

Correction Probabilité et variable aléatoire

Exercice 1

La probabilité de tomber sur pile est: $P(P) = p$
avec $p \in]0, 1[$

A_n : les n premiers lancers sont des faces.

$\Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$: tous les lancers sont des faces

B : obtenir pile;

d'où $C_B = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$

or la suite $(A_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

car la réalisation de A_n implique la réalisation de A_{n+1} .

$$\text{D'où } P(C_B) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} (1-p)^n = 0$$

$$\Rightarrow P(B) = 1$$

Exercice 2

Soit $B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$

$B_{n+1} = \bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k$

$B_n = A_n \cup B_{n+1}$

$\Rightarrow B_n \subset B_{n+1}$

$\Rightarrow (B_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.

d'après le th. de continuité monotone.

$$P\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n)$$

$$\Rightarrow P\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)$$

$$\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = 0$$

car c'est le reste d'une

$(n-1)$ de série cv $\sum_{n \geq 0} P(A_n)$

Exercice 3

B: la boule tirée est rouge

A_n : le joueur fait son premier 6 lors du $n^{\text{ième}}$ lancer.

$(A_n)_{n \geq 1}$ est un système complet.

$$\Rightarrow P(B) = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} (B \cap A_n)\right)$$

$$\Rightarrow = \sum_{n=1}^{+\infty} P(B \cap A_n)$$

$$P(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(B) \cdot P(A_n)$$

$A_n: (\cancel{1}, \cancel{2}, \dots, \cancel{5}, 6)$ $\rightarrow n^{\text{ième}}$ lancer

$$\Rightarrow P(A_n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6}$$

B: sachant A_n = la boule tirée est rouge sachant qu'il a fait son premier 6

lors du $n^{\text{ième}}$ lancer.

$\Rightarrow$ l'urne contient 1R et $(n-1)B$

$$\Rightarrow P(B)_{A_n} = \frac{1}{n}$$

Ainsi

$$P(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{5} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$$= -\frac{1}{5} \ln\left(1 - \frac{5}{6}\right)$$

$$P(B) = \frac{\ln 6}{5}$$

Exercice 5

X: donne le nombre de lancers

effectués pour obtenir pour la 1^{ère} fois pile et face successives.

alors il faut faire au moins 2 lancers

$$\Rightarrow X(n) = \{1, 2, \dots\}$$

$\forall n \geq 2: (X=n) =$ obtenir pour la 1^{ère} fois pile et face successives après n lancers

$$\Rightarrow (X=n) = (\underbrace{P, \dots, P}_{n-1}, PF) \text{ ou } (\underbrace{F, \dots, F}_{n-1}, P)$$

$$\Rightarrow P(X=n) = (P(P))^{n-1} \cdot P(F) + (P(F))^{n-1} \cdot P(P)$$

puisque la pièce est équilibrée, alors

$$P(F) = P(P) = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$P(X=n) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Puisque $X(\Omega) = \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \subset \mathbb{R}_+$
 d'où X admet une espérance finie
 $\Leftrightarrow$ la série $\sum_{n \geq 2} n p(X=n)$ converge.

$$\text{Or } \sum_{n \geq 2} n p(X=n) = \sum_{n \geq 2} n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

CV (D'Alembert)

$\Rightarrow X$ admet une espérance finie

$$E(X) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}} =$$

Soit $f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \forall x \in]-1, 1[$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}, \forall x \in]-1, 1[$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$$

Pour $x = \frac{1}{2} \in]-1, 1[$:

$$\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$4 = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}}$$

$$\Rightarrow \boxed{E(X) = 3}$$

4) La série entière $\sum_{n \geq 1} n^2 x^{n-1}$ est
 de rayon $R = 1$ (D'Alembert)

Soit $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^{n-1}, \forall x \in]-1, 1[$:

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1) x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$$

$$= S_1(x) + S_2(x)$$

$$S_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$S_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1) x^{n-1}$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) x^{n-1}$$

$$= x \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) x^{n-2} = x \left(\frac{1}{1-x}\right)''$$

$$S_1(x) = \frac{2x}{(1-x)^3}$$

Ainsi $S(x) = \frac{2x}{(1-x)^3} + \frac{1}{(1-x)^2}, \forall x \in]-1, 1[$

b) X admet une variance $\Leftrightarrow$

$$\sum_{n \geq 2} n^2 p(X=n) < \infty \Leftrightarrow \sum_{n \geq 2} n^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < \infty$$

qui est vérifiée d'après a)

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= [54(\frac{1}{2}) - 1] - 9 = 2$$

$$\Rightarrow V(X) = 2$$

Exercice 8

1) On pose $I_n = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid i+j=n\}$
 La famille $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une partition de $\mathbb{N}^2$.

Soit $U_{ij} = \frac{i+j}{2^{i+j}}$, $(i, j) \in \mathbb{N}^2$.
 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ (fixe), la famille $(U_{ij})_{(i,j) \in I_n}$ est sommable et

$$\sum_{(i,j) \in I_n} U_{ij} = \sum_{(i,j) \in I_n} \frac{i+j}{2^{i+j}}$$

$$= \sum_{i=0}^n \frac{n}{2^n} = \frac{n(n+1)}{2^n}$$

et la série $\sum_{n \geq 0} \frac{n(n+1)}{2^n}$ cv (D'Alembert)
 D'où la famille (U_{ij}) est sommable

et $\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} U_{ij} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n+1)}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n+1)}{2^n}$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n+1)}{2^{n+1}} = 8 \quad (\text{voir ex 5.10.1})$$

$$\forall i, j, p(x=i, y=j) = \frac{i+j}{2^{i+j+3}}$$

définit une loi conjointe $\Leftrightarrow$

la famille $\left(\frac{i+j}{2^{i+j+3}} \right)_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable

et la somme égale à 1.

Ce qui est vérifié d'après 1/

b) Loi de $X = ?$

$$P(X=i) = \sum_{j=0}^{+\infty} p(x=i, y=j)$$

$$= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{i+j}{2^{i+j+3}} = \frac{1}{8} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{i}{2^{i+j}} + \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{j}{2^{i+j}} \right)$$

$$= \frac{1}{8} \left(\frac{i}{2^i} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{2^j} + \frac{1}{2^i} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{j}{2^j} \right)$$

$$= \frac{1}{8} \frac{i}{2^i} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2^i} \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{j}{2^{j-1}} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \frac{i}{2^i} + \frac{1}{2^{i+1}} \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2}$$

$$= \frac{1}{4} \frac{i}{2^i} + \frac{e}{2^i} = \frac{1}{4 \cdot 2^i} (i+8)$$

$$\Rightarrow \left| p(x=i) = \frac{i+8}{2^{i+2}} ; \forall i \in \mathbb{N} \right|$$

(4)

i et j jouent des rôles symétriques, alors
 $P(X=i) = P(Y=j)$. $\forall i, \forall j$.

$\Leftrightarrow X$ et Y ont la m. loi.

$$\begin{aligned} c) P(X=i) \cdot P(Y=j) &= \frac{(i+r)}{2^{l+2}} \cdot \frac{(j+r)}{2^{l+2}} \\ &= \frac{(i+r)(j+r)}{2^{l+j+4}} \end{aligned}$$

$$P(X=0) \cdot P(Y=0) = \frac{r^2}{2^4} \neq$$

$$P(X=0; Y=0) = 0$$

$\Rightarrow X$ et Y ne sont pas indépendantes.

Exercice 9

$$X_n(n) = \{-1, 1\}; \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$P(X_k=1) = P(X_k=-1) = \frac{1}{2}$$

$$1) S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

$$E(S_n) = E(X_1) + \dots + E(X_n)$$

$$\begin{aligned} \text{or } E(X_k) &= 1P(X_k=1) + (-1)P(X_k=-1) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{D'où } E(S_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

2) T et $-T$ ont la m. loi
 d'où $\sin T$ et $\sin(-T)$ ont la m.

loi $\Leftrightarrow \sin T$ et $-\sin(T)$ " " loi

$$\Rightarrow E(\sin T) = E(-\sin T)$$

$$\Rightarrow E(\sin T) = 0$$

3) Si S et T sont indépendantes
 alors $\sin S$ et $\sin T$ sont indep, d'où

$$E(\sin S \cdot \sin T) = E(\sin S) \cdot E(\sin T)$$

$$E(\sin S \cdot \sin T) = 0$$

$$\text{et } E(\cos S \cdot \cos T) = E(\cos S) \cdot E(\cos T)$$

$$E(\cos(S+T)) = E(\cos S \cos T - \sin S \sin T)$$

$$= E(\cos S) E(\cos T) - E(\sin S) E(\sin T)$$

$$= E(\cos S) \cdot E(\cos T)$$

$$3) \forall q, \forall n \in \mathbb{N}^*, E(\cos(t S_n)) = (\cos t)^n$$

Pour $n=1$:

$$\begin{aligned} E(\cos(t S_1)) &= E(\cos(t X_1)) \\ &= \cos(t) P(X_1=1) + \cos(t(-1)) P(X_1=-1) \end{aligned}$$

D'où le résultat pour $n=1$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Supposons que $E(\cos(t S_n)) = (\cos t)^n$
 et montrons que $E(\cos(t S_{n+1})) = (\cos t)^{n+1}$

$$\text{on a } E(\cos(t S_{n+1})) = E(\cos(t S_n + t X_{n+1}))$$

Puisque les (X_n) sont mutuellement
 indep., alors S_n et X_{n+1} sont indep.
 d'où

$$E(\cos(t S_{n+1})) = E(\cos(t S_n)) \cdot E(\cos(t X_{n+1})) \quad \text{d'après 2.}$$

$$\stackrel{\text{H.R.}}{=} (\cos t)^n \cdot \cos t = (\cos t)^{n+1}$$

Exercice 4

A_n : la somme des résultats obtenus lors des n premiers lancers est paire

$$p_n = P(A_n)$$

1. A_1 : le résultat du premier lancer est pair $\Rightarrow A_1 = \{2, 4\}$

$$\Rightarrow P(A_1) = \frac{2}{5}$$

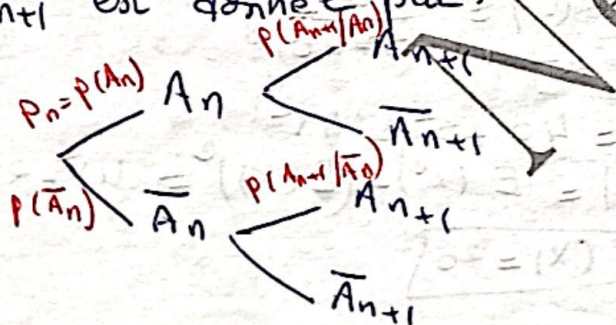
• A_2 : la somme des résultats des deux premiers lancers est pair

$\Rightarrow$ pair + pair ou impair + impair

$$\Rightarrow P(A_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{13}{25}$$

3) Les événements $(A_n, \bar{A}_n)$ forment un système complet.

La relation entre les événements A_n et A_{n+1} est donnée par:



$$\begin{aligned} \text{Alors } P(A_{n+1}) &= P(A_{n+1} \cap A_n) + P(A_{n+1} \cap \bar{A}_n) \\ &= P(A_{n+1}|A_n) \cdot P(A_n) + P(A_{n+1}|\bar{A}_n) \cdot P(\bar{A}_n) \\ &= p_n \cdot P(A_{n+1}|A_n) + P(A_{n+1}|\bar{A}_n) \cdot (1 - p_n) \end{aligned}$$

Or $A_{n+1}|A_n$ est l'événement: le résultat obtenu lors des $(n+1)$ premiers lancers est pair sachant que la somme des n premiers lancers est pair alors forcément le $(n+1)$ ème lancer est pair

$$\Rightarrow P(A_{n+1}|A_n) = \frac{2}{5}$$

$$\text{de m } P(A_{n+1}|\bar{A}_n) = \frac{3}{5}$$

Ainsi

$$P(A_{n+1}) = \frac{2}{5} p_n + \frac{3}{5} (1 - p_n)$$

$$p_{n+1} = \frac{2}{5} p_n + \frac{3}{5} (1 - p_n)$$

3) On a d'après 2)

$$p_{n+1} = -\frac{1}{5} p_n + \frac{3}{5}$$

$\Rightarrow (p_n)_{n \geq 1}$ est une suite arithmético-géométrique. On cherche $x \in \mathbb{R}$ tq $x = -\frac{1}{5} x + \frac{3}{5}$



$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.
Alors la suite $(q_n)_{n \geq 1}$ avec $q_n = p_n - \frac{1}{2}$
est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{5}$.

$$\Rightarrow q_n = \left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1} \cdot q_1$$

avec $q_1 = p_1 - \frac{1}{2} = \frac{2}{5} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{10}$

D'où $q_n = -\frac{1}{10} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}, \forall n \geq 1$

On en déduit que $p_n = q_n + \frac{1}{2}$

$$\forall n \geq 1, p_n = -\frac{1}{10} \left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}$$

4) a) X : le rang du premier 5 obtenu
 $\Rightarrow X(n) = n$
 $n \in \mathbb{N}^*$; $(X=n)$: le premier 5 obtenu est
dans le $n^{\text{ème}}$ lancer.

$$\Rightarrow P(X=n) = \underbrace{\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}}_{(n-1) \text{ fois}} \cdot \underbrace{\frac{1}{5}}_{1^{\text{ère}} \text{ fois}}$$

Alors
 $P(X=n) = \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{5}$
Ce qui montre que $X \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{5}\right)$
Suit une loi géométrique de
paramètre $\frac{1}{5}$.

b) La fonction génératrice de X

$$G_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} t^n p(X=n)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} t^n \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{5}$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{4} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \left(t \cdot \frac{4}{5}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - t \cdot \frac{4}{5}} \text{ pour } \left|t \cdot \frac{4}{5}\right| < 1$$

$$G_X(t) = \frac{t}{5 - 4t} \text{ pour } |t| < \frac{5}{4}$$

* G_X est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -\frac{5}{4}, \frac{5}{4} [$

$\Rightarrow G_X$ est deux fois dérivable sur
en 1 et $E(X) = G'_X(1)$

$E(X^2) = G''_X(1) + G'_X(1)$

$\Rightarrow$ or $G'_X(t) = \frac{5}{(5-4t)^2}$

$G''_X(t) = \frac{40}{(5-4t)^3}$

$\Rightarrow E(X) = 5$

$E(X^2) = 40 + 5 = 45$

d'où $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 45 - 25 = 20$

$\Rightarrow V(X) = 20$

exercice 6

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}$, on pose:

$$P(X=n, Y=k) = \frac{d}{(n+1)^{k+3}}$$

1) $P(X=n, Y=k)$ définit une loi de probabilité si et seulement si la famille $(P(X=n, Y=k))_{n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{N}}$ est

sommable et de somme égale à 1. On a: $\frac{d}{(n+1)^{k+3}} > 0$, ...

Soit $n \geq 1$ (fixe), la série.

$$\sum_{k \geq 0} \frac{d}{(n+1)^{k+3}} = \frac{d}{(n+1)^3} \sum_{k \geq 0} \left(\frac{1}{n+1}\right)^k$$

Converge vers $\frac{d}{(n+1)^3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}}$ ($0 < \frac{1}{n+1} < 1$)

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d}{(n+1)^{k+3}} = \frac{d}{(n+1)^2(n+1-1)} = \frac{d}{n(n+1)^2}$$

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{d}{n(n+1)^2}$ cv. Ce qui montre que la famille $\left(\frac{d}{(n+1)^{k+3}}\right)_{\substack{n \geq 1 \\ k \geq 0}}$ est sommable et

$$\begin{aligned} \sum_{n,k} \frac{d}{(n+1)^{k+3}} &= d \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{k+3}} \\ &= d \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2} \\ &= d \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \right) \quad \left(\begin{array}{l} \text{décomposition} \\ \text{en éléments} \\ \text{simples} \end{array} \right) \\ &= d \left(1 - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \right) \\ &= d \left(2 - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \right) \\ &= d \left(2 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + 1 \right) \\ &= d \left(3 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right) \\ &= d \left(3 - \frac{\pi^2}{6} \right) \end{aligned}$$

Ainsi $P(X=n, Y=k)$ définit une loi de probabilité si $d = \frac{1}{3 - \frac{\pi^2}{6}}$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} P(X=n) &= P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} \{X=n, Y=k\}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=n, Y=k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} d \cdot \frac{1}{(n+1)^{k+3}} = \frac{d}{n(n+1)^2} = \frac{1}{\left(3 - \frac{\pi^2}{6}\right) n(n+1)} \end{aligned}$$

b) X admet une espérance finie.
 Soit la série $\sum_{n \geq 1} n P(X=n)$ cv.

$$\text{or } n P(X=n) = \frac{d}{(n+1)e} \sim \frac{1}{ne}$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} n P(X=n) \text{ cv}$$

D'où $E(X)$ existe et finie et

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} n P(X=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d}{(n+1)e}$$

$$= d \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$= d \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 \right) \Rightarrow$$

$$E(X) = \frac{\frac{\pi^2}{6} - 1}{\frac{2 - \pi^2}{6}}$$

3) On a $\sum_{n \geq 1} n^2 P(X=n) = \sum_{n \geq 1} \frac{d n}{(n+1)e} \stackrel{\text{div.}}{=}$

$\Leftrightarrow X$ n'admet pas un moment d'ordre 2. $\Rightarrow X$ n'admet pas une variance.

4) Soit $k \in \mathbb{N}$; $P(Y=k) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n, Y=k)$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d}{(n+1)^{k+3}} = d \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{k+3}} \checkmark \checkmark \checkmark$$

$$= \frac{d (1 + (k+3) \cdot 1)}{1}$$

5) Puisque $P(Y=k)$ est une loi de probabilité, alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(Y=k) = 1 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} d (H(k+3) - 1) = 1$$

$$\Leftrightarrow d \sum_{k=3}^{+\infty} (H(k) - 1) = 1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=3}^{+\infty} (H(k) - 1) = \frac{1}{d} = 2 - \frac{\pi^2}{6} = 1 + (1 - \frac{\pi^2}{6})$$

$$\text{or } H(2) - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{ne} - 1 = \frac{\pi^2}{6} - 1$$

$$\text{D'où } \sum_{k=3}^{+\infty} H(k) - 1 + \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 \right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=2}^{+\infty} (H(k) - 1) = 1$$

6) Soit $f_n(x) = \left(\frac{2}{n}\right)^x$; $n \geq 2$, $x \geq 2$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } n=2 \\ 0 & \text{si } n \geq 3 \end{cases}$$

$$\bullet x \mapsto \left(\frac{2}{n}\right)^x = e^{x \ln(\frac{2}{n})} \text{ est décroissante}$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in [2, +\infty[} |f_n(x)| = \left(\frac{2}{n}\right)^2$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} \sup_{x \in [2, +\infty[} |f_n(x)| = 4 \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 2} f_n \subset N \Rightarrow \subset \cup \text{sur } [2, +\infty[$$

D'après le th de permutation $\sum$ et $\lim$
On déduit que.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^x = \sum_{n=2}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^x$$

$$7) \text{ On a } U_k = P(Y=k) = \lambda(H(k+3)-1)$$

$$\text{D'après 6/ } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} x^x (H(x)-1) = 1$$

$$\Leftrightarrow H(x)-1 \sim \frac{1}{2^x}$$

$$\text{D'où } U_k \sim d. \frac{1}{2^{k+3}}$$

$$8) \sum_{k \geq 0} k P(X=k) < +\infty ?$$

$$\text{On a } k \cdot P(X=k) = k U_k \sim d. \frac{1}{2^{k+3}} = a_k$$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k+1}{2^{k+4}} \cdot \frac{2^{k+3}}{k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} < 1$$

D'Alembert $\Rightarrow$ la série $\sum_{k \geq 0} a_k < +\infty$

D'où $\sum_{k \geq 0} k P(Y=k) < +\infty$, d'où la v.a.

Y admet une espérance.

De m on vérifie que la série $\sum_{k \geq 0} k^2 P(X=k)$

$< +\infty \Rightarrow Y$ admet un moment d'ordre 2

$\Rightarrow Y$ admet une variance

Exercice 1

X_n : nombre de pièces défectueuses dans un tirage de n pièces

$$\Rightarrow X_n(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$$

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, n\} \quad P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$\Leftrightarrow X \hookrightarrow B(n, p)$: Loi binomiale de paramètre p .

Alors $E(X_n) = np$ et $V(X) = np(1-p)$

2) D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) = P(|X_n - np| \geq n\varepsilon)$$

$$\therefore P(|X_n - E(X_n)| \geq n\varepsilon) \leq \frac{V(X_n)}{(n\varepsilon)^2}$$

$$\Leftrightarrow P(|X_n - E(X_n)| \geq n\varepsilon) \leq \frac{np(1-p)}{n^2 \varepsilon^2} = \frac{p(1-p)}{n \varepsilon^2}$$

b) Etude de fonction, on déduit que $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$, $\forall x \in [0,1]$

c) On déduit que $P(|\frac{X_n}{n} - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$

3) $\frac{X_n}{n}$ est une valeur approchée de p à 10^{-2} près ($|\frac{X_n}{n} - p| < 10^{-2}$) avec une probabilité supérieure ou égale à 0,95

$$P(|\frac{X_n}{n} - p| < 10^{-2}) \geq 0,95 ?$$

$$\text{On a } P(|\frac{X_n}{n} - p| < 10^{-2}) = 1 - P(|\frac{X_n}{n} - p| \geq 10^{-2})$$

$$\geq 1 - \frac{1}{4n} 10^{-4}$$

$$\text{On choisit } n \text{ tq } 1 - \frac{1}{4n} 10^{-4} \geq 0,95$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4n} 10^{-4} \leq 0,05 = 5 \cdot 10^{-2}$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{10^6}{20}$$

Exercice 10

$$X(n) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}_+$$

$$P_n = P(X=x_n)$$

1) soit $t \geq 0$.

La variable aléatoire e^{-tx} est d'espérance finie se la série $\sum_{n \geq 0} e^{-tx_n} P(X=x_n)$ cv.

On a $t \cdot x_n \geq 0 \Rightarrow 0 \leq e^{-tx_n} P(X=x_n) \leq P(X=x_n)$ et la série $\sum_{n \geq 0} P(X=x_n)$ cv.

Donc la série $\sum_{n \geq 0} e^{-tx_n} P(X=x_n)$ cv. $\Rightarrow E(e^{-tx})$ existe et finie.

2) On a $\forall t \geq 0$: $e^{-tx_n} P(X=x_n) \geq 0$

$$\Rightarrow \Phi_X(t) \geq 0$$

De plus

$$e^{-tx_n} P(X=x_n) \leq P(X=x_n) \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-tx_n} P(X=x_n) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=x_n) = 1$$

$$\text{Donc } \forall t \geq 0: 0 \leq \Phi_X(t) \leq 1$$

* $\forall q$ Φ_X est continue sur $[0, +\infty[$.

$$\text{soit } f_n(t) = e^{-tx_n} P(X=x_n) \quad n \in \mathbb{N}, t \geq 0$$

(12)

$\forall n \in \mathbb{N}; f_n$ est continue sur $[0, +\infty[$

$|f_n(t)| \leq P(X=x_n); \forall t \geq 0$

$\Rightarrow \sup_{t \in [0, +\infty[} |f_n(t)| \leq P(X=x_n)$

Comme la série $\sum_{n \geq 0} P(X=x_n)$ cv.

alors la série $\sum_{n \geq 0} \sup_{t \in [0, +\infty[} |f_n(t)|$ cv

$\Rightarrow \sum_{n \geq 0} f_n$ cv $\Rightarrow$ cv sur $[0, +\infty[$

D'après le th de Continuité des séries de fonctions, on déduit que

Φ_X est continue sur $[0, +\infty[$

3) a) $k \in \mathbb{N}^+$. On pose $g(x) = x^k e^{-\lambda x}$ $x \geq 0$

g est dérivable sur $[0, +\infty[$

$g'(x) = k x^{k-1} e^{-\lambda x} - \lambda x^k e^{-\lambda x}$

$= x^{k-1} e^{-\lambda x} (k - \lambda x)$

$\Leftrightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k}{\lambda}$

x	0	$\frac{k}{\lambda}$	$+\infty$
$g'(x)$		+	-

D'après le tableau de variation, on déduit que $\sup_{x \in [0, +\infty[} g(x) = g(\frac{k}{\lambda}) = \frac{k^k}{\lambda^k} e^{-k}$

$\Rightarrow 0 \leq x^k e^{-\lambda x} \leq \frac{k^k}{\lambda^k} e^{-k}; \forall x \geq 0$

b) On a $f_n(t) = e^{-tx_n} P(X=x_n)$ est une fonction C^∞ sur $]0, +\infty[$.

$\forall k \in \mathbb{N}; f_n^{(k)}(t) = (-x_n)^k e^{-tx_n} \frac{P(X=x_n)}{t^n}$

$\Rightarrow |f_n^{(k)}(t)| \leq x_n^k e^{-tx_n} \cdot P_n \leq \frac{k^k}{t^k} e^{-k} \cdot P_n$ (d'après a)

Soit $[a, b] \subset]0, +\infty[$. $(a < t < b)$ $\forall t \in [a, b]$

$\sup_{t \in [a, b]} |f_n^{(k)}(t)| \leq \frac{k^k}{a^k} e^{-k} P_n$

Puisque la série $\sum_{n \geq 0} P_n$ cv, alors la série $\sum_{n \geq 0} \sup_{t \in [a, b]} |f_n^{(k)}(t)|$ cv.

Ce qui montre que la série
 $\sum_{n \geq 0} p_n^{(k)} \subset \mathbb{N} \Rightarrow \subset \mathbb{U}$ sur tout seg
 $[a, b] \subset]0, +\infty[$

Alors Φ_X est C^∞ sur $]0, +\infty[$
 et $\forall k \in \mathbb{N}$: $\Phi_X^{(k)}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (x_n)^k \cdot e^{-tx_n} p_n$

4) $a \geq 0, b \geq 0$

$$\begin{aligned} \Phi_{aX+b}(t) &= E(e^{-t(ax+b)}) \\ &= E(e^{-tax} \cdot e^{-tb}) \\ &= e^{-tb} \cdot E(e^{-tax}) \\ &= e^{-tb} \cdot \Phi_X(bt) \end{aligned}$$

5) $Y(n) \subset \mathbb{R}_+$; X et Y indep

$$\begin{aligned} \Phi_{X+Y}(t) &= E(e^{-t(X+Y)}) \\ &= E(e^{-tX} \cdot e^{-tY}) \end{aligned}$$

Puisque X et Y sont indep, alors
 e^{-tX} et e^{-tY} sont indep, ce qui

donne $E(e^{-tX} \cdot e^{-tY}) = E(e^{-tX}) \cdot E(e^{-tY})$

$$\Rightarrow \Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t) \cdot \Phi_Y(t)$$

6) $X \mapsto G(p)$; $p \in]0, 1[$, $X(n) = n$
 D'après le th de transfert, e^{-tX} est

d'espérance finie si et seulement si
 la série $\sum_{n \geq 0} e^{-tn} p(1-p)^n \subset \mathbb{U}$

$$\Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} e^{-tn} p(1-p)^n = p e^{-t} \sum_{n \geq 0} (e^{-t}(1-p))^n \subset \mathbb{U}$$

$$\Leftrightarrow |e^{-t}(1-p)| < 1$$

$$\Leftrightarrow 0 < e^{-t} < \frac{1}{1-p} \Leftrightarrow -t < \ln\left(\frac{1}{1-p}\right)$$

Donc e^{-tX} admet une espérance finie
 si $t \in]\ln(1-p); +\infty[$
 et $\forall t \in]\ln(1-p); +\infty[$

$$\begin{aligned} E(e^{-tX}) &= p e^{-t} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-t}(1-p))^n \\ &= \frac{p e^{-t}}{1 - e^{-t}(1-p)} \end{aligned}$$

7) e^{-tX} est d'espérance finie $\Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} e^{-tn} \frac{d^n}{dn} e^{-t} \subset \mathbb{U}$
 $= \sum_{n \geq 0} e^{-t(n+1)} \subset \mathbb{U}$ car $e^{-t} \exp(d e^{-t})$, $t < 1$

$$E(e^{-tX}) = e^{-t} (\exp(d e^{-t}))$$

Soit $X \hookrightarrow P(\lambda)$
 $Y \hookrightarrow P(\mu)$ alors $X+Y \hookrightarrow P(\lambda+\mu)$
En effet X et Y indep

$$X(n) = n! \cdot P(X=n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

$$P(Y=n) = e^{-\mu} \frac{\mu^n}{n!}$$

$$P(X+Y=n) = P\left(\bigcup_{k=0}^n (X=k, Y=n-k)\right)$$

$$= \sum_{k=0}^n P(X=k, Y=n-k)$$

$$= \sum_{k=0}^n P(X=k) \cdot P(Y=n-k) \quad (X \text{ et } Y \text{ indep})$$

$$= \sum_{k=0}^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\mu} \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$= \left(\sum_{k=0}^n \frac{n! \lambda^k}{k!} \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} \right) \cdot \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!}$$

$$= \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda^k \mu^{n-k} \right) \cdot \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!}$$

$$= \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!} e^{-(\lambda+\mu)}$$

$$\Rightarrow X+Y \hookrightarrow P(\lambda+\mu)$$

* Montrons le résultat par récurrence

Pour $n=1$, le résultat est vrai.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que le résultat est vrai à l'ordre n et montrons le résultat pour $n+1$.

Soit $X_1, X_2, \dots, X_{n+1}$ $n+1$ v.a. mutuellement indep, alors $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ et X_{n+1} sont indep.

D'où $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$ suit une loi de poisson de paramètre $n\lambda + \lambda = (n+1)\lambda$.

$$b) \text{ Par } P(S_n \leq na) \leq e^{n(\lambda(e^{-ta} - 1) + at)}.$$

$$\text{On a } S_n \leq na \Leftrightarrow -tS_n \geq -tna, \forall t > 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-tS_n} \geq e^{-tna}$$

$$\text{D'où } P(S_n \leq na) = P(e^{-tS_n} \geq e^{-tna})$$

$$\leq \frac{E(e^{-tS_n})}{e^{-tna}} \quad (\text{d'après l'inégalité de Markov})$$

Puisque $S_n \hookrightarrow P(n\lambda)$, alors

D'après 7/a:

$$E(e^{-t} S_n) = e^{-na} (-na e^{-t})$$

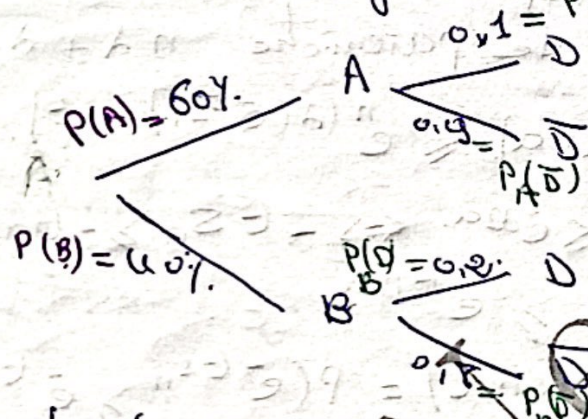
$$= e^{na} (e^{-t} - 1)$$

Donc:

$$P(S_n \geq na) \leq \frac{e^{na} (e^{-t} - 1)}{e^{na} (e^{-t} - 1) + at}$$

Exercice 7.

On note D : L'objet est defectueux.



L'objet provient de A sachant qu'il est defectueux. On doit calculer

$$P(A) = \frac{P(D) \cdot P(A|D)}{P(D)}$$

d'après la formule de Bayes

$$P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B)$$

$$= P(A) \cdot P(D|A) + P(B) \cdot P(D|B)$$

$$= 0.6 \cdot 0.1 + 0.4 \cdot 0.2$$

$$P(D) = 0.22$$

$$\text{Ainsi: } P(A) = \frac{0.6 \cdot 0.1}{0.22} = 0.27$$

$$Y(n) = N \text{ et } P(Y=n) = e^{-n} \frac{n^n}{n!}$$

$$\Rightarrow E(Y) = V(Y) = n$$

3) $(X=k | Y=n)$ c'est l'événement le nombre d'objet defectueux par A est k sachant que la machine a produit n objets

$$\Rightarrow P(X=k | Y=n) = \begin{cases} C_n^k (P_A(D))^k (1-P_A(D))^{n-k} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

$$\text{On note } p = P_A(D) = 0.1$$

$$3) P(X=k) = P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} (X=k, Y=n)\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=k; Y=n)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=k) \cap (Y=n)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=k | Y=n) \cdot P(Y=n)$$

$$= \sum_{n=k}^{+\infty} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} \lambda^n}{k! (n-k)!}$$

$$= \frac{1}{k!} e^{-\lambda} \lambda^k p^k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{((1-p)\lambda)^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$= \frac{1}{k!} e^{-\lambda} (dp)^k \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{((1-p)\lambda)^n}{n!}$$

$$= \frac{e^{-\lambda} (dp)^k}{k!} e^{(1-p)\lambda}$$

Alors

$$P(Y=k) = \frac{e^{p\lambda} (p\lambda)^k}{k!}$$

Ce qui montre que Y suit une loi de poisson de paramètre $p \cdot \lambda = \lambda$