

Exercise 2

$X_1, X_2, \dots, X_N$: N. i.i.d. with p

$$X_i \mapsto G(p)$$

$$\begin{aligned} 1) \quad P(X_i \leq n) &= P\left(\bigcup_{k=1}^n (X_i = k)\right) \\ &= \sum_{k=1}^n P(X_i = k) = \sum_{k=1}^n p(1-p)^{k-1} \\ &= \frac{p(1-(1-p)^n)}{p} = 1 - q^n \end{aligned}$$

$$2) \quad Y = \min\{X_i, i \in \{1, \dots, N\}\}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad P(Y > n) &= P(X_1 > n, X_2 > n, \dots, X_N > n) \\ &\stackrel{\text{mut. indep.}}{=} \prod_{i=1}^N P(X_i > n) = \prod_{i=1}^N q^n = q^{nN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \quad P(Y > n-1) &= P(Y > n \cup Y = n) \\ &= P(Y > n) + P(Y = n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^+ \Rightarrow P(Y = n) &= P(Y > n-1) - P(Y > n) \\ &= (q^{n-1})^N - (q^n)^N \\ &= q^{(n-1)N} (1 - q^N) \end{aligned}$$

$$\text{Then } Y \mapsto G(1 - q^N)$$

Exp $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}) \Rightarrow E(X) = \lambda$
 $\sum_{n \geq 0} n P(X=n) = \sum_{n \geq 0} n \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$ est abscv (D'Alembert)
 $E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} n P(X=n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda} = \lambda$

$E(X) < \infty, E(Y) < \infty, \forall \lambda \in \mathbb{R}$
 $X(\omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}, Y(\omega) = \{y_p, p \in \mathbb{N}\}$
 soit $f: X(\omega) \times Y(\omega) \rightarrow \mathbb{R}$

$(x, y) \mapsto \lambda x + y$
 $E(\lambda x + y) = E(f(x, y))$. Est finie $\Leftrightarrow$
 la famille

$(\lambda x_n + y_p) P(X=x_n, Y=y_p)$ est sommable
 $\left(\lambda x_n + y_p \right)_{n,p}$

$\forall n, p, |\lambda x_n + y_p| \leq |\lambda| (|x_n| + |y_p|) P(X=x_n, Y=y_p)$
 $\leq |\lambda| (|x_n| \cdot P(X=x_n, Y=y_p) + |y_p| \cdot P(X=x_n, Y=y_p))$

$R_q (U_{n,p})$ est sommable
 soit $n \in \mathbb{N}$. $\sum_{p \geq 0} U_{n,p} = \sum_{p \geq 0} |x_n| \cdot P(X=x_n, Y=y_p)$
 CV.

$\sum_{p=0}^{\infty} U_{n,p} = |x_n| \cdot \sum_{p=0}^{\infty} P(X=x_n, Y=y_p)$
 $= |x_n| P(X=x_n)$

$\sum_{n \geq 0} |x_n| P(X=x_n) < \infty$ car $E(X)$ est finie
 De m. $(U_{n,p})$ est sommable

$\Rightarrow (U_{n,p})$ est sommable $\Rightarrow E(\lambda x + y)$ est finie
 $E(\lambda x + y) = \sum_{n,p} (\lambda x_n + y_p) P(X=x_n, Y=y_p)$
 $= \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} x_n P(X=x_n, Y=y_p) + \sum_{p=0}^{\infty} y_p \sum_{n=0}^{\infty} P(X=x_n, Y=y_p)$
 $= \lambda E(X) + E(Y)$

51. X est bonnie. $\Rightarrow \exists \pi > 0$ tel $|x| \leq \pi, \forall x \in X(\Omega)$
 $(|X| \leq \pi)$

$\Rightarrow |x| P(X=x) \leq \pi \cdot P(X=x)$
 or $(P(X=x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable d'ordre 1.

$E(X) \exists < \infty, E(Y) \exists < \infty, \forall \lambda \in \mathbb{R}$
 $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}, Y(\Omega) = \{y_p, p \in \mathbb{N}\}$
 soit $f: X(\Omega) \times Y(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto x \cdot y$

$E(x \cdot y) = E(f(x, y))$. Est finie $\Leftrightarrow$
 la famille

$$\left((x_n \cdot y_p) P(X=x_n, Y=y_p) \right)_{n,p} \text{ est sommable}$$

$R_q (U_{n,p})$ est sommable
 soit $n \in \mathbb{N}$. $\sum_{p \geq 0} U_{n,p} = \sum_{p \geq 0} (x_n \cdot y_p) P(X=x_n, Y=y_p)$

$$\sum_{p=0}^{\infty} (U_{n,p}) = |x_n| \cdot \sum_{p=0}^{\infty} (y_p) P(X=x_n, Y=y_p) \quad \text{CV.}$$

$$= |x_n| P(X=x_n) \quad \text{avec } P$$

$\sum_{n \geq 0} (|x_n| P(X=x_n))$ CV. car $E(X)$ est finie

$\Rightarrow (U_{n,p})$ est sommable $\Rightarrow E(x \cdot y)$ est finie

$$E(x \cdot y) = \sum_{n,p} (x_n \cdot y_p) P(X=x_n, Y=y_p)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x_n \cdot P(X=x_n) \sum_{p=0}^{\infty} y_p P(Y=y_p)$$

$$= E(X) \cdot E(Y)$$

$(x=x_n, y=y_p)$

51. X est bornée $\Rightarrow \exists \pi > 0$ tel $|x| \leq \pi, \forall x \in X(\Omega)$
 $(|x| \leq \pi)$

$$\Rightarrow \sum_{x \in X(\Omega)} |x| P(X=x) \leq \pi \cdot \sum_{x \in X(\Omega)} P(X=x) = \pi$$

est bornée donc $\rightarrow 1$.

$$\rightarrow E(X^2) < \infty \Leftrightarrow E(X) < \infty$$

$$\forall x \in X(\Omega) : 2|x| \leq (1+x^2)$$

$$2|x| \cdot P(X=x) \leq P(X=x) + x^2 P(X=x)$$

Inégalité de Markov

$$X \geq 0 \Leftrightarrow X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$$

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X=x) \geq \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \geq a}} x P(X=x)$$

$$\geq a \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \geq a}} P(X=x)$$

$$= a P\left(\bigcup_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \geq a}} (X=x)\right)$$

$$\Rightarrow P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Exercice 9 "Serie 1".

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ mutuellement indep

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

$$S_n = X_1 + \dots + X_n.$$

$$1) E(S_n) = \sum_{k=1}^n E(X_k).$$

$$2) E(X_k) = 1 P(X_k = 1) + (-1) P(X_k = -1) = 0$$

$$\Rightarrow E(S_n) = 0.$$

3) T et $-T$ ont la même loi.

$$a) \text{ Alors } E(\sin T) = E(\sin(-T)) = E(-\sin T) \\ = -E(\sin T) \\ \Rightarrow E(\sin T) = 0$$

b) Set T sont indep

$$E(\cos(S+T)) = E(\cos S \cos T - \sin S \sin T) \\ = E(\cos S \cos T) - E(\sin S \sin T).$$

Set T sont indep
Alors $\cos S$ et $\cos T$ sont indep
 $\sin S$ et $\sin T$ " "

$$\text{Donc } E(\cos(S+T)) = E(\cos S) E(\cos T) - E(\sin S) E(\sin T)$$

$$\Rightarrow E(\cos(S+T)) = E(\cos S) E(\cos T)$$

$$3) \forall n \in \mathbb{N}^*, E(\cos(S_n)) = (\cos t)^n.$$

$$\text{Pour } n=1, E(\cos(S_1)) = E(\cos(X_1)) = E(f(X_1))$$

$$\text{avec } f(x) = \cos x. \\ \text{Hs } f(1) P(X_1=1) + f(-1) P(X_1=-1) \\ = \frac{1}{2} \cos 1 + \frac{1}{2} \cos(-1) = \cos 1.$$

Set $n \in \mathbb{N}^*$. Nepp Brouche et n'ou
Pour ne pas mentir pour $n+1$.

$$E(\text{cor} S_{n+1}) = E(\text{cor} S_n + X_{n+1})$$

or $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont mutuellement ind. p, alors

S_n et X_{n+1} sont ind. p

$\therefore X_{n+1}$ et $-X_{n+1}$ ont la m. l. e., alors

D'après 2/.

$$\begin{aligned} E(\text{cor} S_{n+1}) &= E(\text{cor} S_n) \cdot E(\text{cor} X_{n+1}) \\ &= (\text{cor})^n \cdot \text{cor} = (\text{cor})^{n+1} \end{aligned}$$

Variance et Covariance de v. ad. réels.

→ X admet une variance si $E(X^2)$ est finie.

$$V(X) = \underline{E((X - E(X))^2)} \geq 0$$
$$= \underline{E(X^2) - (E(X))^2}$$

can.

$$E((X - E(X))^2) = E(X^2 - 2XE(X) + (E(X))^2)$$
$$= E(X^2) - 2(E(X))^2 + E(X)^2$$
$$= E(X^2) - (E(X))^2$$

* $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ écart-type.

* si $\sigma(X) \neq 0$, on pose $Y = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$

$$\Rightarrow V(Y) = \frac{V(X)}{\sigma(X)^2} = 1$$

$$\rightarrow V(ax+b) = a^2 V(X)$$

can.

$$V(ax+b) = E((ax+b)^2) - (E(ax+b))^2$$
$$= a^2 E(X^2) + 2abE(X) + b^2$$
$$- a^2 (E(X))^2 - 2abE(X) - b^2$$
$$= a^2 V(X)$$

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

si $E(X^2)$ est finie, $\forall \epsilon > 0$

$$P(|X - E(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{V(X)}{\epsilon^2}$$

can.

$$P(|X - E(X)| \geq \epsilon) = P((X - E(X))^2 \geq \epsilon^2)$$

Markov.

$$\leq \frac{E((X - E(X))^2)}{\epsilon^2} = \frac{V(X)}{\epsilon^2}$$

Def on dit que X est d'esperance finie. si la famille $(\sum_{x \in X(\Omega)} x P(X=x))$ est sommable.

Dans ce cas.

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X=x)$$

soit $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$.
 $E(X)$ est finie $\Leftrightarrow$
 $\sum_{n \geq 0} x_n P(X=x_n)$ est abs cv.

Th. de Transfert.

$f(x)$ admet une esperance finie $\Leftrightarrow$ la famille $(f(x) \cdot P(X=x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable.

Dans ce cas. $E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) P(X=x)$

$E(|X|)$ est finie $\Rightarrow E(X)$ est finie

$|E(X)| \leq E(|X|)$

si f est bornee $\Rightarrow E(f(X))$ est finie

Esperance d'une v. al. reel.

X admet un moment d'ordre k .
 $\Rightarrow E(X^k)$ est finie

si $E(X) < \infty \Rightarrow E(X^2) < \infty$

si $X = a \Rightarrow E(X) = a$
 si $X \geq 0 \Rightarrow E(X) \geq 0$
 si $X \leq Y$ et $E(X) < \infty, E(Y) < \infty$
 Alors $E(X) \leq E(Y)$

si $a \leq X \leq b$ (X bornee) $\Rightarrow E(X)$ est finie.
 $\Rightarrow a \leq E(X) \leq b$

si $E(X) < \infty, E(Y) < \infty$
 X et Y sont indépendants
 $E(X \cdot Y)$ est finie et
 $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$

si $E(X^2) < \infty, E(Y^2) < \infty$
 Alors $E(X \cdot Y)$ est finie.
 et on a $(E(X \cdot Y))^2 \leq E(X^2) \cdot E(Y^2)$

Inegalite de Markov.

si $X \geq 0$, $E(X)$ est finie.
 Alors $\forall a \in \mathbb{R}^*$
 si $E(X) < \infty$
 $X = X - E(X) \Rightarrow E(Y) = 0$
 $P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$

Covariance

$$\begin{aligned} E(X^2) < \infty, E(Y^2) < \infty \\ \text{Cov}(X, Y) &= E[(X - E(X))(Y - E(Y))] \\ &= E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= E[X \cdot Y - X \cdot E(Y) - Y \cdot E(X) + E(X) \cdot E(Y)] \\ &= E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) + E(X) \cdot E(Y) \\ &= E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) \end{aligned}$$

→ Si X et Y sont indép, $\text{Cov}(X, Y) = 0$

→ Si $E(X^2) < \infty$ et $E(Y^2) < \infty$, alors

$$\begin{aligned} V(X+Y) &= \text{Cov}(X+Y, X+Y) \\ &= \text{Cov}(X, X) + \text{Cov}(Y, Y) + 2\text{Cov}(X, Y) \\ &= V(X) + V(Y) + 2\text{Cov}(X, Y) \end{aligned}$$

Si X et Y sont indép, alors
 $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$

→ $E(X_i)$ $\exists$ et finie

$$V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2 \sum_{i < j} \text{Cov}(X_i, X_j)$$

→ Si les (X_i) sont 2 à 2 indép
Alors $V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i)$

Loi faible des grands nombres

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de v.a. aléa. 2 à 2 indép
tg $E(X_n) < \infty$ tg $E(X_n) = m, \forall n \in \mathbb{N}$
Soit $S_n = \sum_{k=1}^n X_k \Rightarrow E(S_n) = m \cdot n$
 $V(X_n) = \sigma^2$
 $V(S_n) = \sigma^2 \cdot n$

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) &\leq \frac{V(S_n)}{n^2 \varepsilon^2} = \frac{\sigma^2 \cdot n}{n^2 \varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n \varepsilon^2} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) &= 0 \end{aligned}$$