_2 .

2) Montrer que la suite $(p_n)_{n \geq 1}$ vérifie la relation $p_{n+1} = \frac{2}{5}p_n + \frac{3}{5}(1 - p_n)$.

3) En déduire la valeur de p_n pour $n \geq 1$ et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$.

4) On lance maintenant le dé indéfiniment de fois et on appelle X le rang du premier 5 obtenu. On admet que X est une variable aléatoire réelle.

a) Déterminer la loi de probabilité de X .

b) Déterminer la fonction génératrice de X . En déduire l'espérance et la variance de X .

Exercice 5 .

On effectue une suite de lancers d'une pièce équilibrée. On note X la variable aléatoires qui donne le nombre de lancers effectués pour obtenir pour la première fois un pile et un face successives.

1) Justifier que $X(\Omega) = \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

2) Déterminer la loi de X .

3) Vérifier que X admet une espérance et calculer $E(X)$.

4) a) Justifier que la série entière $\sum_{n \geq 1} n^2 x^{n-1}$ est de rayon de convergence 1 et calculer sa somme.

b) Vérifier que X admet une variance et calculer $V(X)$.

Exercice 6 .

Soit H la fonction définie par : $H(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \quad \forall x > 1$.

On considère $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé, $\lambda > 0$ et (X, Y) un couple de variable aléatoires sur $\Omega \times \Omega$ à valeurs dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ vérifiant pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ par :

$$P(X = n, Y = k) = \frac{\lambda}{(n+1)^{k+3}}.$$

1) Donner la valeur de λ que que la loi précédente soit une loi de couple.

(On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.)

2) a) Donner la loi de X .

b) Justifier que X admet une espérance $E(X)$ et donner sa valeur.

3) Justifier que X n'admet pas de variance.

4) Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $P(Y = k)$ en fonction de $H(k+3)$.

5) En déduire que $\sum_{k=2}^{+\infty} (H(k) - 1) = 1$.

6) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^x = 1$.

7) En déduire un équivalent de la suite de terme général $v_k = P(Y = k)$ quand $k \rightarrow +\infty$.

8) Montrer que la variable Y admet une espérance et une variance.

Exercice 7 .

On considère une entreprise de construction produisant des objets sur deux chaînes de montage A et B qui fonctionnent indépendamment l'une de l'autre. Pour une chaîne donnée, les fabrications des pièces sont indépendantes. On suppose que A produit 60% des objets et B produit 40% des objets. La probabilité qu'un objet construit par la chaîne A soit défectueux est 0.1 alors que la probabilité pour qu'un objet construit par la chaîne B soit défectueux est 0.2.

1) On choisit au hasard un objet à la sortie de l'entreprise. On constate que cet objet est défectueux. Calculer la probabilité de l'événement "l'objet provient de la chaîne A ".

On suppose de plus que le nombre d'objets produits en une heure par A est une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 20$. On

considère la variable aléatoire X représentant le nombre d'objets défectueux produits par la chaîne A en une heure.

2) Rappeler la loi de Y ainsi que la valeur de l'espérance et de la variance de Y .

3) Soient k et n deux entiers naturels, déterminer la probabilité conditionnelle $P(X = k | Y = n)$.

4) En déduire que X suit une loi de Poisson de paramètre 2 .

Exercice 8 .

1) Démontrer que la famille

$$\left(\frac{i+j}{2^{i+j}}\right)_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$$

est sommable et calculer sa somme.

2) Soit X et Y deux variables aléatoires sur un même espace probabilisé à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi conjointe du couple (X, Y) vérifie :

$$\text{pour tout } (i, j) \in \mathbb{N}^2, P(X = i, Y = j) = P[(X = i) \cap (Y = j)] = \frac{i+j}{2^{i+j+3}}.$$

a) Vérifier que la relation ci-dessus définit bien une loi conjointe.

b) Démontrer que les variables aléatoires X et Y suivent une même loi.

c) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 9 .

On considère $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. mutuellement indépendantes à valeurs dans $\{-1, 1\}$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

1) Calculer $E(S_n)$.

2) On suppose que T une v.a. tel que que T et $-T$ on même loi.

a) Montrer que $E(\sin(T)) = 0$.

b) Déduire que si S et T sont deux v.a. indépendantes, $E(\cos(S + T)) = E(\cos(S))E(\cos(T))$.

3) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, E(\cos(tS_n)) = (\cos(t))^n$.

Exercice 10 .

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire discrète qui prend ses valeurs dans un ensemble $\{x_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}_+$. On pose $p_n = P(X = x_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Soit $t \geq 0$, montrer que la variable aléatoire e^{-tX} est d'espérance finie.

Dans la suite, on notera pour $t \geq 0$, $\Phi_X(t) = E(e^{-tX}) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n e^{-tx_n}$.

2. Montrer que Φ_X est à valeurs dans $[0, 1]$ et qu'elle est continue sur $[0, +\infty[$.
3. a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Prouver pour tout $\lambda > 0$ et pour tout $x \geq 0$

$$0 \leq x^k e^{-\lambda x} \leq \frac{k^k}{\lambda^k} e^{-k}.$$

b) En déduire que Φ_X est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ et donner l'expression de ses dérivées successives.

4. Soit a et b deux réels positifs. Montrer pour tout $t \geq 0$, $\Phi_{aX+b}(t) = e^{-bt} \Phi_X(at)$.
5. On considère une variable aléatoire discrète Y à valeur dans $\mathbb{R}_+$ et on suppose que X et Y sont indépendantes. Montrer que l'on a $\Phi_{X+Y} = \Phi_X \Phi_Y$.
6. On suppose que X suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Déterminer l'ensemble des réels t tel que e^{-tX} soit d'espérance finie et donner l'expression de $E(e^{-tX})$.
7. a) On suppose que X suit la loi poisson de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer l'ensemble des réels t tel que e^{-tX} soit d'espérance finie et donner l'expression de $E(e^{-tX})$.
- b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes qui suivent la loi de poisson de même paramètre $\lambda > 0$ et $S_n = X_1 + \dots + X_n$.
- a) Montrer S_n suit une loi de poisson de paramètre $n\lambda$.
- b) Soit $a > 0$, montrer que $P(S_n \leq na) \leq e^{n(\lambda(e^{-t}-1)+at)}$ si $t \geq 0$ et $P(S_n \geq na) \leq e^{n(\lambda(e^{-t}-1)+at)}$ si $t \leq 0$.