

Série II Probabilité et Variable aléatoire

Exercice 1 .

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifiant pour tout couple d'entiers (n, p)

$$P(X = n, Y = p) = \begin{cases} \frac{\lambda^n e^{-\lambda} \alpha^p (1 - \alpha)^{n-p}}{p!(n-p)!} & \text{si } 0 \leq p \leq n \\ 0 & \text{si } p > n \end{cases}$$

où α et λ sont des constantes vérifiant $0 < \alpha < 1$ et $\lambda > 0$.

1. Vérifier que l'expression précédente définit bien une loi de couple.
2. Déterminer les lois marginales X et Y .
3. les variables aléatoires X et Y sont elles indépendantes ?
4. On pose $Z = X - Y$. Déterminer la loi de Z .
5. a) Soit $n \in \mathbb{N}$ Calculer la probabilité conditionnelle $P(Y = j | Z = n)$.
b) Dédire que les variables aléatoires Z et Y sont indépendantes.
6. On suppose que le nombre d'enfants d'une famille tunisienne est une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda = 2,1$. on admet que la probabilité d'avoir un garçon est $\alpha = 0.51$ et que les naissances sont indépendantes.
Trouver la probabilité que cette famille ait i enfants dont j sont des garçons.

Exercice 2 .

Soient $N \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$.

On considère N variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_N$ définies sur un même espace probabilisé (Ω, τ, P) , mutuellement indépendantes et suivent la même loi géométrique de paramètre p .

1. Soit $i \in \{1, \dots, N\}$ et $n \in \mathbb{N}$ Déterminer $P(X_i \leq n)$.
2. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \min\{X_i, i \in \{1, \dots, N\}\}$. c'est à dire $\forall \omega \in \Omega, Y(\omega) = \min(X_1(\omega), \dots, X_N(\omega))$
(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $P(Y > n)$. En déduire $P(Y = n)$.
(b) Reconnaître la loi de Y . En déduire $E(Y)$.

Exercice 3 .

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$. Elles suivent la même loi définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = P(Y = k) = pq^k, \quad p \in]0, 1[\text{ et } q = 1 - p.$$

On considère alors les variables U et V définies par $U = \sup(X, Y)$ et $V = \inf(X, Y)$.

1. Déterminer la loi du couple (U, V) .
2. Déterminer la loi marginale de U .
On admet que $V(\Omega) = \mathbb{N}$ et que, $\forall n \in \mathbb{N}, P(V = n) = pq^{2n}(1 + q)$.
3. Prouver que la variable aléatoire $W = V + 1$ suit une loi géométrique. En déduire l'espérance de V .
4. Les variables aléatoires U et V sont elles indépendantes ?

Exercice 4 .

On considère un espace probabilisé (Ω, τ, P) et deux variables aléatoires X et Y définies sur Ω et à valeurs dans $\{1, \dots, n+1\}$ où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On pose, pour tout couple $(i, j) \in \{1, \dots, n+1\}^2$. $a_{i,j} = P(X = i, Y = j)$ On suppose que que

$$a_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{2n} & \text{si } |i + j - (n+2)| = 1 \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

1. Vérifier que la famille $(a_{i,j})_{1 \leq (i,j) \leq n+1}$ ainsi définie est bien une loi de probabilité de couple.
2. Ecrire la matrice A dont le terme général est $a_{i,j}$ et vérifier que A est diagonalisable.
3. Déterminer les lois marginales de probabilité de X et Y .
4. Pour tout couple $(i, j) \in \{1, \dots, n+1\}^2$, on pose

$$b_{i,j} = P(X = i | Y = j)$$

et on considère la matrice $B = (b_{i,j})_{i,j}$.

Montrer que le vecteur $V = \begin{pmatrix} P(X=1) \\ \vdots \\ P(X=n+1) \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de B

Exercice 5 .

On considère une Variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ et on pose pour tout $\forall k \in \mathbb{N}$, $p_k = P(X = k)$. On suppose que

$$0 < p_0 < 1 \quad p_{k+1} = \left(\mu + \frac{\lambda}{k+1}\right)p_k$$

où λ et μ sont deux constantes réelles.

1. Montrer que $\lambda + \mu > 0$.
2. On suppose dans cette question que $\mu = 0$.
 - a) Montrer que $p_k = \frac{\lambda^k}{k!} p_0$.
 - b) Exprimer $\sum_{k=0}^{+\infty} p_k$ en fonction de λ et p_0 .
 - c) On déduit que X suit la loi de poisson de paramètre λ . Donner alors son espérance et sa variance.

On suppose dans la suite que $\mu \neq 0$. On pose $\alpha = -\frac{\lambda + \mu}{\mu}$.

3. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

$$p_k = p_0 \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} (-\mu)^k.$$

4. On suppose dans cette question $\alpha \in \mathbb{N}$.
 - a) Montrer que $\mu < 0$.
 - b) Montrer pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$p_k = \begin{cases} p_0 C_\alpha^k (-\mu)^k & \text{si } k \leq \alpha \\ 0 & \text{si } k > \alpha \end{cases}$$

. c) Calculer $\sum_{k=0}^{\alpha} p_k$ en fonction de μ , p_0 et α . Puis déduire que $p_0 = (1 - \mu)^{-\alpha}$.

d) Montrer alors que X suit la loi binomiale $B(\alpha, \frac{-\mu}{1-\mu})$.

5. Donner son espérance et sa variance.
6. On suppose dans cette question $\alpha \notin \mathbb{N}$.
On considère la fonction génératrice

$$G : t \mapsto G(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k t^k, \quad t \in [-1, 1].$$

- a) Montrer G est bien définie et continue sur $[-1, 1]$.
- b) Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k \geq 0} p_k z^k$ est $\frac{1}{|\mu|}$ et que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} p_k t^k = p_0 (1 - \mu t)^\alpha \quad t \in] -\frac{1}{|\mu|}, \frac{1}{|\mu|} [.$$

- c) En déduire que $\mu \in [-1, 1[$ et que $p_0 = (1 - \mu)^{-\alpha}$.
- d) Montrer que G est deux fois dérivable en 1.
- e) En déduire que X admet une espérance et une variance que l'on déterminera.