

Exercice 12 "Série 1"

$$X(\omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}_+$$

$$1) E(e^{tx}) \exists \text{ et finie} \Leftrightarrow$$

$$\sum_{n \geq 0} e^{tx_n} p(x=x_n) \text{ abs CV}$$

$$\text{ona. } |\bar{e}^{tx_n} \cdot p(x=x_n)| \leq p(x=x_n)$$

$$\text{or } \sum_{n \geq 0} p(x=x_n) < \infty \Rightarrow \sum_{n \geq 0} \bar{e}^{tx_n} p(x=x_n) \text{ est CV}$$

$$\Rightarrow E(e^{tx}) \exists \text{ et finie, } \forall t \geq 0$$

$$\text{on pose. } \phi_x(t) = E(e^{tx}) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{e}^{tx_n} p(x=x_n)$$

$$2) \text{ona. } 0 \leq \phi_x(t) \leq \sum_{n \geq 0} p(x=x_n) = 1$$

$$\text{soit } f_n(t) = \bar{e}^{tx_n} p(x=x_n)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n \text{ continuous } [0, \infty[$$

$$0 \leq \sup_{t \in [0, \infty[} |f_n(t)| \leq p(x=x_n)$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 0} \sup_{t \in [0, \infty[} |f_n(t)| < \infty$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 0} f_n < \infty \Rightarrow \text{CS sur } [0, \infty[$$

$$\text{Donc } \phi_x \text{ est continue sur } [0, \infty[$$

$$\exists a! k \in \mathbb{N}^*, d > 0$$

$$0 \leq x^{k-d} \leq \frac{k!}{d!} \bar{e}^k = f(\frac{k}{d})$$

$$\text{Etude de fonctions}$$

$$b) \text{Req. } \phi_x \text{ est } C^\infty \text{ sur }]0, \infty[$$

$$\cdot \sum_{n \geq 0} f_n < \infty \text{ sur }]0, \infty[$$

$$\cdot k \in \mathbb{N}, f_n \text{ est } C^\infty \text{ sur }]0, \infty[$$

$$\cdot \forall k \in \mathbb{N}^*, f_n(t) = (-x_n)^k \bar{e}^{tx_n} p(x=x_n)$$

$$\text{Soit } [a, b] \subset]0, \infty[$$

$$|p_n^{(k)}(t)| = x_n^k \cdot e^{tx_n} \cdot \frac{p(x=x_n)}{p_n} \leq \frac{k^k}{t^k} e^h p_n \leq p_n \frac{k^k}{a^k} e^h, \forall t \in [a, b]$$

$$\Rightarrow \sup_{t \in [a, b]} |p_n^{(k)}(t)| \leq d \cdot p_n$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 0} \sup_{t \in [a, b]} p_n^{(k)}(t) < \infty \Rightarrow \sum_{n \geq 0} p_n^{(k)} < \infty \Rightarrow C \text{ sur } [a, b]$$

Donc Φ_x est C^∞ sur $[0, \infty[$.

$$\text{et } \Phi_x^{(k)}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-x_n)^k e^{tx_n} p(x=x_n)$$

$$i) a \geq 0, b \geq 0$$

$$\Phi_{ax+b}(t) = E(e^{-tax} \cdot e^{tb}) = e^{tb} E(e^{-tax}) = e^{tb} \Phi_x(at)$$

ii) x et y indép.

$$\Phi_{x+y}(t) = E(e^{-t(x+y)}) = E(e^{-tx} \cdot e^{-ty})$$

$$= E(e^{-tx}) \cdot E(e^{-ty})$$

$$= \Phi_x(t) \cdot \Phi_y(t), \forall t \geq 0$$

$$\Rightarrow \Phi_{x+y} = \Phi_x \cdot \Phi_y$$

$$\text{Car } x \text{ et } y \text{ indép} \Rightarrow e^{-tx} \text{ et } e^{-ty} \text{ indép}$$

$$e) X \hookrightarrow G(p) \Leftrightarrow \begin{cases} X(s) = 1 - p \\ P(X=n) = p(1-p)^{n-1} \end{cases}$$

$$E(\bar{e}^{tx}) < \infty \Leftrightarrow \sum_{n \geq 1} \bar{e}^{tn} \cdot p(1-p)^{n-1} < \infty.$$

$$= \frac{p}{1-p} \sum_{n \geq 1} (\bar{e}^t (1-p))^n < \infty \\ \Leftrightarrow (\bar{e}^t (1-p)) < 1.$$

$$\forall t > -\ln(1-p), \quad E(\bar{e}^{tx}) = \frac{p}{1-p} \cdot \frac{\bar{e}^t (1-p)}{1 - \bar{e}^t (1-p)} \\ \Rightarrow \Phi_X(t) = \frac{p \bar{e}^t}{1 - \bar{e}^t (1-p)}$$

$$f) X \hookrightarrow P(d).$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_X(t) = E(e^{tx}) = e^d (\bar{e}^t - 1)$$

soient mutuellement indépendables

$$b) (X_n)_{n \geq 1} \text{ sont mutuellement indépendables } X_n \hookrightarrow P(d_n) \\ \Rightarrow S_n = X_1 + \dots + X_n \hookrightarrow P\left(\sum_{i=1}^n d_i\right)$$

$$c) a > 0; \quad t > \frac{a}{p} \\ (S_n \leq na) = (\bar{e}^{-t S_n} \geq \bar{e}^{-t na})$$

$x \mapsto \bar{e}^{tx}$ est bijective et décroissante

$$\Rightarrow P(S_n \leq na) = P(\bar{e}^{-t S_n} \geq \bar{e}^{-t na}) \\ \stackrel{\text{Markov.}}{\leq} \frac{E(\bar{e}^{-t S_n})}{\bar{e}^{-t na}} = \frac{E(\bar{e}^{-t})^n}{\bar{e}^{-t na}}$$

Markov. $\Rightarrow$

$$P(X > a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

cas. $(X > a) \subset (X \geq a)$

$$\Rightarrow P(X > a) \leq P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Problème "Loi Zéta"

$\forall k \in [a, b]$

Partie I:

$$1) P(X=n) = \frac{1}{\xi(x)} \frac{1}{n^x}, n \in \mathbb{N}^*.$$

$\Rightarrow \text{un } [a, b]$

$(P(X=n))$ définit une loi de probabilité:

ssi $\sum_{n \geq 1} P(X=n)$ converge, sa somme est égale à 1.

$$\text{or } \sum_{n=1}^{\infty} P(X=n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi(x)} \frac{1}{n^x} = \frac{\xi(x)}{\xi(x)} = 1.$$

$$2) E(X) < \infty \Leftrightarrow \sum_{n \geq 1} n P(X=n) \text{ est abs conv.}$$

$$\frac{1}{\xi(x)} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{x-1}} \text{ est abs conv.} \Leftrightarrow x-1 > 1 \Leftrightarrow x > 2$$

$$\forall x > 2, E(X) = \frac{\xi(x-1)}{\xi(x)}$$

$$3) E(X+k) = \frac{\xi(x-k)}{\xi(x)} \Leftrightarrow x-k > 2 \Leftrightarrow x > k+2$$

$$\text{indép} \Rightarrow e^{-tx} \text{ est } e^{-tx} \text{ indép}$$

on doit

$$E(x-x)^2 \cdot E(x) \geq (E(x-1))^2$$

Can

$$V(x) = E(x^2) - (E(x))^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow E(x^2) \geq (E(x))^2$$

$$\frac{E(x-x)^2}{E(x)} \geq \frac{(E(x-1))^2}{(E(x))^2}$$

4) $a \in \mathbb{N}^*$; $P(x \in a \mathbb{N}^*) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (x = an)\right)$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P(x = an) \quad (2a' \in \text{comp})$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{E(x)} \frac{1}{(an)^x} = \frac{1}{a^x}$$

Partie II:

1) q_i premiers $k \in \{1, \dots, n\}$

$\mathbb{N}_q (x \in q_i \mathbb{N}) \dots ; (x \in q_n \mathbb{N}^*)$ part multipl

Soit $I \subset \{1, \dots, n\}$

$\bigcap_{k \in I} (x \in q_k \mathbb{N}^*) \Leftrightarrow q_k \text{ divise } x, \forall k \in I$

$\Leftrightarrow \prod_{k \in I} q_k \text{ divise } x$

$\Leftrightarrow x \in \left(\prod_{k \in I} q_k\right) \cdot \mathbb{N}^*$

$$\Rightarrow P\left(\bigcap_{k \in I} (x \in q_k \mathbb{N}^*)\right) = P\left(x \in \prod_{k \in I} q_k \mathbb{N}^*\right)$$

$$= \frac{1}{\left(\prod_{k \in I} q_k\right)^x}$$

$$= \prod_{k \in I} \frac{1}{q_k^x} = \prod_{k \in I} P(x \in q_k \mathbb{N}^*)$$

Donc $(x \in q_k \mathbb{N}^*)$ sont mutuellement indépendants

$$2) B_n = \bigcap_{k=1}^n (X \notin q_k \mathbb{N}^*)$$

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} (X \notin q_k \mathbb{N}^*)\right)$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (X \notin q_k \mathbb{N}^*) \Leftrightarrow \nexists k \geq 1: q_k \text{ not divisible by } X,$$

$$\Leftrightarrow X = 1.$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n) = P(X=1)$$

$$b) \text{ona. } P(X=1) = \frac{1}{\xi(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{k=1}^n X \notin q_k \mathbb{N}^*\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n (X \notin q_k \mathbb{N}^*) \quad (\text{mut. indep.})$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{q_k}\right) = \frac{1}{\xi(x)}$$

3) X et Y indep.

A: aucun nombre premier n'est divisible par X et Y simultan.

$\forall q_k$ premier. q_k n'est divisible par X .

$q_k \dots Y$

$$\Rightarrow A = \bigcap_{k=1}^{\infty} (X \notin q_k \mathbb{N}^* \mid \cup (Y \notin q_k \mathbb{N}^*))$$

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$

$$\Rightarrow P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(C_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{k=1}^n (X \notin q_k \mathbb{N}^*) \cup (Y \notin q_k \mathbb{N}^*)\right)$$

mut indep

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n P(X \notin q_k \mathbb{N}^* \mid Y \notin q_k \mathbb{N}^*)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n (1 - P(X \in q_k \mathbb{N}^* \mid Y \in q_k \mathbb{N}^*))$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n (1 - P(X \in q_k \mathbb{N}^*) \cdot P(Y \in q_k \mathbb{N}^*))$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{q_k}\right)$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{1}{\xi(x)}$$

$\rightarrow$ soit $D_k = (X \notin q_k \mathbb{N}^*) \cup (Y \notin q_k \mathbb{N}^*)$

$\prod_{k=1}^n P(D_k)$ sont mut indep

$\Rightarrow \prod_{k=1}^n P(D_k)$

Soit $I_n = \{1, \dots, n\}$

$$P\left(\bigcap_{k \in I_n} D_k\right) = P\left(\bigcap_{k \in I_n} (X \notin q_k \mathbb{N}^*) \cup (Y \notin q_k \mathbb{N}^*)\right)$$

$$= P\left(\bigcap_{k \in I_n} X \notin q_k \mathbb{N}^* \mid \bigcap_{k \in I_n} Y \notin q_k \mathbb{N}^*\right)$$

$$= P \left(x \in \prod_{k \in I} q_k \mathbb{N}^* \cap y \in \prod_{k \in I} q_k \mathbb{N}^* \right)$$

$$= P \left(x \in \prod_{k \in I} q_k \mathbb{N}^* \right) \cdot P \left(y \in \prod_{k \in I} q_k \mathbb{N}^* \right) \quad \text{ind \& o p}$$

$$= \frac{1}{\left(\prod q_k \right)^{\text{ex.}}} = \prod_{k \in I} \frac{1}{q_k^{\text{ex.}}} = \prod_{k \in I} P(\cdot | D_k)$$

$\Rightarrow E(x)$ Set finie.

c) hyp $E(x)$ Set finie.

Rq. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot P(x > n) = 0$

$$\text{ona } n \cdot P(x > n) = n \cdot P\left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} (x=k)\right)$$

$$= n \sum_{k=n+1}^{\infty} P(x=k).$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} k \cdot P(x=k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

car $\sum_{n \geq 0} n \cdot P(x=n)$ C.V.

Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot P(x > n) = 0$

d'après a)

$\sum_{k=0}^{\infty} P(x > k)$ C.V. et.

$$E(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P(x > k)$$

$\Rightarrow$

2) APP

a) $(X \leq k) =$ le plus grand nombre obtenu est $\leq k \Rightarrow$ on tire les boules numérotées, ^{parmi} $\{1, \dots, k\}$.

$$\Rightarrow P(X \leq k) = \left(\frac{k}{N} \right)^n = \left(\frac{C_k^1}{C_N^1} \right)^n$$

$$* X(\Omega) = \{1, \dots, N\}$$

$$P(X=k) = P(X \leq k) - P(X \leq k-1) \\ = \left(\frac{k}{N} \right)^n - \left(\frac{k-1}{N} \right)^n$$

b) On a $X(\Omega)$ est finie $\Rightarrow E(X)$ est finie.

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X > k) = \sum_{k=0}^{N-1} P(X > k)$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} (1 - P(X \leq k)) = \sum_{k=0}^{N-1} \left(1 - \left(\frac{k}{N} \right)^n \right)$$

$$E(X) = N - \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{k}{N} \right)^n$$

c)

$$\frac{E(X)}{N} = 1 - \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{k}{N} \right)^n$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{E(x)}{N} = 1 - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n$$

Sum of Riemann

$$= 1 - \int_0^1 x^n dx$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

→