

Correction Série III v. a

Exercice 1

$$\Downarrow X \hookrightarrow G(p) \Leftrightarrow \begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{N}^* \\ P(X=n) = p(1-p)^{n-1} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{On a } \forall k \in \mathbb{N}; P(X > k) &= P\left(\bigcup_{i=k+1}^{+\infty} (X=i)\right) \\ &= \sum_{i=k+1}^{+\infty} P(X=i) \quad (\text{les événements ici sont incompatibles}) \\ &= \sum_{i=k+1}^{+\infty} p(1-p)^{i-1} = p \frac{(1-p)^k}{p} = (1-p)^k. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(X > k) = (1-p)^k.$$

$$\begin{aligned} \text{On a } P(X > n+k | X > n) &= \frac{P(X > n+k, X > n)}{P(X > n)} \\ &= \frac{P(X > n+k)}{P(X > n)} = \frac{(1-p)^{n+k}}{(1-p)^n} = (1-p)^k \\ &= P(X > k) \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } P(X > n+k | X > n) = P(X > k)$$

$$\Downarrow X(\Omega) = \mathbb{N}^*. \text{ On pose } P(X=1) = p \in]0,1[$$

$$\text{t.q. } P(X > n+k | X > n) = P(X > k) \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \text{On a } P(X > k-1) &= P(X > k \cup \{X=k\}) \\ &= P(X > k) + P(X=k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(X=k) &= P(X > k-1) - P(X > k) \\ \text{or } P(X > k) &= P(X > k \cap X > k-1) \\ &= P(X > k | X > k-1) \cdot P(X > k-1) \\ &\stackrel{\text{d'après (*)}}{=} P(X > 1) P(X > k-1) \\ &= (1-p) P(X > k-1) \\ &= (1-p)^k \end{aligned}$$

Soit $u_k = P(X > k)$. Pour u_k vérifie.
 $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad u_k = (1-p) u_{k-1}$
 $\Rightarrow (u_k)$ est une suite géométrique de raison $(1-p)$ d'où $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad u_k = (1-p)^k \cdot u_0$
 or $u_0 = P(X > 0) = 1 \Rightarrow u_k = (1-p)^k$
 Ainsi: $P(X=k) = (1-p)^{k-1} - (1-p)^k$

$$|P(X=k) = (1-p)^{k-1} p|$$

Ce qui montre que $X \hookrightarrow G(p)$.

Exercice 2 voir correction.
Série 1

Exercice 5

1) $X(n) \subset \mathbb{N}$.

a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall 1 \leq k \leq n$, on a.

$$\begin{aligned} P(X=k) &= P(X > k-1) - P(X > k) \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^n k P(X=k) &= \sum_{k=0}^n k (P(X > k-1) - P(X > k)) \\ &= \sum_{k=1}^n k P(X > k-1) - k P(X > k) \\ &= \sum_{k=1}^n (k-1) P(X > k-1) - k P(X > k) + \sum_{k=1}^n P(X > k-1) \\ &= -n P(X > n) + \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) \end{aligned}$$

Ainsi $\sum_{k=1}^n k P(X=k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - n P(X > n)$

b) on a la série $\sum_{k=0}^{\infty} P(X > k)$ converge, alors la suite $\left(\sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée par M .

d'après a) $\sum_{k=1}^n k P(X=k) \leq \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) \leq M$

$\Rightarrow$ la suite $\left(\sum_{k=1}^n k P(X=k) \right)$ est majorée

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} k P(X=k)$ converge..

c) hyp X admet une espérance finie, $\frac{X}{n} \xrightarrow{P} \frac{X}{n}$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} k P(X=k) < \infty$

Or $n P(X > n) = n P\left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} (X=k)\right)$

$= n \sum_{k=n+1}^{\infty} P(X=k) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} k P(X=k)$

$\Rightarrow 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} n P(X > n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} k P(X=k)$
 0 (le reste d'une série cv)

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n P(X > n) = 0$

d'après a) on déduit que

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n k P(X=k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k)$

$\Leftrightarrow E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X > k)$

e) a) $P(X \leq k) = ?$

L'événement $\{X \leq k\}$ = le plus grand nombre obtenu est inférieur ou égale à k .
 alors toutes les boules tirées porte un numéro de $\{1, \dots, k\}$

Ainsi $P(X \leq k) = \left(\frac{C_k^1}{C_N^1}\right)^n = \left(\frac{k}{N}\right)^n$

$\Rightarrow P(X > k) = 1 - \left(\frac{k}{N}\right)^n$

e

ici de $X = ?$

$$X(\omega) = \{1, 2, \dots, N\}; \quad \forall k \in \{1, \dots, N\}$$

$$P(X=k) = P(X \leq k) - P(X \leq k-1) \\ = \frac{k^n - (k-1)^n}{N^n}$$

b) $X(\omega)$ est un ensemble fini, alors $E(X)$ existe et finie.

D'après 1c) $E(X) = \sum_{k=0}^{N-1} P(X > k)$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \left(1 - \left(\frac{k}{N}\right)^n\right)$$

$$\Rightarrow E(X) = N - \sum_{k=0}^{N-1} \left(\left(\frac{k}{N}\right)^n\right)$$

$$c) \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{E(X)}{N} = \lim_{N \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\left(\frac{k}{N}\right)^n\right)$$

$$= 1 - \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\left(\frac{k}{N}\right)^n\right)$$

$$= 1 - \int_0^1 x^n dx \quad \downarrow \text{Somme de Riemann.}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

exercice 3

$$M_X(t) = E(e^{tx})$$

On pose $X(\omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$, alors

$$M_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{tx_n} p(x=x_n)$$

$$I_X = \{t \in \mathbb{R} \text{ tq } M_X(t) \text{ existe et finie}\}$$

$$\text{1) Pour } t=0; \sum_{n=0}^{+\infty} p(x=x_n) = 1$$

$$\Rightarrow M_X(0) \text{ existe et finie.}$$

$$\Rightarrow 0 \in I_X.$$

Mq I_X est un intervalle de $\mathbb{R}$.

soit $a \in I_X$ et $b \in I_X$, mq $[a, b] \subset I_X$

soit $t \in [a, b] \Leftrightarrow \exists \lambda \in [0, 1] \text{ tq}$

$$t = \lambda a + (1-\lambda)b$$

$$\Rightarrow tx_n = \lambda ax_n + (1-\lambda)bx_n$$

$$\Rightarrow e^{tx_n} = e^{(\lambda ax_n + (1-\lambda)bx_n)}$$

Comme la fonction $x \mapsto e^x$ est convexe, alors

$$e^{tx_n} \leq \lambda e^{ax_n} + (1-\lambda)e^{bx_n}$$

$$\Rightarrow e^{tx_n} p(x=x_n) \leq \lambda e^{ax_n} p(x=x_n) + (1-\lambda)e^{bx_n} p(x=x_n)$$

Puisque $a, b \in I_X$, alors

les séries $\sum_{n \geq 0} e^{ax_n} p(x=x_n)$ et

$\sum_{n \geq 0} e^{bx_n} p(x=x_n)$ sont convergentes

d'où la convergence de la série

$$\sum_{n \geq 0} e^{tx_n} p(x=x_n) \Leftrightarrow t \in I_X$$

cl I_X est un intervalle contenant 0.

2) $\gamma \mapsto P(\lambda)$ avec $\lambda > 0$

$$M_Y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{tn} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

$$= \dots \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$= e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda \cdot et} = e^{\lambda(et-1)}$$

$$\text{3) } U_n(t) = p(x=x_n) e^{tx_n} \quad \forall t \in]-\alpha, \alpha[$$

soit $\alpha > 0$ tq $[-\alpha, \alpha] \subset]-\alpha, \alpha[$

On considère $e \in]\alpha, \alpha[$

U_n est de classe C^∞ sur $]-\alpha, \alpha[$

avec $\forall k \in \mathbb{N}$.

$$U_n^{(k)}(t) = (x_n)^k p(x=x_n) e^{tx_n}$$

$$\Rightarrow |U_n^{(k)}(t)| \leq |x_n|^k p(x=x_n) e^{tx_n}$$

$$\text{or } tx_n \leq |tx_n| \leq \alpha |x_n|$$

$$e^{tx_n} \leq e^{\alpha |x_n|}, \quad \forall t \in [-\alpha, \alpha]$$

$$\text{Ainsi } |U_n^{(k)}(t)| \leq |x_n|^k p(x=x_n) e^{\alpha |x_n|}$$

b) On a:

$$U_n^{(k)}(t) \leq |x_n|^k p(x=x_n) e^{(\alpha - \epsilon) |x_n|} e^{\epsilon |x_n|}$$

On considère la fonction:

$$f(x) = x^k \cdot e^{(\alpha - \epsilon)x} \quad \text{avec } x \geq 0$$

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+ \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad (\alpha - \epsilon < 0) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$f \text{ est bornée sur } \mathbb{R}_+ \Leftrightarrow \exists M \geq 0$$

$$\text{t.q. } |f(x)| \leq M; \quad \forall x \geq 0$$

$$\text{Ainsi } U_n^{(k)}(t) \leq M_k p(x=x_n) e^{\epsilon |x_n|}$$

$\Leftrightarrow$ On a $\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto U_n$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et

$$U_n^{(k)}(t) = (x_n)^k p(x=x_n) e^{tx_n}$$

$$\forall [-\alpha, \alpha] \subset]-\alpha, \alpha[$$

$$|U_n^{(k)}(t)| \leq M_k p(x=x_n) e^{\epsilon |x_n|}$$

Puisque $\epsilon < \alpha \Rightarrow \epsilon \in]x[\Leftrightarrow$

$$\sum_{n \geq 0} p(x=x_n) e^{\epsilon |x_n|} < \infty$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 0} U_n^{(k)} \subset \mathbb{N} \Rightarrow \text{CV sur } [-\alpha, \alpha]$$

Ainsi la fonction π_x est C^∞ sur $]-\alpha, \alpha[$ et

$$\pi_x^{(k)}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (x_n)^k p(x=x_n) e^{tx_n}$$

$$\Rightarrow \pi_x^{(k)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} (x_n)^k p(x=x_n)$$

$$= E(X^k)$$

4) Si $X \subset P(\lambda)$, alors d'après:

2) π_x est définie sur $\mathbb{R}$ et

$$\pi_x(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

$\Rightarrow \pi_X \in C^\infty \text{ auf } \mathbb{R}$

$$E(X^2) = \pi_X''(0) \text{ ist}$$

$$E(X) = \pi_X'(0)$$

$$\text{w. } \pi_X'(t) = \lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)}$$

$$\Rightarrow \pi_X'(0) = \lambda \Rightarrow E(X) = \lambda$$

$$\bullet \pi_X''(t) = \lambda e^t \cdot e^{\lambda(e^t-1)} + \lambda(e^t)^2 e^{\lambda(e^t-1)}$$

$$\Rightarrow \pi_X''(0) = \lambda + \lambda^2 = E(X^2)$$

$$\Rightarrow \text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

$$\Rightarrow \underline{\text{Var}(X) = \lambda}$$

Exercise 6 (M.P. Algebra 2021)

$P\{\omega \in \Omega \mid \pi(\omega) \text{ ist radikal}\}$

$$= P\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = Y(\omega)\}$$

$$= P(X=Y)$$

$$= P\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} X=k, Y=k\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k, Y=k)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) \cdot P(Y=k) \quad (X \text{ et } Y \text{ sind i.p.})$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} p^k (1-p)^{e_k-p} = \frac{p^2}{(1-p)^2} \cdot \frac{(1-p)^{e_1}}{1 \cdot (1-p)^2}$$

Correction de l'exercice 4 :

On a

$$P(S_n = k) = \begin{cases} C_n^k (1-x)^{n-k}, & \text{si } k \leq n; \\ 0, & \text{si } k > n. \end{cases}$$

1. - $E(X_n) = E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n}E(S_n).$

Or
$$\begin{aligned} E(S_n) &= \sum_{k=0}^n k C_n^k (1-x)^{n-k} x^k, \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} k C_{n-1}^k (1-x)^{n-1-k} x^{k+1}, \\ &= nx(1-x+x)^{n-1} = nx. \end{aligned}$$

- $V(X_n) = V\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}V(S_n).$

Or $V(S_n) = E(S_n^2) - (E(S_n))^2.$

Avec
$$\begin{aligned} E(S_n^2) &= \sum_{k=0}^n k^2 C_n^k (1-x)^{n-k} x^k, \\ &= nx \sum_{k=0}^{n-1} k C_{n-1}^k (1-x)^{n-1-k} x^k + nx \sum_{k=0}^{n-1} k C_{n-1}^k (1-x)^{n-1-k} x^k, \\ &= nx(1-x+x)^{n-1} + nx E(S_{n-1}), \\ &= nx(1 + (n-1)x). \end{aligned}$$

D'où $V(S_n) = nx(1-x) \Rightarrow V(X_n) = \frac{x(1-x)}{n}.$

Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on peut affirmer que

$$\forall \alpha > 0, P(|X_n - x| > \alpha) \leq \frac{V(S_n)}{\alpha^2}.$$

On en déduit que

$$\forall \alpha > 0, P(|X_n - x| > \alpha) \leq \frac{1}{4n\alpha^2}.$$

2. X_n est à valeurs dans $\{\frac{k}{n}, \text{ avec } 0 \leq k \leq n\}.$

$$E(f(X_n)) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) P(X_n = \frac{k}{n}) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) P(S_n = k).$$

D'où

$$B_n(f)(x) = E(Y_n) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k (1-x)^{n-k} x^k.$$

La fonction $x \mapsto B_n(f)(x)$ est bien une fonction polynôme.

3.
$$\begin{aligned} \left| \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| > \alpha} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) P(X_n = \frac{k}{n}) \right| &\leq \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| > \alpha} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| P(X_n = \frac{k}{n}) \\ &\leq 2M \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| > \alpha} P(X_n = \frac{k}{n}) \\ &\leq 2M P(|X_n - x| > \alpha). \end{aligned}$$

$$\leq \frac{M}{2n\alpha^2}.$$

Et

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\leq\alpha} \left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P\left(X_n=\frac{k}{n}\right) \right| &\leq \left| \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\leq\alpha} \left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|P\left(X_n=\frac{k}{n}\right) \right| \\ &\leq \epsilon \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\leq\alpha} P\left(X_n=\frac{k}{n}\right) \\ &\leq \epsilon P\left(|X_n-x|<\alpha\right) \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

4. Soit $x \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} |B_n(f)(x) - f(x)| &= |E(f(X_n)) - f(x)| \\ &= \left| \sum_{k=0}^n \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)P\left(X_n = \frac{k}{n}\right) \right| \\ &= \left| \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)P\left(X_n = \frac{k}{n}\right) \right| + \left| \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\leq\alpha} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)P\left(X_n = \frac{k}{n}\right) \right| \\ &\leq \frac{M}{2n\alpha^2} + \epsilon \end{aligned}$$

Or, lorsque $n \rightarrow +\infty$, $\frac{M}{2n\alpha^2} \rightarrow 0$. Donc à partir d'un certain rang, on a

$$\forall x \in [0; 1], |B_n(f)(x) - f(x)| \leq 2\epsilon.$$