

Correction Série II. " Probabilité"

Exercice 1

$\downarrow$ A : Il y a une infinité de A_n réalisées

$\Leftrightarrow C_A$: Il y a un nombre fini de A_n réalisées

$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}; \forall k \geq n; A_n$ n'est pas réalisée

$$\Leftrightarrow C_A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k=n}^{+\infty} C_{A_k}$$

$$\Leftrightarrow A = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$$

* B : $\exists n \in \mathbb{N}$ tq $\forall k \geq n, A_k$ est réalisée

$$\Leftrightarrow B = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k$$

* C = Il existe deux événements consécutifs réalisés

$$\Leftrightarrow C = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (A_n \cap A_{n+1})$$

$$\textcircled{a} P(C_A) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \left(\bigcap_{k=n}^{+\infty} C_{A_k}\right)\right)$$

comme la suite $\left(\bigcap_{k=n}^{+\infty} C_{A_k}\right)$ est $\nearrow$

$$\text{Alors } P(C_A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{k=n}^{+\infty} C_{A_k}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{or } P\left(\bigcap_{k=n}^{+\infty} C_{A_k}\right) &= \lim_{N \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{k=n}^N C_{A_k}\right) \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{k=n}^N P(C_{A_k}) \quad (\text{mutuellement indép.}) \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{k=n}^N \left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{N-n+1} = 0 \\ \Rightarrow P\left(\bigcap_{k=n}^{+\infty} C_{A_k}\right) &= 0. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(C_A) = 0 \Rightarrow \boxed{P(A) = 1}$$

• même raisonnement :

$$\boxed{P(B) = 0}$$

$$\textcircled{b} P(C) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} (A_n \cap A_{n+1})\right)$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{N \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{n=0}^N (A_n \cap A_{n+1})\right) \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{n=0}^N P(A_n \cap A_{n+1}) \quad (\text{mutuellement indép.}) \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{n=0}^N \frac{1}{4} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{N+1} = 0 \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{n=0}^N \frac{3}{4} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{N+1} = 0 \\ &\Rightarrow \boxed{P(C) = 0} \end{aligned}$$

①

$$\begin{aligned}
 b) \text{ On a } P(A) &= P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right) \\
 &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} = 0 \quad (\text{reste d'une s\'erie ev})
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(A) = 0$$

$$\begin{aligned}
 * P(B) &= P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \left(\bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k\right)\right) \\
 &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} P\left(\bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{or } P\left(\bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k\right) &= \lim_{N \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{k=n}^N A_k\right) \\
 &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{k=n}^N P(A_k) \\
 &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{k=n}^N \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{(N-n+1)(N+n+2)}{2}} = 0
 \end{aligned}$$

Alors $\boxed{P(B) = 0}$

$$\begin{aligned}
 * \text{ On a } C_C &= \bigcup_{n=0}^{+\infty} (A_n \cap A_{n+1}) \\
 \Rightarrow P(A_0 \cap A_1) &\leq P(C_C) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n \cap A_{n+1})
 \end{aligned}$$

$$1 \leq P(C_C) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) \cdot P(A_{n+1}) \quad \text{ind.}$$

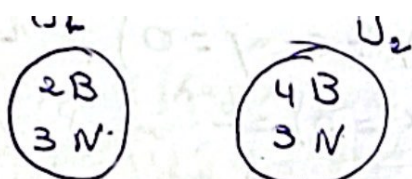
$$\begin{aligned}
 \frac{1}{8} &\leq P(C_C) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{2^{n+2}} \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^{n+1}} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{(1-\frac{1}{4})8}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8} \leq P(C_C) \leq \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{6} \leq P(C) \leq 1 - \frac{1}{8}$$

$\frac{5}{6} \leq P(C) \leq \frac{7}{8}$

Exercice 2.



B_n : la boule tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage est blanche

$$P_n = P(B_n)$$

1) $P_1 = P(B_1)$

B_1 : la boule tirée au 1^{er} tirage est blanche.

Alors la boule est tirée de U_1 ou U_2 .

Comme (U_1, U_2) est un système complet.

$$\begin{aligned} \text{Alors } P(B_1) &= P_{U_1}(B_1) \cdot P(U_1) + P_{U_2}(B_1) \cdot P(U_2) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \left(\frac{4}{5} \right) \end{aligned}$$

$$P(B_1) = \frac{17}{35}$$

2) soit $n \in \mathbb{N}^*$

$(B_n, \bar{B}_n)$ est un système complet, alors

$$P(B_{n+1}) = P_{B_n}(B_{n+1}) P(B_n) + P_{\bar{B}_n}(B_{n+1}) P(\bar{B}_n)$$

On a B_{n+1} sachant B_n = la boule tirée dans le tirage $(n+1)$ est blanche sachant que la boule tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage est blanche

$$\Rightarrow P_{B_n}(B_{n+1}) = \frac{2}{5}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P_{n+1} &= \frac{2}{5} P_n + \frac{4}{5} (1 - P_n) \\ &= -\frac{6}{35} P_n + \frac{4}{5} \end{aligned}$$

3) (P_n) est une suite arithmético-géométrique

$$\Rightarrow P_n = -\frac{3}{1435} \left(-\frac{6}{35} \right)^{n-1} + \frac{20}{41}, \quad \forall n \geq 1.$$

Exercice 5

$$P(X=n, Y=p) = \begin{cases} \frac{\lambda^n e^{-\lambda} x^p (1-x)^{n-p}}{p! (n-p)!} & \text{si } p \leq n \\ 0 & \text{si } p > n \end{cases}$$

1) Soit $U_{n,p} = P(X=n, Y=p)$

soit $n \in \mathbb{N}$ (fixe). La famille $(U_{n,p})_{p \in \mathbb{N}}$ est sommable puisqu'elle est nulle à partir d'un certain rang.

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{+\infty} U_{n,p} &= \sum_{p=0}^n U_{n,p} = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \sum_{p=0}^n C_n^p x^p (1-x)^{n-p} \\ &= \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \end{aligned}$$

$$\sum_{n \geq 0} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \text{ est cv.}$$

$\Rightarrow$ la famille $(U_{n,p})$ est sommable et

$$\sum_{n,p} U_{n,p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} U_{n,p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = 1$$

(3)

$\Rightarrow$ la famille (U_{np}) définit bien une loi de couple.

2) $X(n) = IV$.

$$\forall n \in IV; P(X=n) = \sum_{p=0}^{+\infty} P(X=n, Y=p) \\ = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

$\Rightarrow X \hookrightarrow P(\lambda)$

3) $Y(n) = IV$

$$\forall p \in IV; P(Y=p) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n, Y=p)$$

$$= \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \alpha^p \frac{(1-\alpha)^{n-p}}{(n-p)!}$$

$$= \frac{e^{-\lambda}}{p!} \alpha^p \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{n+p} (1-\alpha)^n}{n!}$$

$$= e^{-\lambda} \frac{(\lambda \alpha)^p}{p!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda (1-\alpha))^n}{n!}$$

$$= e^{-\lambda} \frac{(\lambda \alpha)^p}{p!} e^{\lambda (1-\alpha)}$$

$$= e^{-\lambda \alpha} \frac{(\lambda \alpha)^p}{p!}$$

$\Rightarrow Y \hookrightarrow P(\lambda \alpha)$

3) $P(X=0, Y=0) = 1$

$$P(X=0) = e^{-\lambda}, P(Y=0) = e^{-\lambda \alpha}$$

$$\Rightarrow P(X=0) \cdot P(Y=0) = e^{-\lambda(1+\alpha)} \neq 1$$

$\Rightarrow X$ et Y ne sont pas indep.

4) $Z = X - Y$

Puisque $X(n) = IV$ et $Y(n) = IV$

$\Rightarrow Z(n) = \mathbb{Z}$

$\forall k \in \mathbb{Z}; P(Z=k) = P(X-Y=k)$

$$P(X=Y+k) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} (X=n+k, Y=n)\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n+k, Y=n)$$

Si $k < 0 \Rightarrow n+k < n \Rightarrow P(X=n+k, Y=n) = 0$

$\Rightarrow P(Z=k) = 0$

Si $k \geq 0 \Rightarrow n+k \geq n \forall n$

$$P(Z=k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{n+k} e^{-\lambda} \alpha^n (1-\alpha)^k}{n! k!}$$

$$= \frac{e^{-\lambda} (1-\alpha)^k}{k!} \lambda^k \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda \alpha)^n}{n!}$$

$$= e^{-\lambda(1-\alpha)} \frac{(\lambda(1-\alpha))^k}{k!}$$

(4)

$$\begin{aligned}
 3) a) \forall n \in \mathbb{N}; \quad P(Y=j | Z=n) &= \frac{P(Y=j; Z=n)}{P(Z=n)} = \frac{P(Y=j; X=j+n)}{P(Z=n)} \\
 &= \frac{\lambda^{j+n} e^{-\lambda} \alpha^j (1-\alpha)^n}{j! n! e^{-\lambda(1-\alpha)} (\lambda(1-\alpha))^n} \\
 &= \frac{(\lambda \alpha)^j}{j!} \frac{e^{-\lambda \alpha}}{n!}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) \text{ on a } P(Y=j | Z=n) &= P(Y=j) \\
 \Rightarrow P(Y=j; Z=n) &= P(Y=j) P(Z=n)
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow Y$ et Z sont indépendantes.

c) soit X le nombre d'enfants, et Y " de garçons.

$$\begin{aligned}
 X &\hookrightarrow P(\lambda) \\
 P(X=i | Y=j) &= \begin{cases} C_i^j \alpha^i (1-\alpha)^{n-j} & \text{si } j \geq i \\ 0 & \text{si } j < i \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$P(X=i, Y=j) = P(Y=j | X=i) \cdot P(X=i)$$

Exercice 6

$$\begin{aligned}
 1) P(X_i \leq n) &= P\left(\bigcup_{k=1}^n (X_i = k)\right) = \sum_{k=1}^n P(X_i = k) \\
 &= \sum_{k=1}^n p(1-p)^{k-1} = \frac{p(1 - (1-p)^n)}{1 - (1-p)} = 1 - (1-p)^n
 \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}; \quad P(X_i \leq n) = 1 - (1-p)^n$$

$$2) Y = \min\{X_i; i \in \{1, \dots, N\}\}$$

$$a) n \in \mathbb{N}; \quad P(Y > n) = ??$$

$$\begin{aligned}
 Y &= \min\{X_i; i \in \{1, \dots, N\}\} > n \\
 \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, N\}; \quad X_i > n
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{D'où } P(Y > n) &= P(X_1 > n; \dots; X_N > n) \\
 &= P\left(\bigcap_{i=1}^N (X_i > n)\right) \\
 &= \prod_{i=1}^N P(X_i > n) \quad (\text{car ils sont mutuellement indep.}) \\
 &= \prod_{i=1}^N (1 - P(X_i \leq n)) \\
 &= \prod_{i=1}^N (1 - p)^n = (1-p)^{n \cdot N}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(Y > n) = (1-p)^{n \cdot N}$$

$$b) \text{ soit } n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$$

$$\begin{aligned}
 \text{On a } P(Y > n-1) &= P(Y = n \cup Y > n) \\
 &= P(Y = n) + P(Y > n)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(Y=n) &= P(Y > n-1) - P(Y > n) \\ \Rightarrow P(Y=n) &= (1-p)^{(n-1)N} - (1-p)^{nN} \\ &= (1-p)^{(n-1)N} (1 - (1-p)^N) \\ &= (q^N)^{n-1} (1-q^N) \text{ avec } q = (1-p) \end{aligned}$$

$$\text{Si } n=1, \quad P(Y=1) = 1 - P(Y > 1) = 1 - (1-p)^N = 1 - q^N$$

$$\text{cl } \forall n \in \mathbb{N}^*; \quad P(Y=n) = (q^N)^{n-1} (1-q^N)$$

$$\text{D'où } Y \hookrightarrow q(1-q^N)$$

Exercice 7

$$\forall k \in \mathbb{N}; \quad P(X=k) = P(Y=k) = pq^k, \quad p \in]0,1[.$$

$$\text{U} = \max(X, Y) \\ \text{V} = \min(X, Y)$$

$$\begin{aligned} (U, V) \in \mathbb{N}^2 &= \{(m, n) \in \mathbb{N}^2; \max(X, Y) = m, \min(X, Y) = n\} \\ &= \{(m, n) \in \mathbb{N}^2; m \geq n\} \end{aligned}$$

Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tq $m \geq n$

$$\begin{aligned} P((U, V) = (m, n)) &= P(U=m, V=n) \\ &= P((U=m) \cap (V=n)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Si } m=n & \Rightarrow \max(X, Y) = \min(X, Y) = m \\ \Rightarrow P(U=m, V=n) &= P(X=n, Y=n) \\ &= p^2 q^{2n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Si } m > n & \Rightarrow U = \max(X, Y) = m \Rightarrow X=m \text{ ou } Y=m. \\ \Rightarrow P((U, V) = (m, n)) &= P((X=m, Y=n) \cup (X=n, Y=m)) \\ &= P(X=m, Y=n) + P(X=n, Y=m) \\ &\stackrel{\text{ind}}{=} P(X=m) \cdot P(Y=n) + P(X=n) \cdot P(Y=m) \\ &= 2 p^2 q^m q^n \end{aligned}$$

$$\text{cl } P(U=m, V=n) = \begin{cases} p^2 q^{2n} & \text{si } m=n \\ 2 p^2 q^{n+m} & \text{si } m > n \\ 0 & \text{si } m < n \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ U}(\mathbb{N}) &= \mathbb{N} \\ \forall m \in \mathbb{N}^*, \quad P(U=m) &= \sum_{n=0}^{m-1} P(U=m, V=n) \\ &= \sum_{n=0}^{m-1} P(U=m, V=n) \\ &= \sum_{n=0}^{m-1} (P(U=m, V=n) + P(U=m, V=m)) \\ &= \sum_{n=0}^{m-1} 2 p^2 q^{n+m} + p^2 q^{2m} \\ &= 2 p^2 q^m \cdot \sum_{n=0}^{m-1} q^n + p^2 q^{2m} \end{aligned}$$

$$= 2p^2 q^m \left(\frac{1-q^m}{1-q} \right) + p^2 q^m$$

$$= 2pq^m(1-q^m) + p^2 q^m$$

• Si $m=0$

$$P(W=0) = p^2$$

D'où:

$$\forall m \in \mathbb{N}: P(W=m) = 2pq^m(1-q^m) + p^2 q^m$$

3) On a $V(n) = \mathbb{N}$.

$$W = V+1 \Rightarrow W(n) = \mathbb{N}^*$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*: P(W=n) = P(V+1=n)$$

$$= P(V=n-1)$$

$$= pq^{2(n-1)}(1+q)$$

$$= p(1+q)(q^2)^{(n-1)}$$

$$= (1-q^2)(q^2)^{(n-1)}$$

$$\Rightarrow W \hookrightarrow q(1-q^2)$$

On déduit l'espérance $E(W) = \frac{1}{1-q^2}$

$$\Rightarrow E(V+1) = \frac{1}{1-q^2}$$

$$\Rightarrow E(V) = \frac{1}{1-q^2} - 1 \Rightarrow \boxed{\frac{q^2}{1-q^2} = E(V)}$$

4) $P(W=0, V=1) \neq P(W=0)P(V=1)$

$\Rightarrow W$ et V ne sont pas indep.

Exercice 8

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n+1\}$$

$$a_{ij} = P(X=i, Y=j) = \begin{cases} \frac{1}{2n} & \text{si } |i+j-(n+2)|=1 \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

$$\forall i, j: a_{ij} \geq 0$$

• la famille (a_{ij}) définit une loi de Couple $\Leftrightarrow \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} = 1$

$a_{ij} = \frac{1}{2n}$ est cte. Il suffit de compter le nombre de a_{ij} non nuls.

$$|i+j-(n+2)|=1 \Leftrightarrow \begin{cases} i+j=n+3 \\ i+j=n+1 \end{cases}$$

$$\bullet \text{ si } \begin{cases} i+j=n+3 \\ 1 \leq i, j \leq n+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (i, n+3-i) \\ 1 \leq i \leq n+1 \end{cases}$$

ou si $i=1 \Rightarrow j=n+2$ imp

$\Rightarrow$ Il y a n possibilités

$$\bullet \text{ si } \begin{cases} i+j=n+1 \\ 1 \leq i, j \leq n+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (i, n+1-i) \\ 1 \leq i \leq n+1 \end{cases}$$

si $i=n+1 \Rightarrow j=0$ imp.

$\Rightarrow$ Il y a n possibilités

Ainsi on a trouvé en tout $2n$ non nuls.

$$\Rightarrow \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} = 2n \cdot \frac{1}{2n} = 1$$

$$2) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2n} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2n} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{2n} & \dots & \frac{1}{2n} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2n} & 0 \end{pmatrix}$$

A est une matrice symétrique réelle.
Alors A est diagonalisable.

3) Loi de X. ??

$$X(n) = \{1, \dots, n+1\}$$

$$\forall 1 \leq i \leq n+1, \quad P(X=i) = \sum_{j=1}^{n+1} P(X=i, Y=j)$$

$$= \sum_{\substack{j=1 \\ i+j=n+1 \\ \text{ou } i+j=n+3}}^{n+1} \frac{1}{2n} = 2 \cdot \frac{1}{2n} \quad | \text{ si } 2 \leq i \leq n$$

$$\cdot \text{ si } i=1 \rightarrow j=n \Rightarrow P(X=1) = \frac{1}{2n}$$

$$\cdot \text{ si } i=n+1 \rightarrow j=2 \Rightarrow P(X=n+1) = \frac{1}{2n}$$

$$c) \quad P(X=i) = \begin{cases} \frac{1}{2n} & \text{si } i=1 \text{ ou } i=n+1 \\ \frac{1}{n} & \text{si } i \in \{2, \dots, n\} \end{cases}$$

X et Y jouent des rôles symétriques.

$$\Rightarrow P(X=j) = P(Y=j)$$

$$4) \quad b_{ij} = P(X=i / Y=j)$$

$B = (b_{ij})$. Montrons que $V = \begin{pmatrix} P(X=1) \\ \vdots \\ P(X=n+1) \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de B.

$$(BV)_i = \sum_{j=1}^{n+1} b_{ij} v_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n+1} P(X=i / Y=j) \cdot P(X=j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n+1} \frac{P(X=i, Y=j)}{P(Y=j)} P(X=j)$$

$$= P(X=i)$$

$$\Rightarrow \forall 1 \leq i \leq n+1, \quad (BV)_i = v_i \Leftrightarrow$$

$BV = V \Rightarrow V$ vecteur propre associé à la v.p. 1.

Correction.

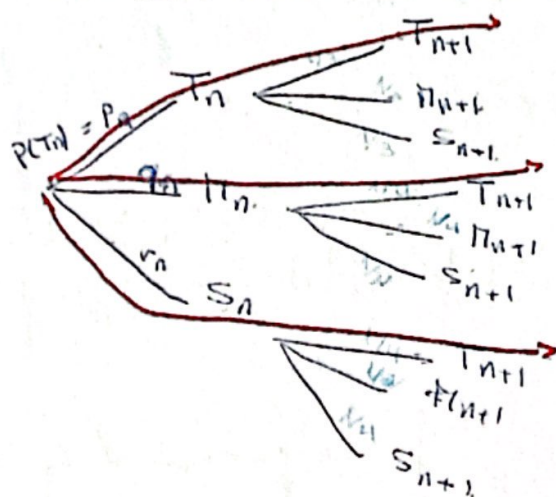
Exercice 1

1) Les valeurs de p_0 , q_0 et r_0 sont :

$$p_0 = P(T_0) = 0,45$$

$$q_0 = P(\Pi_0) = 0,25$$

$$r_0 = P(S_0) = 0,3$$

2) On note T_n : le client achète un jouet de type T à l'année n Π_n : " " " " " " " " " " S_n : " " " " " " " " " "Alors (T_n, Π_n, S_n) forme un système complet des événements pour l'année n .La relation avec l'année $(n+1)$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
 \text{Alors } P(T_{n+1}) &= P(T_{n+1} \cap T_n) + P(T_{n+1} \cap \Pi_n) + P(T_{n+1} \cap S_n) \\
 &= P(T_n) \cdot \frac{P(T_{n+1})}{P(T_n)} + P(\Pi_n) \cdot \frac{P(T_{n+1})}{P(\Pi_n)} + P(S_n) \cdot \frac{P(T_{n+1})}{P(S_n)} \\
 &= \frac{1}{3} p_n + \frac{1}{3} q_n + \frac{1}{3} r_n.
 \end{aligned}$$

3) De la même façon, on montre que :

$$q_{n+1} = \frac{1}{3} p_n + \frac{1}{4} q_n + \frac{1}{2} r_n$$

$$r_{n+1} = \frac{1}{3} p_n + \frac{1}{2} q_n + \frac{1}{4} r_n$$

4) $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$

D'après 2) et 3) on a le système (S) suivant :

$$(S) : \begin{cases} p_{n+1} = \frac{1}{3} p_n + \frac{1}{4} q_n + \frac{1}{4} r_n \\ q_{n+1} = \frac{1}{3} p_n + \frac{1}{4} q_n + \frac{1}{2} r_n \\ r_{n+1} = \frac{1}{3} p_n + \frac{1}{2} q_n + \frac{1}{4} r_n \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X_{n+1} = A X_n$$

b) Le polynôme caractéristique de A est :

$$\chi_A(x) = -\det(A - xI_3) = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} - x & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} - x & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} - x \end{vmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 \quad \begin{vmatrix} 1-x & 1-x & 1-x \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4}-x & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}-x \end{vmatrix}$$

$$= (1-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4}-x & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}-x \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} C_2 &\leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 &\leftarrow C_3 - C_1 \end{aligned} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{12} - x & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{12} - x \end{vmatrix} \times (1-x)$$

$$= (1-x) \left(\left(-\frac{1}{12} - x \right)^2 - \left(\frac{1}{6} \right)^2 \right)$$

$$= (1-x) \left(-\frac{1}{12} - x - \frac{1}{6} \right) \left(-\frac{1}{12} - x + \frac{1}{6} \right)$$

$$\chi_A(x) = (1-x) \left(-x - \frac{1}{4} \right) \left(\frac{1}{12} - x \right)$$

Ce qui montre que $P_{\mathbb{R}}(A) = \left\{ 1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{12} \right\}$

c.à.d. que A admet trois v.p. réelles $\neq 0$.
et que $A \in M_3(\mathbb{R})$ D'où

A est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$.

→ Diagonaliser A .

On vérifie que $E_1 = \text{vect} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \text{vect} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
et $E_{-1/4} = \text{vect} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

On pose la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
et la matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$

Alors $A = P D P^{-1}$.

□ Puisque $A = P D P^{-1}$, on vérifie par récurrence
que $A^n = P D^n P^{-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

On calcule P^{-1} , on trouve $P^{-1} = \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 8 & -3 & -3 \\ 0 & 11 & -11 \end{pmatrix}$

Alors, en faisant la multiplication des trois matrices P , D^n et P^{-1} , on trouve :

$$A^n = \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 6 + \frac{6}{12^n} & 6 - \frac{6}{12^n} & 6 - \frac{6}{12^n} \\ 8 - \frac{8}{12^n} & 8 + \frac{3}{12^n} + 11\left(-\frac{1}{4}\right)^n & 8 + \frac{3}{12^n} - 11\left(-\frac{1}{4}\right)^n \\ 8 - \frac{8}{12^n} & 8 + \frac{3}{12^n} - 11\left(-\frac{1}{4}\right)^n & 8 + \frac{3}{12^n} + 11\left(-\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ On a $X_{n+1} = A X_n$

On vérifie par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$

$$\Leftrightarrow X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que :

$$\begin{cases} p_n = \frac{1}{22} \left[\left(6 + \frac{6}{12^n}\right) p_0 + \left(6 - \frac{6}{12^n}\right) q_0 + \left(6 - \frac{6}{12^n}\right) r_0 \right] \\ q_n = \frac{1}{22} \left[\left(8 - \frac{8}{12^n}\right) p_0 + \left(8 + \frac{3}{12^n} + 11\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right) q_0 + \left(8 + \frac{3}{12^n} - 11\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right) r_0 \right] \\ r_n = \dots \end{cases}$$

(4)