

Def: X est un v. al. discrète
 car il app. $X: \Omega \rightarrow E$ (ensemble
 énumérable)

bp. $\forall x \in E(\Omega)$;
 $X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{G}$
 note $\uparrow$ événement
 $(X=x)$

$\forall U \subset X(\Omega)$
 $(X \in U) = X^{-1}(U)$

$(X \in U) = \complement (X \notin U)$
 $(X \in (A \cup B)) = (X \in A) \cup (X \in B)$
 $(X \in \bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} (X \in A_i)$
 $(X \in \bigcap_{i \in I} A_i) = \bigcap_{i \in I} (X \in A_i)$
 Si $A \cap B = \emptyset \Rightarrow (X \in A) \cap (X \in B) = \emptyset$

Variable aléatoire
 discrète (v. al.)

$P_X: \mathcal{P}(X(\Omega)) \rightarrow [0,1]$
 $A \mapsto P_X(A) = P(X \in A)$
 Loi de probabilité de X

Si X est un v. al. réelle
 $\forall a \in \mathbb{R}; (X \leq a) = (X \in]-\infty, a])$
 $\complement (X \leq a) = (X > a)$

Si $X(\Omega) = \mathbb{N}$
 $\forall n \in \mathbb{N}; (X \geq n) = \bigcup_{k=n}^{+\infty} (X=k)$
 $(X \geq n) = (X=n) \cup (X > n)$
 $(X > n-1) = (X=n) \cup (X > n)$

Soit X v. al. $X: \Omega \rightarrow E$
 et $f: X(\Omega) \rightarrow F$ (ensemble
 énumérable)
 Alors $f \circ X: \Omega \rightarrow F$ est un
 v. al.

Si $X(\Omega) = \{x_k, k \in \mathbb{N}\}$
 $(X=x_k)$ est un système complet.
 (si $k \neq l$ $x_k \neq x_l$)

Rappel:

$f: E \rightarrow F$ app.

$\forall A \subset F, \forall B \subset F$

1) $f^{-1}(C_A) = f^{-1}(A)$

2) $f(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

3) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

4) $f^{-1}(\bigcap_{i \in I} A_i) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(A_i)$

5) $f^{-1}(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i)$

$\rightarrow X(\Omega) = \{x_k, k \in I \subset \mathbb{N}\}$ $x_k \neq x_{k'}, \forall k \neq k'$
 $(X=x_k) \cap (X=x_{k'}) = \emptyset$
 $\bigcup_{k \in I} (X=x_k) = (X \in \bigcup_{k \in I} \{x_k\}) = (X \in X(\Omega)) = \Omega$

$\Rightarrow (X=x_k)$ est un syst. complet.

* Déterminer la loi de $X \Leftrightarrow$ déterminer $X(\Omega)$
et $P(X=x_k), \forall x_k \in X(\Omega)$

$\Leftrightarrow \forall A \subset X(\Omega) \Rightarrow A = \{x_j, j \in J \subset I\}$
 $\Rightarrow P(X \in A) = P(X \in \bigcup_{j \in J} \{x_j\})$
 $= \sum_{j \in J} P(X=x_j)$

* $(P_k)_{k \in I}$ est une famille de probab.
 $\sum_{k \in I} P_k \leq 1$

$$X \sim Y (X \hookrightarrow Y)$$

X et Y suivent la m[^]me loi

$$\Leftrightarrow X(\Omega) = Y(\Omega)$$

et

$$\forall x \in X(\Omega), P(X=x) = P(Y=x)$$

Ex

$$X(\Omega) = \{-1, 1\}$$

$$P(X=1) = P(X=-1) = \frac{1}{2}$$

X et $-X$ suivent la m[^]me loi

car

$$-X(\Omega) = \{-1, 1\}$$

$$P(-X=1) = P(X=-1) = \frac{1}{2}$$

$$= P(X=1)$$

$$P(-X=-1) = P(X=1) = \frac{1}{2} = P(X=-1)$$

$$\forall x_k, \forall y_j, \\ P(X, Y = (x_k, y_j)) = P((X=x_k, Y=y_j)) \\ = P((X=x_k) \cap (Y=y_j)) \\ = p_{k,j}$$

$(p_{k,j})$ est normalisée
et de normalisée à 1.

→ Les lois marginales

$$\forall k \in I, P(X=x_k) = \sum_{j \in J} P(X=x_k, Y=y_j)$$

$$\forall j \in J, P(Y=y_j) = \sum_{k \in I} P(X=x_k, Y=y_j)$$

$$\rightarrow P(X=x_k | Y=y_j) = \frac{P(X=x_k, Y=y_j)}{P(Y=y_j)}$$

Loi conditionnelle

Loi conjointe d'un couple de v.a.d.
 $X(I) = \{x_k, k \in I\}$
 $Y(J) = \{y_j, j \in J\}$

X et Y sont indépendantes
 $\Leftrightarrow \forall k, \forall j, (X=x_k) \text{ et } (Y=y_j) \text{ sont indep}$
 $\Rightarrow P(X=x_k, Y=y_j) = P(X=x_k) \cdot P(Y=y_j)$
 $\Rightarrow P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) \cdot P(Y \in B)$

Si X et Y sont indep, alors
 $\forall f, \forall g$ les v.a.d.
 $f(X)$ et $g(Y)$ sont indep

$\Leftrightarrow (f(X) \in A) \text{ et } (g(Y) \in B)$
 $(X \in f^{-1}(A)) \text{ et } (Y \in g^{-1}(B))$
sont indep

$$\begin{aligned}
 P(X=x_k) &= P(X=x_k \cap \Omega) \\
 &= P(X=x_k \cap \bigcup_{j \in J} (Y=y_j)) \\
 &= P\left(\bigcup_{j \in J} (X=x_k, Y=y_j)\right) \\
 &= \sum_{j \in J} P(X=x_k, Y=y_j)
 \end{aligned}$$

Exercice: Soit $X \subset P(n)$
 et $Y \subset P(n)$
 by X et Y sont indépendants
 Tq. $X \cup Y \subset P(n \cup n)$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Prop. $X|\Omega = n$; $Y|\Omega = n$
 $P(X=n) = \frac{d^n}{n!} e^{-d}$; $P(Y=n) = \frac{p^n}{n!} e^{-p}$
 $(X+Y)|\Omega = n$
 then $n \in \mathbb{N}$; $P(X+Y=n) = P\left(\bigcup_{k=0}^n (X=k, Y=n-k)\right)$
 $= \sum_{k=0}^n P(X=k, Y=n-k)$
 $= \sum_{k=0}^n P(X=k) \cdot P(Y=n-k)$ $\downarrow$ X et Y indep
 $= \sum_{k=0}^n \frac{d^k}{k!} e^{-d} \cdot \frac{p^{n-k}}{(n-k)!} e^{-p}$
 $= \frac{e^{-d-p}}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d^k p^{n-k} = \frac{e^{-d-p}}{n!} (d+p)^n$
 $\Rightarrow X+Y \subset P(n \cup n)$

Exercice 1

$$X(\omega) = Y(\omega) = N$$

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2; P(X=n, Y=p) = \begin{cases} \frac{d^n e^{-d} \alpha^p (1-\alpha)^{n-p}}{p!(n-p)!} & \text{si } 0 \leq p \leq n \\ 0 & \text{si } p > n. \end{cases}$$

1) $(U_{n,p})_{\substack{n \geq 0 \\ p \geq 0}}$ définie une loi de couple $\Leftrightarrow$

$(U_{n,p})_{\substack{n \geq 0 \\ p \geq 0}}$ est sommable et son égal 1.

Soit $n \in \mathbb{N}$ (fixe); $\sum_{p=0}^n U_{n,p} \subset \mathbb{N}$ (so. finie)

$$\begin{aligned} \text{et } \sum_{p=0}^n U_{n,p} &= \sum_{p=0}^n \frac{d^n e^{-d} \alpha^p (1-\alpha)^{n-p}}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{d^n e^{-d}}{n!} \left(\sum_{p=0}^n \frac{n!}{p!(n-p)!} \alpha^p (1-\alpha)^{n-p} \right) \\ &= \frac{d^n e^{-d}}{n!} (1-\alpha)^n \sum_{p=0}^n \frac{n!}{p!(n-p)!} \alpha^p (1-\alpha)^{n-p} \\ &= \frac{d^n e^{-d}}{n!} (1-\alpha)^n \cdot 1 \end{aligned}$$

Alors la famille est sommable

$$\text{et } \sum_{n,p} U_{n,p} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} U_{n,p} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n e^{-d}}{n!} = 1$$

2) * Loi de X:

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}; P(X=n) &= \sum_{p=0}^{\infty} P(X=n, Y=p) \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} U_{n,p} = \frac{d^n e^{-d}}{n!} \end{aligned}$$

$\Rightarrow X \sim P(d)$.

* Loi de Y:

$$\begin{aligned} P(Y=p) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(X=n, Y=p) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n e^{-d} \alpha^p (1-\alpha)^{n-p}}{p!(n-p)!} \end{aligned}$$

$$= \frac{e^{-\lambda} \lambda^p}{p!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n+p} (1-\alpha)^n}{n!}$$

$$= \frac{e^{-\lambda} (\lambda \cdot \alpha)^p}{p!} e^{\lambda(1-\alpha)} = \frac{e^{-\lambda \alpha}}{p!} (\lambda \alpha)^p$$

Dabei: $Y \hookrightarrow P(\lambda \alpha)$.

$$\begin{aligned} 3) \quad P(X=0, Y=0) &= e^{-\lambda} \\ P(X=0) \cdot P(Y=0) &= e^{-\lambda} \cdot e^{-\lambda \alpha} = e^{-\lambda(1+\alpha)} \quad (\alpha \neq 0) \\ &\neq e^{-\lambda} \end{aligned}$$

$\Rightarrow P(X=0, Y=0) \neq P(X=0) \cdot P(Y=0)$
 $\Rightarrow X$ et Y ne sont pas indép.

$$\begin{aligned} 4) \quad Z &= X - Y \\ Z(n) &= Z \end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{Z}$, $P(Z=n) = P(X-Y=n)$

Exercice 1

$$X|Y=y \sim \text{IN}$$

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2: P(X=n, Y=p) = \begin{cases} \frac{d^n e^{-d} \alpha^p (1-\alpha)^{n-p}}{p!(n-p)!} & \text{si } 0 \leq p \leq n \\ 0 & \text{si } p > n \end{cases}$$

Unp

$$P(Z=n) = P(X-Y=n) = P(X=Y+n)$$

$$= P\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} (X=k+n, Y=k)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k+n, Y=k)$$

* si $n \in \mathbb{Z}^+$ $\Rightarrow k+n < k \Rightarrow P(X=k+n, Y=k) = 0, \forall k \in \mathbb{N}$

* si $n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow k+n \geq k$

$$\Rightarrow P(Z=n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^{k+n} e^{-d} \alpha^k (1-\alpha)^{n-k}}{n! k!}$$

$$= \frac{e^{-d}}{n!} d^n (1-\alpha)^n e^{d\alpha}$$

$$= \frac{(d(1-\alpha))^n}{n!} e^{-d(1-\alpha)}$$

$$\Rightarrow Z(\Omega) = \mathbb{N}$$

$$\text{et } P(Z=n) = \frac{(d(1-\alpha))^n}{n!} e^{-d(1-\alpha)}$$

$$\Rightarrow Z \subset P(d(1-\alpha))$$

$$s) a! \quad n \in \mathbb{N}$$

$$P(Y=j|Z=n) = \frac{P(Y=j, Z=n)}{P(Z=n)}$$

$$= \frac{P(Y=j; X-Y=n)}{P(Z=n)}$$

$$= \frac{P(Y=j; X=j+n)}{P(Z=n)}$$

$$= \frac{d^{j+n} e^{-d} \alpha^j (1-\alpha)^{n-j}}{n! j!}$$

$$P(Y=j|Z=n) = \frac{(d\alpha)^j}{j!} e^{-d\alpha}$$

$$= P(Y=j)$$

b) Puisque $P(Y=j|Z=n) = P(Y=j)$

Alors Z et Y sont indépendants.

6) X : le nombre d'enfants $\therefore X \sim P(d)$
 Y : " de garçons.

$\Rightarrow Z = X - Y =$ le nombre de filles.

$$P(Y=p|X=n) = \frac{\binom{n}{p} \alpha^p (1-\alpha)^{n-p}}{P(X=n, Y=p)}$$

$\delta \quad p \leq n$
 $\delta \quad p > n$

$$\Rightarrow P(X=n, Y=p) = \begin{cases} \binom{n}{p} \alpha^p (1-\alpha)^{n-p} & \delta \quad p \leq n \\ 0 & \delta \quad p > n \end{cases}$$

$\delta \quad p > n$ $\delta \quad p \leq n$

1 nuplet de v.a.d.

→ $X_1, \dots, X_n$ n.v.a.d.

La loi conjointe de $(X_1, \dots, X_n)$

$$P(X_1=x_1, \dots, X_n=x_n) = P(X_1=x_1) \cdot P(X_2=x_2) \cdot \dots \cdot P(X_n=x_n)$$

$$P(X_1, X_2, \dots, X_n) = (x_1, \dots, x_n)$$

→ Les lois marginales.

$$P(X_k=x_k) = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_{k-1}, \\ i_{k+1}, \dots, i_n}} P(X_1=x_{i_1}, \dots, X_{k-1}=x_{i_{k-1}}, X_k=x_k, X_{k+1}=x_{i_{k+1}}, \dots, X_n=x_{i_n})$$

→ les v.a.d. $(X_1, \dots, X_n)$ sont mutuellement indep
⇔ $\forall x_1, \dots, x_n \in (X_i(\Omega)) = X_i(\Omega)$
les événements $(X_1=x_1), \dots, (X_n=x_n)$ sont mut indep

$$P(\prod_{i \in J} (X_i=x_i)) = \prod_{i \in J} P(X_i=x_i) \quad \forall J \text{ fini } \subset \{1, \dots, n\}$$

→ Soit f, g deux fonctions

si $X_1, \dots, X_n$ sont mut indep

Alors $\forall k \in \{1, \dots, n-1\}$
 $f(X_1, \dots, X_k)$ et $g(X_{k+1}, \dots, X_n)$
sont indep

Exp. $X_1 + X_2 + \dots + X_{n-1}$ et X_n
 X_1, X_2 et $X_3 + X_4 + \dots + X_n$
sont indep

