

Série II/ Variable aléatoire

Exercice 1 .

1) Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Alors,

$$\forall n, k \in \mathbb{N}, P(X > n + k | X > n) = P(X > k).$$

2) Si X est une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ avec $P(X = 1) = p \in]0, 1[$ vérifiant la condition d'absence de mémoire :

$$\forall n, k \in \mathbb{N}, P(X > n + k | X > n) = P(X > k),$$

alors X suit une loi géométrique de paramètre p .

Exercice 2 .

Une usine fabrique des pièces dont une proportion inconnue p est défectueuse, et on souhaite trouver une valeur approchée de p . On effectue un prélèvement de n pièces. On suppose que le prélèvement se fait sur une population très grande, et donc qu'il peut s'apparenter à une suite de n tirages indépendants avec remise. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses dans un tirage à n pièces.

1) Quelle est la loi de X_n ? Sa moyenne ? Sa variance ?

2) a) Démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$ $P(|\frac{X_n}{n} - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$

b) Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$ $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$.

c) Dédurre que $\varepsilon > 0$ $P(|\frac{X_n}{n} - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$.

3) En déduire une condition sur n pour que $\frac{X_n}{n}$ soit une valeur approchée de p à 10^{-2} près avec une probabilité supérieure ou égale à 0.95.

Exercice 3 .

Soit (ω, A, P) un espace probabilisé. Si X est une variable aléatoire à réelles discrètes sur (ω, A, P) , la fonction génératrice des moments de X , lorsqu'elle existe, est la fonction numérique de la variable réelle t , $M_X : t \rightarrow E(e^{tX})$, où $E(e^{tX})$ désigne l'espérance de la variable aléatoire e^{tX} .

Soit X une variable aléatoire discrète réelle infinie, notons I_X l'ensemble des réels t pour lesquels M_X existe et finie

1) a) Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ tq : $a \leq c \leq b$, montrons que : $e^c \leq e^a + e^b$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

b) Dédurre que I_X est un intervalle contenant 0.

2) Soit Y une variable aléatoire discrète réelle qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer la fonction génératrice des moments M_Y de Y .

3) On suppose que la fonction M_X est définie sur un intervalle de la forme $] -a, a[$, ($a > 0$). Notons $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une énumération des valeurs de X .

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in] -a, a[$, $u_n(t) = P(X = x_n)e^{tx_n}$. Soit $\alpha > 0$ tel que $]-\alpha, \alpha[\subset] -a, a[$, et soit $\rho \in]\alpha, a[$.

a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ tout $t \in] -\alpha, \alpha[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n^{(k)}(t)| \leq P(X = x_n)(|x_n|)^k e^{\alpha|x_n|}$, où $u_n^{(k)}$ désigne la dérivée k -ème de la fonction u_n .

b) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $M_k > 0$, pour tout $t \in] -\alpha, \alpha[$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n^{(k)}(t)| \leq M_k P(X = x_n) e^{\alpha|x_n|}.$$

c) En déduire que M_X est de classe C^∞ sur $] -a, a[$, et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $E(X^k) = M_X^{(k)}(0)$.

4) En déduire l'espérance et la variance d'une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Exercice 4.

Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit S_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et $x \in [0; 1]$ et $X_n = \frac{S_n}{n}$.

Donner les valeurs de l'espérance et de la variance de X_n . Justifier

$$\forall \alpha > 0, P(|X_n - x| > \alpha) \leq \frac{1}{4n\alpha^2}$$

2. On introduit la variable aléatoire $Y_n = f(X_n)$ et on pose $B_n(f)(x) = E(Y_n)$. Vérifier que $B_n(f)(x)$ est une fonction polynôme de la variable x .

Soit $\epsilon > 0$. La fonction f étant continue sur le segment $[0; 1]$, elle y est uniformément continue (théorème de Heine). Ceci assure l'existence d'un réel $\alpha > 0$ vérifiant

$$\forall (x, y) \in [0; 1]^2, |y - x| < \alpha \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq \epsilon.$$

Au surplus, la fonction f étant continue sur un segment, elle y est bornée (théorème de la borne atteinte). Ceci permet d'introduire un réel M vérifiant

$$\forall x \in [0; 1], |f(x)| \leq M$$

Exercice 5 Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1) a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $\sum_{k=0}^n k P(X=k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - n P(X=n)$

b) $\forall n$ si la série $\sum_{k=0}^{\infty} P(X > k)$ cv, alors $E(X)$ existe et

c) $\forall n$ si $E(X)$ existe et finie, alors $\sum_{k=0}^{\infty} P(X > k)$ cv

et que $E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X > k)$

2) Application: on considère une urne contenant N boules numérotées de 1 à N . on effectue n tirages successifs d'une boule de l'urne et on X le plus grand nombre obtenu.

a) Calculer $P(X \leq k)$ et donner la loi de X .

b) Justifier que $E(X)$ existe et fini et calculer $E(X)$.

c) $\forall n$ $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{E(X)}{N} = \frac{n}{n+1}$

Suiv. Ex 4

3. Avec les notations ci-dessus, établir

$$\sum_{|\frac{k}{n} - x| > \alpha} (f(\frac{k}{n}) - f(x)) P(X_n = \frac{k}{n}) \leq \frac{M}{2n\alpha^2}$$

et $\sum_{|\frac{k}{n} - x| \leq \alpha} (f(\frac{k}{n}) - f(x)) P(X_n = \frac{k}{n}) \leq \epsilon.$

4. Conclure qu'à partir d'un certain rang, on a

$$\forall x \in [0; 1], |B_n(f)(x) - f(x)| \leq 2\epsilon.$$

Ce résultat constitue une démonstration probabiliste du théorème de Stone-Weierstrass assurant que toute fonction réelle continue sur un segment peut être uniformément approchée par une fonction polynôme.

Exercice 6

Soit $\pi = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ $a > 0$ et $b > 0$

On dit que π est radiale si $a = b$

Soit $(\Omega, \mathcal{G}, P)$ un espace probabilisé, X et Y deux v.a. réelles indépendantes suivant la m loi géométrique de paramètre $p \in]0; 1[$.

Pour $\omega \in \Omega$ on pose $\pi(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & X(\omega) \\ Y(\omega) & 0 \end{pmatrix}$

$\forall \pi$ $P\{\omega \in \Omega \text{ tq } \pi(\omega) \text{ est radiale}\} = \frac{p}{2-p}$