

$\underline{\text{Exp}}$ $X \hookrightarrow g(p); p \in]0,1[$
 $\sum_{n \geq 1} t^n p(x=n) = \sum_{n \geq 1} t^n \cdot p(1-p)^{n-1}$
 $\text{abs conv. } |t| < \frac{1}{1-p}$
 $\Rightarrow R = \frac{1}{1-p}$

$\forall t \in]-\frac{1}{1-p}, \frac{1}{1-p}[$

$G_X(t) = \frac{p}{1-p} \sum_{n=1}^{\infty} (t(1-p))^n = \frac{p}{1-p} \frac{t(1-p)}{1-t(1-p)}$
 $= \frac{pt}{1-t(1-p)}$

$\star$ Soit X v. a. d. $X|0) = 1/p$
 $\text{et } G_X(t) = e^{t(X-1)}$
 $\parallel$
 $\sum_{n=0}^{\infty} t^n p(x=n)$
 $= e^{t/p - t} = e^{t(1/p - 1)}$

$\Rightarrow$ unicité de DSE(0.)
 $P(X=n) = e^{-t} \frac{t^n}{n!}$

$\Rightarrow X \hookrightarrow P(d)$

$X \in \mathbb{N} \subset \mathbb{N}$
 $\sum_{n=0}^{\infty} t^n P(X=n)$: série entière
 de rayon $R \geq 1$.

on pose:
 $G_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P(X=n)$
 $\forall t \in]-R, R[$
 $E(t^X)$

Fonction génératrice

G_X est ~~convergente~~ $\forall t \in]-R, R[$.
 $\Rightarrow k \in \mathbb{N}; P(X=k) = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!}$

X et Y ont la même loi
 $\Leftrightarrow G_X = G_Y$

Si X et Y sont indep
 $G_{X+Y} = G_X \cdot G_Y$
 Si $(X_i)_{i=1}^n$ sont mut indep
 $G_{\sum_{i=1}^n X_i} = \prod_{i=1}^n G_{X_i}$

$E(X)$ est finie $\Leftrightarrow$
 G_X est dérivable en 1 et
 $G'_X(1) = E(X)$

$V(X)$ est finie $\Leftrightarrow G_X$ est 2 fois dérivable en 1.

et $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2$
 Si $R > 1 \Rightarrow G_X$ est 2 fois dérivable
 en 1 $\Rightarrow E(X)$ est finie
 et $V(X)$ est finie

Prq. $E(X)$ est finie $\Leftrightarrow G_x$ est dérivable en 1.
 $G'_x(1) = E(X)$.

" " G_x est définie sur $[0, 1]$.

Prq. G_x est C^1 sur $[0, 1]$.

Soit $U_n(t) = t^n P(X=n)$, $n \in \mathbb{N}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, U_n est C^1 sur $[0, 1]$
 $U'_n(t) = n t^{n-1} P(X=n)$.

$$\sup_{t \in [0, 1]} |U'_n(t)| = n P(X=n)$$

Or $E(X)$ est finie $\Rightarrow \sum_{n \geq 0} n P(X=n) < \infty$.

$\Rightarrow \sum_{n \geq 0} U'_n \subset \mathbb{R} \Rightarrow C^1$ sur $[0, 1]$.

$\Rightarrow G_x$ est C^1 sur $[0, 1]$ et
 $G'_x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n t^{n-1} P(X=n)$

$$\Rightarrow G'_x(1) = E(X)$$

" " hyp G_x est dérivable en 1.

$$\frac{G_x(t) - G_x(1)}{t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t^n - 1) P(X=n)}{t - 1}$$

$$\text{Or } \sum_{k=0}^n \underbrace{\left(\frac{t^k - 1}{t - 1} \right)}_{\geq 0} P(X=k) \leq$$

$$\frac{G_x(t) - G_x(1)}{t - 1}$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 1} \sum_{k=0}^n (1 + t + \dots + t^{k-1}) P(X=k) \leq 1$$

$$\sum_{k=0}^n \underbrace{k P(X=k)}_{\geq 0} \leq G'_x(1)$$

$\Rightarrow \left(\sum_{k=0}^{\infty} k P(X=k) \right)$ est majoré.

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} k P(X=k) < \infty$
 $\Rightarrow E(X)$ est finie.

Exercice 2 17/2024.

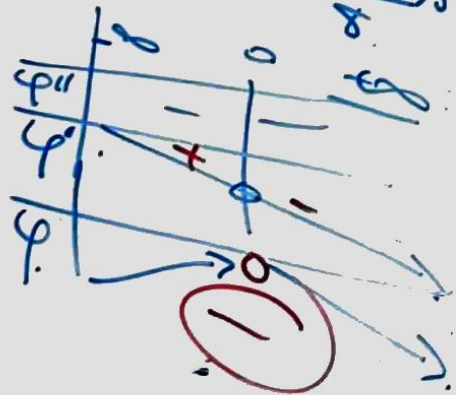
$$1) \quad 0 \leq e^{\lambda y} \leq \underbrace{\frac{\beta - y}{\beta - \alpha}}_{\lambda} e^{\lambda \alpha} + \underbrace{\frac{y - \alpha}{\beta - \alpha}}_{\lambda'} e^{\lambda \beta}$$

$\lambda + \lambda' = 1$

soit $f(t) = e^{\lambda t}$ est 2 fois dérivable
et $f''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t} \geq 0 \Rightarrow$ Convexe.

$$2) \quad \varphi(\lambda) = \ln(\beta e^{\lambda \alpha} - \alpha e^{\lambda \beta}) - \underbrace{(\beta - \alpha)}_{\delta} \lambda e^{\lambda} - \ln(\beta - \alpha)$$

$$\varphi''(\lambda) \leq 0$$



$$4) \quad \alpha \leq Y \leq \beta \Rightarrow Y \text{ est bornée}$$

$$\Rightarrow E(Y) \text{ est finie}$$

$$\text{et } E(\alpha) \leq E(Y) \leq E(\beta)$$

$$\underline{\alpha \leq E(Y) \leq \beta}$$

$$\alpha \leq Y \leq \beta$$

$$\alpha \leq E(Y) \leq \beta$$



$$\Rightarrow |E(Y) - Y| \leq \beta - \alpha$$

$$5) \text{ on a } |E(Y) - Y| \leq (\beta - \alpha) e^{\lambda}$$

$$\Rightarrow E((E(Y) - Y)^2) \text{ est finie}$$

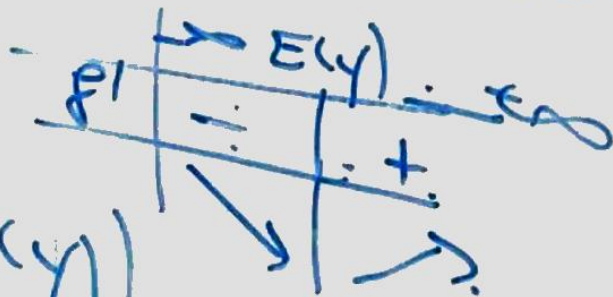
$$\Rightarrow V(Y) \text{ est finie}$$

Sei $f(x) = E((Y-x)^2); x \in \mathbb{R}$
 $= E(Y^2 - 2xY + x^2)$
 $= E(Y^2) - 2xE(Y) + x^2.$

fest derivierbar auf $\mathbb{R}$ ist.

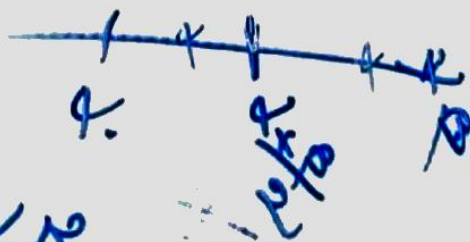
$$f'(x) = -2E(Y) + 2x = 0 \Leftrightarrow x = E(Y)$$

$$\Rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = f(E(Y)) = V(X).$$



$$\Rightarrow V(X) = \min_{x \in \mathbb{R}} f(x) \leq f\left(\frac{a+b}{2}\right) = E\left(\left(Y - \frac{a+b}{2}\right)^2\right).$$

$$\begin{aligned} & \left| Y - \frac{a+b}{2} \right| \leq \frac{b-a}{2} \\ \Rightarrow & \left(Y - \frac{a+b}{2} \right)^2 \leq \left(\frac{b-a}{2} \right)^2 \end{aligned}$$



6) So: $E(Y) = 0$ et on a: $\alpha \leq Y \leq \beta$
 D'après 4). $(\beta - \alpha) e^{\lambda Y} \leq (\beta - Y) e^{\lambda \alpha} + (Y - \alpha) e^{\lambda \beta}$
 et on a: Y est bornée $\Rightarrow e^{\lambda Y}$ est bornée
 $\Rightarrow E(e^{\lambda Y})$ est finie.

$$\Rightarrow (\beta - \alpha) E(e^{\lambda Y}) \leq (\beta - E(Y)) e^{\lambda \alpha} + (E(Y) - \alpha) e^{\lambda \beta}$$

7) D'après 4)

$$\Rightarrow \beta e^{\lambda \alpha} - \alpha e^{\lambda \beta} \leq e^{\lambda \alpha} (\beta - \alpha) + e^{\lambda \beta} (\alpha - \beta)$$

$$\Rightarrow E(e^{\lambda Y}) \leq \frac{e^{\lambda \alpha} \beta - e^{\lambda \beta} \alpha}{\beta - \alpha}$$

8) $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\alpha \leq X_i \leq \beta$
 Soit $Y_i = X_i - E(X_i)$
 $E(Y_i) = 0$
 $\alpha \leq X_i \leq \beta \Rightarrow \alpha - E(X_i) \leq Y_i \leq \beta - E(X_i)$
 $\alpha - E(X_i) \leq Y_i \leq \beta - E(X_i)$

$$\Rightarrow \frac{\alpha - E(X_i)}{\beta - E(X_i)} \leq \frac{Y_i}{\beta - E(X_i)} \leq 1$$

$\Rightarrow 0 \in [a_i - E(X_i); b - E(X_i)]$
 Mon d'après 7).

$$E(e^{\lambda(X_i - E(X_i))}) \leq e^{\frac{\lambda^2 \sigma_i^2}{2}}$$

$$9) E(e^{\lambda(T_n - E(T_n))})$$

$$= E(e^{\lambda \sum_{i=1}^n X_i(X_i - E(X_i))})$$

$$= E\left(\prod_{i=1}^n e^{\lambda X_i(X_i - E(X_i))}\right)$$

$$= \prod_{i=1}^n E(e^{\lambda X_i(X_i - E(X_i))})$$

$$\leq \prod_{i=1}^n e^{\frac{\lambda^2 \sigma_i^2}{2}} = e^{\frac{\lambda^2 \sum_{i=1}^n \sigma_i^2}{2}}$$

10) $\lambda > 0, t > 0$

$$P((T_n - E(T_n)) \geq t) = P\left(e^{\lambda(T_n - E(T_n))} \geq e^{\lambda t}\right)$$

$x \mapsto e^{\lambda x}$ est croissante et bijective.

$$\stackrel{\text{Markov}}{\leq} \frac{E(e^{\lambda(T_n - E(T_n))})}{e^{\lambda t}} \leq e^{-\lambda t + \frac{\lambda^2}{2\sigma^2}}$$

11) Pour $\lambda = t\sigma^2$

12) $X_1, X_2, \dots, X_n$ suivant la m^{ème} loi

$$\Rightarrow E(X_i) = E(X_1) \text{ et } V(X_i) = V(X_1)$$

$$\Pi_n = \frac{S_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \Rightarrow E(\Pi_n) = E(X_1)$$

$X_1, \dots, X_n$ sont mut. ind^{ép} $\Rightarrow$ e.a. e ind^{ép}

$$\Rightarrow V(\Pi_n) = \frac{V(S_n)}{n^2} = \frac{\sum_{i=1}^n V(X_i)}{n^2} = \frac{V(X_1)}{n}$$

$$\pi_n = T_n \quad \text{pour } \delta_i = \frac{1}{n}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

D'après 11). $\forall \varepsilon > 0$;

$$P(\pi_n - E(\pi_n) \geq \varepsilon) \leq e^{-\frac{n\varepsilon^2}{2\sigma^2}}$$

$$P(\pi_n - E(X_1) \geq \varepsilon)$$

$$\begin{aligned} \text{or } P(|\pi_n - E(X_1)| \geq \varepsilon) &= P((\pi_n - E(X_1) \geq \varepsilon) \cup (\pi_n - E(X_1) \leq -\varepsilon)) \\ &= P(\pi_n - E(X_1) \geq \varepsilon) + P(\pi_n - E(X_1) \leq -\varepsilon) \end{aligned}$$

$$P(-\pi_n + E(X_1) \geq \varepsilon)$$

$$P(-\pi_n - E(-\pi_n) \geq \varepsilon)$$

$$\Rightarrow P(|\pi_n - E(X_1)| \geq \varepsilon) \leq 2e^{-\frac{n\varepsilon^2}{2\sigma^2}}$$

$$(13) \quad X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$$

$$\begin{matrix} a=0 \\ b=1 \end{matrix} \Rightarrow \sigma = \frac{1}{2}$$

$$E(X_i) = p$$

D'après 12)

$$P(|\pi_n - p| \geq \varepsilon) \leq 2e^{-2n\varepsilon^2}$$

$$(14) \quad P(|\pi_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$$

$$\text{Soit } f(x) = \frac{x e^{-x}}{p(1-p)}, x > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad (\varepsilon=1)$$

$$\exists C > 0 \quad \forall x > C$$

$$f(x) = \frac{x e^{-x}}{p(1-p)} \geq 1$$

$$\Rightarrow x > \varepsilon, \quad \text{or } x < \frac{p(1-p)}{x}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{For } n \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0, \text{ let } n\varepsilon^2 > C. \\
 & \frac{e^{-n\varepsilon^2}}{2} < \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}.
 \end{aligned}$$

Problem

6) $f(u) = \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$ $u = (N \in \mathbb{N} : \delta : N \in \mathbb{D})$

9) $n \in \mathbb{N}^*$; $u \in \mathbb{J}_0 \cap \mathbb{I}$.

19) $|1 - (\cos \sqrt{\frac{eu}{n}})|^n \leq u$ $t = \sqrt{\frac{eu}{n}}$

Set $f(t) = 1 - \cos t$.

oubien

$1 - x^n = (1 - x)(1 + x + \dots + x^{n-1})$

$\Rightarrow |1 - (\cos \sqrt{\frac{eu}{n}})|^n = |1 - \cos \sqrt{\frac{eu}{n}}| \cdot |1 + \cos \sqrt{\frac{eu}{n}} + \dots + (\cos \sqrt{\frac{eu}{n}})^{n-1}|$

$\sqrt{n \cdot e \cdot \sin^2(\sqrt{\frac{eu}{n}})}$

$\sqrt{n \cdot e \cdot \frac{u}{n}}$

19) $u_n = \int_0^1 \frac{1 - (\cos \sqrt{\frac{xu}{n}})}{u \sqrt{u}} du$

Set $f_n(u) = \frac{1 - (\cos \sqrt{\frac{eu}{n}})}{u \sqrt{u}}$; $u \in \mathbb{J}_0 \cap \mathbb{I}$

$n \in \mathbb{N}$; f_n est CPT sur $\mathbb{J}_0 \cap \mathbb{I} \subset \mathbb{C}$
 $\forall u \in \mathbb{J}_0 \cap \mathbb{I} \subset \mathbb{C}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{n \ln(\cos \sqrt{\frac{eu}{n}})}}{u \sqrt{u}}$

$\ln(\cos \sqrt{\frac{eu}{n}}) \sim -1 + t$ $\sim \cos \sqrt{\frac{eu}{n}} - 1$

$\Rightarrow e^{n \ln(\cos \sqrt{\frac{eu}{n}})} \sim \frac{1}{2} (\frac{eu}{n})^{1/2}$

$x \rightarrow \text{pt contin}$ $\frac{1}{n \sqrt{u}} e^{-u}$

γ

fest C. P. m. 3, 100 (

$$|f_n(u)| \leq \begin{cases} \frac{u}{u\sqrt{u}} = \frac{1}{\sqrt{u}} & \text{si } u \in]0, 1[. \text{ (d'après } \sigma_3) \\ \frac{e}{u\sqrt{u}} & \text{si } u \geq 1. \end{cases}$$

festsp, $\oplus$ et $\wedge$ für $\mu, \nu \in C$ (Riemann)

T.C.D

$$\frac{h}{n+1/2} v_n = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-u}}{u \sqrt{u}} du = e.$$

$$L = I_p \dot{\phi}$$

$$S_1 + S_2 + \dots + S_n = S$$

Partie II

4/d/. $E(|S_n|) = \sum_{\lambda \in S_n(\tau)} |\lambda| \cdot P(S_n = \lambda)$

$$= \frac{2}{\pi} \sum_{\lambda \in S_n(\tau)} \int_0^{\infty} \left(\frac{1 - \cos(\lambda t)}{t^2} \right) P(S_n = \lambda) dt.$$

$\rightarrow$ Somme finie

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sum_{\lambda \in S_n(\tau)} P(S_n = \lambda) - \sum_{\lambda \in S_n(\tau)} \cos(\lambda t) P(S_n = \lambda) dt$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 - E(\cos(t S_n))}{t^2} dt.$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\tau} \frac{1 - (\cos t)^n}{t^2} dt \stackrel{t \rightarrow \tau/n}{=} \frac{2}{\pi} \sqrt{n}.$$

$$1d) \varphi_n = \int_0^{\infty} \frac{1 - (\cos \sqrt{\frac{2u}{n}})^n}{u \sqrt{u}} du.$$

Soit $f_n(u) = \frac{1 - (\cos \sqrt{\frac{2u}{n}})^n}{u \sqrt{u}}$, $u \geq 0$

$\forall n \in \mathbb{N}$: f_n est C $^\infty$ sur $]0, \infty[$, $\forall u \in]0, \infty[$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{n \ln(\cos \sqrt{\frac{2u}{n}})}}{u \sqrt{u}}.$$

$$\text{Or } n \ln(\cos \sqrt{\frac{2u}{n}}) \sim -1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2u}{n} \right) \sim -\frac{1}{2} \left(\frac{2u}{n} \right) \sim -\frac{u}{n}.$$

$$\Rightarrow \frac{e^{n \ln(\cos \sqrt{\frac{2u}{n}})}}{n \sqrt{u}} \sim \frac{e^{-u/n}}{n \sqrt{u}} \rightarrow 0 \text{ car } \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$