

Partie III

1) $Y_P \hookrightarrow B(x) \cdot x \in [0,1]$
 $\Rightarrow S_n = Y_1 + \dots + Y_n \hookrightarrow B(n, x)$

2) a) $B_{n,k}(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$
 $= P(S_n = k)$

$\Rightarrow 0 \leq B_{n,k}(x) \leq 1$

b) $n \in \mathbb{N}^*$; $\forall 0 \leq k \leq n$

$B_{n,n-k}(1-x) = C_n^{n-k} (1-x)^{n-k} x^k$
 $= C_n^k (1-x)^{n-k} x^k$
 $= B_{n,k}(x)$

c) Puisque $S_n \hookrightarrow B(n, x)$, alors
 $E(S_n) = nx$ et $V(S_n) = nx(1-x)$.

d) On a $E(S_n) = \sum_{k=0}^n k P(S_n = k)$
 $= \sum_{k=0}^n k C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$

$\Rightarrow \boxed{\sum_{k=0}^n k B_{n,k}(x) = nx}$

* $V(S_n) = E(S_n^2) - (E(S_n))^2$

$\Rightarrow E(S_n^2) = V(S_n) + (E(S_n))^2$
 $= nx(1-x) + (nx)^2$
 $= nx(1-x + nx)$
 $= nx(1 + x(n-1))$

Or $E(S_n^2) = \sum_{k=0}^n k^2 P(S_n = k)$

Donc $\boxed{\sum_{k=0}^n k^2 B_{n,k}(x) = nx(1 + x(n-1))}$

* $\sum_{k=0}^n k(k-1) B_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^n k^2 B_{n,k}(x) - \sum_{k=0}^n k B_{n,k}(x)$

$= nx(1-x) + (nx)^2 - nx$
 $= (nx)^2 - nx = \underline{nx(n-1)x}$

3) $n \geq 2$

$P(S_n = k) = P(S_{n-1} + Y_n = k)$
 $= P(S_{n-1} = k; Y_n = 0) \cup P(S_{n-1} = k-1; Y_n = 1)$
 $= P(S_{n-1} = k; Y_n = 0) + P(S_{n-1} = k-1; Y_n = 1)$

(les événements sont incompatibles.)

Comme $(Y_1, \dots, Y_n)$ sont mutuellement indep., alors $S_{n-1} = Y_1 + \dots + Y_{n-1}$ et Y_n sont indep.

Ainsi:

$P(S_n = k) = P(S_{n-1} = k) \cdot P(Y_n = 0) + P(S_{n-1} = k-1) \cdot P(Y_n = 1)$

$$\forall 0 \leq k \leq n.$$

$$\Rightarrow P(S_n = k) = (1-x)P(S_{n-1} = k) + xP(S_{n-1} = k-1) \quad (*)$$

Pour $k=0$, la relation (*) donne

$$P(S_n = 0) = (1-x)P(S_{n-1} = 0) + xP(S_{n-1} = -1)$$

$(S_{n-1} = -1)$ c'est un événement impossible.

$$\Rightarrow P(S_{n-1} = -1) = 0$$

$$\text{D'où } P(S_n = 0) = (1-x)P(S_{n-1} = 0)$$

$$= (1-x)B_{n-1,0}(x).$$

Pour $k=n$: $P(S_{n-1} = n) = 0$ (événement imp.)

$$\Rightarrow P(S_n = n) = xP(S_{n-1} = n-1)$$

Pour $1 \leq k \leq n-1$.

$$(*) \Rightarrow B_{n,k}(x) = (1-x)B_{n-1,k}(x) + xB_{n-1,k-1}(x) \quad \forall x \in [0,1]$$

on pose $H(x) = (1-x)B_{n-1,k}(x) + xB_{n-1,k-1}(x)$

Les deux poly $H(x)$ et $B_{n,k}(x)$ coïncident sur $[0,1]$, alors ils sont identiques

$$\Rightarrow B_{n,k}(x) = (1-x)B_{n-1,k}(x) + xB_{n-1,k-1}(x) \quad \forall 1 \leq k \leq n-1$$

La relation reste vraie pour $n-1$ et 0 si on pose

$$B_{n,-1}(x) = B_{n,n}(x) = 0$$

4) f continue sur $[0,1]$.

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(x).$$

4) $S_n(\omega) = \left\{ \frac{k}{n}; k \in \{0, \dots, n\} \right\}$
 $S_n(\omega)$ est un ensemble fini, alors $f\left(\frac{S_n}{n}\right)$ admet une espérance finie d'après le théorème de transfert.

$$E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot P\left(\frac{S_n}{n} = \frac{k}{n}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot P(S_n = k)$$

$$= \sum_{k=0}^n B_{n,k} \cdot f\left(\frac{k}{n}\right) \quad \forall x \in [0,1]$$

$$\boxed{E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = B_n(f)(x)}$$

$$E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right) = E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) - f(x)$$

$$= \underline{B_n(f)(x) - f(x)}$$

5) soit $\varepsilon > 0$.

Puisque $\frac{S_n}{n}$ admet une variance, alors d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{V\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2}.$$

$$\Leftrightarrow P\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{V(S_n)}{n \varepsilon^2} = \frac{x(1-x)}{n \varepsilon^2}.$$

Par étude de la fonction de $x \mapsto x(1-x)$

2.

sur $[0,1]$; on vérifie que.

$$\forall x \in [0,1]; \quad x(1-x) \leq \frac{1}{4}$$

Ainsi:

$$P(|\frac{S_n}{n} - x| \geq \delta) \leq \frac{1}{4n\delta^2}$$

$$\text{d)} \quad Z = \{x_k; 1 \leq k \leq n\}$$

$$E(Z) = \sum_{k=1}^n x_k P(Z=x_k)$$

$$\text{Comme } \sum_{k=1}^n P(Z=x_k) = 1 \text{ et } \varphi \text{ est convexe}$$

alors d'après l'inégalité de Jensen:

$$\varphi(E(Z)) \leq \sum_{k=1}^n P(Z=x_k) \varphi(x_k)$$

$A \leftarrow$ th de transfert

$$E(\varphi(Z))$$

f) Soit f une fonction continue sur $[0,1]$

alors f est uniformément continue sur $[0,1]$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tq } \forall x, y \in [0,1] \text{ avec}$$

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad (*)$$

Soit $x \in [0,1]$. On pose.

$$A = \{k \in \{0, \dots, n\} \text{ tq } |\frac{k}{n} - x| < \delta\}$$

$$B = \{k \in \{0, \dots, n\} \text{ tq } |\frac{k}{n} - x| \geq \delta\}$$

$$|B_n(f)(x) - f(x)| = |E(f(\frac{S_n}{n})) - f(x)|$$

or la fonction $x \rightarrow |x|$ est convexe.

Alors d'après (*).

$$|E(f(\frac{S_n}{n})) - f(x)| \leq E(|f(\frac{S_n}{n}) - f(x)|)$$

$$\text{or } E(|f(\frac{S_n}{n}) - f(x)|) = \sum_{k=0}^n |f(\frac{k}{n}) - f(x)| P(\frac{S_n}{n} = \frac{k}{n})$$

$$= \sum_{k \in A} |f(\frac{k}{n}) - f(x)| P(\frac{S_n}{n} = \frac{k}{n}) + \sum_{k \in B} |f(\frac{k}{n}) - f(x)| P(\frac{S_n}{n} = \frac{k}{n})$$

$$\text{Si } k \in A \Rightarrow |\frac{k}{n} - x| < \delta, \text{ d'après } (*)$$

$$|f(\frac{k}{n}) - f(x)| < \varepsilon$$

$$\text{Alors } \sum_{k \in A} |f(\frac{k}{n}) - f(x)| P(\frac{S_n}{n} = \frac{k}{n}) \leq \varepsilon \sum_{k \in A} P(\frac{S_n}{n} = \frac{k}{n})$$

$$\leq \varepsilon \underbrace{\sum_{k=0}^n P(\frac{S_n}{n} = \frac{k}{n})}_1 = \varepsilon$$

• Si $k \in B$:

on a: f est continue sur $[0,1]$, alors

f est bornée sur $[0,1] \Rightarrow \forall x \in [0,1]$

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$$

$$\text{Alors } \sum_{k \in B} |f(\frac{k}{n}) - f(x)| P(\frac{S_n}{n} = \frac{k}{n}) \leq \|f\|_\infty \sum_{k \in B} P(\frac{S_n}{n} = \frac{k}{n})$$

(3)

$$\leq 2\|f\|_\infty \cdot P\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left|\frac{S_k}{n} - x\right| > \delta\right)$$

$$\leq 2\|f\|_\infty \cdot P\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left|\frac{S_k}{n} - x\right| > \delta\right)$$

$$\leq \frac{2\|f\|_\infty}{n\delta^2} = \frac{\|f\|_\infty}{n\delta^2} \quad (\text{d'après 5})$$

$$\text{car } \frac{\|f\|_\infty}{n\delta^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq n_0: \frac{\|f\|_\infty}{n\delta^2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Finalement:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ tq } \forall n \geq n_0,$$

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon, \forall x \in [0,1]$$

$$\Leftrightarrow B_n(f) \xrightarrow{CU} f \text{ sur } [0,1].$$

§) Soit g une fonction continue sur $[a,b]$.

$$\forall x \in [a,b], \exists t \in [0,1] \text{ tq } x = ta + (1-t)b$$

$$x = t(a-b) + b \Leftrightarrow t = \frac{x-b}{a-b}$$

$$\text{On pose } f(t) = g(t(a-b) + b) \quad t \in [0,1]$$

Comme g est continue sur $[0,1]$, alors

d'après 7) la suite de polynômes

$$B_n(f) \xrightarrow{CU} f \text{ sur } [0,1]$$

$$\text{On pose } P_n(x) = B_n(f)\left(\frac{x-b}{a-b}\right)$$

avec $x \in [a,b]$

$$|P_n(x) - g(x)| = \left| B_n(f)\left(\frac{x-b}{a-b}\right) - f\left(\frac{x-b}{a-b}\right) \right|$$

$$\leq \sup_{t \in [0,1]} |B_n(f)(t) - f(t)|$$

$$\leq \|B_n(f) - f\|_\infty$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in [a,b]} |P_n(x) - g(x)| \leq \|B_n(f) - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow P_n \xrightarrow{CU} g \text{ sur } [a,b].$$

§) Si (P_n) est une suite de poly tq.

$$P_n \xrightarrow{CU} P \text{ sur } \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow \text{pour } \varepsilon = 1; \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq n_0$$

$$\|P_n - P\|_\infty \leq 1$$

$$\Rightarrow \forall n \geq n_0: \|P_n - P_{n_0}\|_\infty \leq \|P_n - P\|_\infty + \|P - P_{n_0}\|_\infty$$

$$\leq 2.$$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0$ le poly $P_n - P_{n_0}$ est borné sur $\mathbb{R}$. $\Rightarrow P_n - P_{n_0} = \text{poly constant}$

$$= \alpha_n.$$

$$\Rightarrow P_n = P_{n_0} + \alpha_n, \forall n \geq n_0$$

$$P_n(0) = P_{n_0}(0) + \alpha_n \Rightarrow \alpha_n = P_n(0) - P_{n_0}(0)$$

$$\rightarrow f(0) - P_{n_0}(0)$$

(4)

$$\Rightarrow d_n \rightarrow \alpha = f(0) - P_{n_0}(0)$$

$$\Rightarrow \forall n > n_0, P_n = P_{n_0} + d_n$$

$$\downarrow n \rightarrow \infty$$

$$f(x) = P_{n_0}(x) + \alpha, \forall x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow f$ est un polynôme.

Partie IV

1) soit $f \in \text{Hol}_\alpha(L)$, alors.

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2; |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|^\alpha$$

$\Leftrightarrow f$ est α -Holderienne.

Alors d'après II-4, f est continue sur

$[0, 1]$.

D'après III; la suite $B_n(f) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$ sur $[0, 1]$

2) $\forall x \in [0, 1]$; si $f \in \text{Hol}_\alpha(L)$.

$$\begin{aligned} |f(x) - B_n(f)(x)| &= |E(f(\frac{S_n}{n}) - f(x))| \quad (\text{II-4}) \\ &\leq E(|f(\frac{S_n}{n}) - f(x)|) \quad (\text{II-6}) \\ &= \sum_{k=0}^n |f(\frac{k}{n}) - f(x)| P(\frac{S_n}{n} = \frac{k}{n}) \end{aligned}$$

$$\leq \sum_{k=0}^n L |\frac{k}{n} - x|^\alpha P(\frac{S_n}{n} = \frac{k}{n})$$

$$= L \cdot E(|\frac{S_n}{n} - x|^\alpha)$$

$$\Rightarrow |f(x) - B_n(f)(x)| \leq L \cdot E(|\frac{S_n}{n} - x|^\alpha)$$

3) On a.

$$\begin{aligned} E(|\frac{S_n}{n} - x|^\alpha) &= \sum_{k=0}^n |\frac{k}{n} - x|^\alpha \cdot P(\frac{S_n}{n} = \frac{k}{n}) \\ &= \sum_{k=0}^n |\frac{k}{n} - x|^\alpha \left(P(\frac{S_n}{n} = \frac{k}{n}) \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \cdot \frac{1}{\alpha-1} \end{aligned}$$

On considère pet $q > 1$ tq $\frac{1}{p} = \frac{\alpha}{\alpha-1}$ et $\frac{1}{q} = \frac{1}{\alpha}$

D'après l'inégalité de Holder.

$$\begin{aligned} E(|\frac{S_n}{n} - x|^\alpha) &\leq \left(\sum_{k=0}^n \left[|\frac{k}{n} - x|^\alpha P(\frac{S_n}{n} = \frac{k}{n}) \right]^{\frac{q}{q-1}} \right)^{\frac{q-1}{q}} \\ &= \left(\sum_{k=0}^n \left(P(\frac{S_n}{n} = \frac{k}{n}) \right)^{1-\frac{\alpha}{\alpha-1}} \right)^{1-\frac{\alpha}{\alpha-1}} \\ &= \left(\sum_{k=0}^n P(\frac{S_n}{n} = \frac{k}{n}) \right)^{1-\frac{\alpha}{\alpha-1}} \end{aligned}$$

Comme $\sum_{k=0}^n P(\frac{S_n}{n} = \frac{k}{n}) = 1$, on déduit

$$E(|\frac{S_n}{n} - x|^q) \leq \left(\sum_{k=0}^n |x - \frac{k}{n}|^q P(\frac{S_n}{n} = \frac{k}{n}) \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \left[E(|\frac{S_n}{n} - x|^2) \right]^{\frac{1}{2}}$$

4) soit $f \in \text{Hol}_q(\mathbb{R})$
D'après 2) et 3).

$$|f(x) - B_n(f)(x)| \leq \left[E(|\frac{S_n}{n} - x|^2) \right]^{\frac{1}{2}}$$

or $E(|\frac{S_n}{n} - x|^2) = \frac{1}{n^2} E(|S_n - nx|^2)$

$$= \frac{1}{n^2} (V(S_n - nx) + \underbrace{E(S_n - nx)}_{=0})$$

car $E(S_n) = nx$

$$= \frac{1}{n^2} V(S_n - nx) = \frac{1}{n^2} V(S_n)$$

$$= \frac{n(x-1)x}{n^2} = \frac{x(x-1)}{n} \leq \frac{1}{4n}$$

Alors $E(|\frac{S_n}{n} - x|^q) \leq \left(\frac{1}{4n} \right)^{\frac{1}{q}}$

Partie IV

1) On a. h est dérivable en a , alors
 $h(x) = h(a) + (x-a)h'(a) + (x-a)E(x)$
 avec $E(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$

Comme $x_n \rightarrow a$ et $y_n \rightarrow a$, en remplaçant dans la

relation précédente, on déduit

$$h(x_n) - h(y_n) = (x_n - y_n)h'(a) + (x_n - a)E(x_n) - (y_n - a)E(y_n)$$

$$\Rightarrow \frac{h(x_n) - h(y_n)}{x_n - y_n} = h'(a) + \frac{(x_n - a)E(x_n) - (y_n - a)E(y_n)}{x_n - y_n}$$

$$\text{or } \left| \frac{(x_n - a)E(x_n) - (y_n - a)E(y_n)}{x_n - y_n} \right| \leq \frac{|x_n - a|}{|x_n - y_n|} E(x_n) + \frac{|y_n - a|}{|x_n - y_n|} E(y_n)$$

or $y_n \leq a \leq x_n \Rightarrow |x_n - a| \leq |x_n - y_n|$
 et $|y_n - a| \leq |x_n - y_n|$

$$\Rightarrow \left| \frac{(x_n - a)E(x_n) - (y_n - a)E(y_n)}{x_n - y_n} \right| \leq E(x_n) + E(y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

cf $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{h(x_n) - h(y_n)}{x_n - y_n} = h'(a)$

2) $x \mapsto f_k(x) = \frac{\sin(2\pi m^k x)}{r^k}$ est continue sur $\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$.

$$\bullet \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_k(x)| \leq \frac{1}{r^k}$$

$$\text{or } n \geq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{r} < 1 \Rightarrow \sum_{k \geq 0} \frac{1}{r^k} < \infty$$

$$\Rightarrow \sum_{k \geq 0} f_k \subset \mathbb{N} \Rightarrow \text{CU sur } \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow x \mapsto f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) \text{ est continue sur } \mathbb{R}.$$

3) a) $x \in \mathbb{R}$ fixe.

$$\text{Pour } n \in \mathbb{N}; \exists k_n = E(xm^n + \frac{1}{4\pi}) \in \mathbb{Z}$$

$$\text{et vérifie } k_n = \sup_{k \in \mathbb{Z}} \{k \leq xm^n + \frac{1}{4\pi}\}$$

b) On a:

$$k_n = E(xm^n + \frac{1}{4\pi}) \leq xm^n + \frac{1}{4\pi} < k_n + 1$$

$$4k_n \leq 4xm^n + \frac{1}{\pi} < 4k_n + 4$$

$$4k_n - 1 \leq 4xm^n + \frac{1}{\pi} - 1 < 0$$

$$\Rightarrow \frac{4k_n - 1}{4m^n} \leq xm^n$$

$$y_n = \frac{4k_n - 1}{4m^n} \leq x$$

D'autre part:

$$4xm^n < 4k_n + 4 - \frac{1}{\pi} < 4k_n + 5$$

$$\Rightarrow x < \frac{4k_n + 5}{4m^n}$$

$$\text{D'où } y_n \leq x < x_n$$

$$x_n - y_n = \frac{2}{2m^n} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0 \text{ car } m > 1$$

$$4) a) f_k(x_n) = \frac{1}{r^k} \sin(2\pi m^k \cdot \frac{4k_n + 5}{4m^n})$$

$$= \frac{1}{r^k} \sin(\frac{\pi}{2} m^{k-n} (4k_n + 5))$$

$$\text{pour } k > n \text{ et } m \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{\pi}{2} m^{k-n} (4k_n + 5) \in \pi \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow f_k(x_n) = 0$$

$$\text{De m } f_k(y_n) = 0, \forall k > n.$$

$$\text{Pour } k = n; f_n(x_n) = \frac{1}{r^n} \sin(\frac{\pi}{2} (4k_n + 5))$$

$$= \frac{1}{r^n} \sin(\frac{5\pi}{2}) = \frac{1}{r^n}$$

$$\Rightarrow f_n(x_n) = \frac{1}{r^n}$$

$$\text{de m } f_n(y_n) = -\frac{1}{r^n}$$

b) On déduit

$$\frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} = \sum_{k=0}^n \frac{f_k(x_n) - f_k(y_n)}{x_n - y_n}$$

$$= \frac{2}{r^n(x_n - y_n)} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f_k(x_n) - f_k(y_n)}{x_n - y_n}$$

c) On déduit d'après b)

$$\frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} = \frac{2}{r^n(x_n - y_n)} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|f_k(x_n) - f_k(y_n)|}{|x_n - y_n|}$$

d) T.A.F.