

Série IV "Variable aléatoire"

Exercice 1

On considère une variable aléatoire discrète X à valeurs dans $\mathbb{N}$ définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On note I_X l'ensemble des réels t tels que l'espérance $E(e^{tX}) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{tk} P(X = k)$, de la variable aléatoire e^{tX} , soit finie. Pour $t \in I_X$, on pose

$$\mathcal{L}_X(t) = E(e^{tX}).$$

1. Dans cette question, on considère une variable aléatoire de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ de paramètre $p \in [0, 1]$. Justifier que $I_{\mathcal{B}(p)} = \mathbb{R}$ et calculer $\mathcal{L}_{\mathcal{B}(p)}(t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.
2. Dans cette question, on considère une variable aléatoire de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Prouver que $I_{\mathcal{P}(\lambda)} = \mathbb{R}$ et calculer $\mathcal{L}_{\mathcal{P}(\lambda)}(t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que $0 \in I_X$ et que si $t_0 \in I_X$, alors $] -\infty, t_0] \subset I_X$; puis en déduire que I_X est un intervalle non minoré de $\mathbb{R}$.

On suppose dans la suite de l'exercice que $I_X = \mathbb{R}$.

4. Montrer que pour tout $a \geq 0$, $P(X \geq a) \leq \inf_{t \geq 0} e^{-at} \mathcal{L}_X(t)$.
5. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la variable X^n est d'espérance finie.
6. Montrer que l'application $\mathcal{L}_X : t \in \mathbb{R} \mapsto \mathcal{L}_X(t)$ est développable en série entière au voisinage de 0 et que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{L}_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{E(X^n)}{n!} t^n.$$

On considère une variable aléatoire discrète Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que $I_Y = \mathbb{R}$ et pour tout réel t , on a : $\mathcal{L}_Y(t) = \mathcal{L}_X(t)$.

7. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E(X^n) = E(Y^n)$.
8. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, les deux séries $\sum_{k \geq 0} e^{ikt} P(X = k)$ et $\sum_{k \geq 0} e^{ikt} P(Y = k)$ convergent et que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} e^{ikt} P(X = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{ikt} P(Y = k).$$

9. Prouver que l'application $\psi : t \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} e^{ikt} P(X = k)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
10. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X = n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} \psi(t) dt$.
11. En déduire que X et Y suivent la même loi.
12. Dans cette question, on suppose de plus que les deux variables X et Y sont indépendantes. Montrer que $I_{X+Y} = \mathbb{R}$ et que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{L}_{X+Y}(t) = \mathcal{L}_X(t) \mathcal{L}_Y(t).$$

13. Dans cette question, on suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 > 0$, Y suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_2 > 0$ et que X et Y sont indépendantes. Déterminer la loi de la variable aléatoire $X + Y$.

Exercice 2

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; $\alpha < \beta$ et $s \in \mathbb{R}$.

1. Prouver que $\forall y \in [\alpha, \beta]$, $0 < (\beta - \alpha)e^{sy} \leq (\beta - y)e^{s\alpha} + (y - \alpha)e^{s\beta}$.
2. En déduire que si $0 \in [\alpha, \beta]$, alors $\beta e^{s\alpha} - \alpha e^{s\beta} > 0$.
3. Montrer, à l'aide d'une étude de fonction, que si $0 \in [\alpha, \beta]$, alors

$$\ln(\beta e^{s\alpha} - \alpha e^{s\beta}) \leq \frac{(\beta - \alpha)^2}{8} s^2 + \ln(\beta - \alpha).$$

Soit Y une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et prenant ses valeurs dans $[\alpha, \beta]$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; $\alpha < \beta$.

4. Justifier que Y admet une espérance finie et que $\alpha \leq E(Y) \leq \beta$. Puis en déduire que $|Y - E(Y)| \leq \beta - \alpha$.
5. Montrer que Y admet une variance finie et que

$$V(Y) = \min_{x \in \mathbb{R}} E((Y - x)^2) \leq E\left(\left(Y - \frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2\right) \leq \frac{(\beta - \alpha)^2}{4}.$$

6. Prouver que si $E(Y) = 0$, alors $\forall s \in \mathbb{R}$, $0 \leq (\beta - \alpha)E(e^{sY}) \leq \beta e^{s\alpha} - \alpha e^{s\beta}$.
7. En déduire que si $0 \in [\alpha, \beta]$ et $E(Y) = 0$, alors $\forall s \in \mathbb{R}$, $E(e^{sY}) \leq e^{\frac{s^2}{2\sigma_0^2}}$, avec $\sigma_0 = \frac{2}{\beta - \alpha}$.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes prenant leurs valeurs dans $[a, b]$, avec $a, b \in \mathbb{R}$; $a < b$, et définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On pose

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad M_n = \frac{S_n}{n} \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{i=1}^n \gamma_i X_i,$$

où $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ sont des réels non tous nuls.

8. Justifier que

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \forall s \in \mathbb{R}, E(e^{s(X_i - E(X_i))}) \leq e^{\frac{s^2}{2\sigma_1^2}},$$

$$\text{avec } \sigma_1 = \frac{2}{b - a}.$$

9. Prouver que $\forall s \in \mathbb{R}$, $E(e^{s(T_n - E(T_n))}) \leq e^{\frac{s^2}{2\sigma_2^2}}$, avec $\sigma_2 = \sigma_1 \left(\sum_{i=1}^n \gamma_i^2\right)^{-\frac{1}{2}}$.

10. Montrer que $\forall s > 0, \forall t > 0$, $P(T_n - E(T_n) \geq t) \leq e^{-st + \frac{s^2}{2\sigma_2^2}}$.

11. En déduire que $\forall t > 0$, $P(T_n - E(T_n) \geq t) \leq e^{-\frac{t^2}{2\sigma_3^2}}$, avec $\sigma_3 = \frac{1}{\sigma_2}$.

12. Montrer que si de plus les variables $X_1, X_2, \dots, X_n$ suivent la même loi, alors on a l'inégalité suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, P(|M_n - E(X_1)| \geq \varepsilon) \leq 2e^{-\frac{n\varepsilon^2}{2\sigma^2}},$$

$$\text{avec } \sigma = \frac{1}{\sigma_1} = \frac{b - a}{2}.$$

On suppose dans toute la suite que les variables mutuellement indépendantes $X_1, X_2, \dots, X_n$ suivent une même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$.

13. Justifier que $\forall \varepsilon > 0$, $P(|M_n - p| \geq \varepsilon) \leq 2e^{-2n\varepsilon^2}$.

14. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, prouver que

$$\forall \varepsilon > 0, P(|M_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}.$$

15. Montrer qu'il existe un réel $c > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\varepsilon > 0$ vérifiant $n\varepsilon^2 > c$, on a :

$$2e^{-2n\varepsilon^2} < \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}.$$

Conclure.

Exercice 3

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la même loi définie par :

$$P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \frac{1}{2}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ et on prend $S_0 = 0$.

1. Déterminer l'espérance et la variance de S_n .
2. Soient $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{n\varepsilon^2}.$$

3. Justifier que pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a $P(S_{2n} = 0) = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$.

En déduire que $P(S_{2n} = 0) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

(On rappelle la formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$.)

4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\alpha_n = P\left(\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \mid S_{2n} = 0\right)$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$.

5. On rappelle que la fonction génératrice G_X est définie par : $G_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X = n)t^n$, $t \in [-1, 1]$.

a) Vérifier que la fonction que la fonction génératrice est aussi définie pour tout nombre complexe z de module ≤ 1 . On pose alors

$$G_X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X = n)z^n, \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| \leq 1.$$

- b) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,

$$P(X = k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G_X(e^{it}) e^{-ikt} dt.$$

Dans la suite, on considère la série entière $\sum_{n \geq 0} P(S_{2n} = 0)x^{2n}$ et on désigne par H sa somme.

6. Déterminer le rayon de convergence R de cette série. A-t-on convergence au point $x = R$?
7. Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $\left(2n, \frac{1}{2}\right)$. Expliciter la fonction génératrice G_Y de Y .
8. Montrer

$$P(S_{2n} = 0) = P(Y = n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n}\left(\frac{t}{2}\right) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(u) du.$$

9. En déduire que, pour tout $x \in]-R, R[$,

$$H(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{1 - x^2 \cos^2(u)}.$$

10. Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$,

$$H(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$