

Partie I

I.1 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $P_n(x) = \frac{(m+n)!}{m!}$.

Ce résultat est encore vrai si $n = 0$.

I.2

Remarquons tout d'abord que, comme α n'est pas un entier strictement négatif, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n(\alpha) \neq 0$.

Soit α fixé et $x \in \mathbb{R}$. pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} n! P_n(\alpha)}$ Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} |P_n(\alpha)| = +\infty$ et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{2n} = +\infty,$$

$$u_n = o\left(\frac{x^{2n}}{n!}\right).$$

La série de terme général $\left(\frac{x^{2n}}{n!}\right)$ est une série à termes positifs, convergente de somme e^{x^2} .

La série de terme général u_n est donc absolument convergente et $f_\alpha(x)$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$.

I.3

I.3.1 f_α est la somme d'une série entière de rayon de convergence infini et à ce titre est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et ses dérivées s'obtiennent en dérivant terme à terme.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$x f_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2^{2n} n! P_n(\alpha)}.$$

$$f'_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{2^{2n-1} (n-1)! P_n(\alpha)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k+1}}{2^{2k+1} k! P_{k+1}(\alpha)} \quad (\text{avec le changement d'indice } k = n-1).$$

$$f''_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n-1) x^{2n-2}}{2^{2n-1} (n-1)! P_n(\alpha)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} (2k+1) x^{2k}}{2^{2k+1} k! P_{k+1}(\alpha)} \quad (\text{avec le changement d'indice } k = n-1).$$

puis

$$x f''_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} (2k+1) x^{2k+1}}{2^{2k+1} k! P_{k+1}(\alpha)}.$$

On en déduit que pour tout réel x ,

$$x^2 f''_\alpha(x) + (2\alpha + 1) f'_\alpha(x) + x f_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^{2k+1} \quad \text{avec}$$

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, \quad b_k &= \frac{(-1)^k (2k+1)}{2^{2k+1} k! P_{k+1}(\alpha)} + \frac{(-1)^{k+1} (2\alpha+1)}{2^{2k+1} k! P_{k+1}(\alpha)} + \frac{(-1)^k}{2^{2k} k! P_k(\alpha)} \\ &= \frac{(-1)^k}{2^{2k+1} k! P_{k+1}(\alpha)} \left(-(2k+1) - (2\alpha+1) + 2(\alpha+k+1) \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 f''_\alpha(x) + (2\alpha + 1) f'_\alpha(x) + x f_\alpha(x) = 0}$$

I.3.2 Réciproquement, soit y , une solution à valeurs réelles de (E_α) , paire et développable en série entière sur $] -R, R[$ où $R \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$.

$$\forall x \in]-R, R[, \quad y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n} \text{ où } \forall n \in \mathbb{N}, a_n \in \mathbb{R}.$$

On a alors pour tout $x \in]-R, R[$,

$$xy(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$$

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2na_n x^{2n-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} 2(k+1)a_{k+1} x^{2k+1} \text{ (changement d'indice } k = n-1)$$

$$y''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2n(2n-1)a_n x^{2n-2} \text{ et } xy''(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} 2(k+1)(2k+1)a_{k+1} x^{2k+1}$$

(changement d'indice $k = n-1$)

Soit finalement, comme y est solution de (E_α) ,

$$\forall x \in]-R, R[\quad xy''(x) + (2\alpha+1)y'(x) + xy(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} [(2k+2)(2k+1)a_{k+1} + (2\alpha+1)(2k+2)a_{k+1} + a_k] x^{2k+1} = 0$$

Par unicité du développement en série entière de la fonction nulle,

$$\forall k \in \mathbb{N}, (2k+2)(2k+1)a_{k+1} + (2\alpha+1)(2k+2)a_{k+1} + a_k = 0$$

On a donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $4(k+1)(k+1+\alpha)a_{k+1} = -a_k$, puis comme pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k+1+\alpha \neq 0$ (car $\alpha \notin \mathbb{Z}_-^*$),

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_{k+1} = -\frac{1}{4(k+1)(k+1+\alpha)} a_k$$

puis,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \left(\prod_{k=1}^n \frac{-1}{4k(k+\alpha)} \right) a_0$$

Soit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{(-1)^n}{4^n (n!) P_n(\alpha)} a_0$$

On en déduit que $y = a_0 f_\alpha$ et que $R = +\infty$.

I.4 Remarquons que puisque $\alpha \notin \mathbb{Z}$, Les résultats des questions précédentes sont valables pour α et pour $-\alpha$.

En particulier $f_{-\alpha}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Par théorèmes d'opérations, g_α est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.

I.4.1

Pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$g_\alpha(x) = x^{-2\alpha} f_{-\alpha}(x)$$

$$g'_\alpha(x) = -2\alpha x^{-2\alpha-1} f_{-\alpha}(x) + x^{-2\alpha} f'_{-\alpha}(x).$$

$$g''_\alpha(x) = 2\alpha(\alpha+1)x^{-2\alpha-2} f_{-\alpha}(x) - 4\alpha x^{-2\alpha-1} f'_{-\alpha}(x) + x^{-2\alpha} f''_{-\alpha}(x).$$

Puis, comme $f_{-\alpha}$ est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de $E_{-\alpha}$,

$$xg''_\alpha(x) + (2\alpha+1)g'_\alpha(x) + g_\alpha(x) = x^{-2\alpha} (x f_{-\alpha}(x) + (1-2\alpha) f'_{-\alpha}(x) + f_{-\alpha}(x)) = 0$$

g_α est donc solution de (E_α) sur $\mathbb{R}_+^*$.

I.4.2 Les fonctions f_α et $f_{-\alpha}$ sont continues en 0 et $f_\alpha(0) = f_{-\alpha}(0) = 1$.

$g_\alpha(x) \sim x^{-2\alpha}$ et comme $\alpha \notin \mathbb{Z}$, $\alpha \neq 0$ et on a soit $\lim_{x \rightarrow 0} g_\alpha(x) = +\infty$ si $\alpha > 0$, soit $\lim_{x \rightarrow 0} g_\alpha(x) = 0$ si $\alpha < 0$.

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} f_\alpha(x) = 1$, on en déduit que les fonctions f_α et g_α sont deux solutions indépendantes de

(E_α) sur $]0, +\infty[$.

En effet si le système (f_α, g_α) était lié, comme la fonction f_α n'est pas la fonction nulle, il existerait $c \in \mathbb{R}$ tel que $g_\alpha = cf_\alpha$.

Remarquons également que $c \neq 0$ car $g_\alpha \neq 0$. On aurait alors :

$$\lim_{x \rightarrow 0} g_\alpha(x) = c \lim_{x \rightarrow 0} f_\alpha(x) = c \notin \{+\infty, 0\}, \text{ ce qui est absurde.}$$

Comme (E_α) est une équation différentielle linéaire du second ordre homogène et sans point singulier dans $]0, +\infty[$, l'ensemble S_α des solutions sur $]0, +\infty[$ de (E_α) est un espace vectoriel de dimension 2 dont on connaît un système libre de cardinal 2 : (f_α, g_α) .

(f_α, g_α) est donc un système fondamental de solutions de (E_α) sur $]0, +\infty[$ (ou encore une base de S_α) et les solutions de (E_α) sur $]0, +\infty[$ sont les fonctions $y :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall x > 0, \quad y(x) = Af_\alpha(x) + Bg_\alpha(x).$$

I.4.3 Soit y une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $] -\infty, 0[$ dans $\mathbb{R}$. Notons $z :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $z(x) = y(-x)$.

z est de classe $\mathcal{C}^2$ et $\forall x \in]0, +\infty[, z'(x) = -y'(-x)$ et $z''(x) = y''(-x)$.

z est donc solution de (E_α) sur $]0, +\infty[$ si et seulement si

$$\forall x > 0, \quad xy''(-x) - (2\alpha + 1)y'(-x) + xy(-x) = 0 \quad (1)$$

Comme l'application $x \mapsto -x$ établit une bijection de $]0, +\infty[$ sur $] -\infty, 0[$, (1) équivaut à

$$\forall t \in] -\infty, 0[\quad -(ty''(t) + (2\alpha + 1)y'(t) + ty(t)) = 0$$

Finalement, z est solution de (E_α) sur $]0, +\infty[$ si et seulement si y est solution de (E_α) sur $] -\infty, 0[$.

En utilisant la description de S_α établie en 1.4.3, on en déduit que les solutions de (E_α) sur $] -\infty, 0[$ sont les fonctions $y :] -\infty, 0[\rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall t < 0, \quad y(t) = Af_\alpha(-t) + Bg_\alpha(-t).$$

I.5

I.5.1 j_α est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ par théorèmes d'opérations et pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$j_\alpha(x) = x^\alpha f_\alpha(x)$$

$$j'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1} f_\alpha(x) + x^\alpha f'_\alpha(x)$$

$$j''_\alpha(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} f_\alpha(x) + 2\alpha x^{\alpha-1} f'_\alpha(x) + x^\alpha f''_\alpha(x)$$

$$x^2 j''_\alpha(x) + x j'_\alpha(x) + (x^2 - \alpha^2) j_\alpha(x)$$

$$= x^{\alpha+1} [x f''_\alpha(x) + (2\alpha + 1) f'_\alpha(x) + x f_\alpha(x)] + x^\alpha f_\alpha(x) (\alpha(\alpha-1) + \alpha - \alpha^2)$$

$$= 0 \quad \text{car } f_\alpha \text{ est solution de } (E_\alpha) \text{ sur }]0, +\infty[$$

On en déduit que j_α est solution de (B_α) sur $]0, +\infty[$.

$j_{-\alpha}$ est donc solution de $(B_{-\alpha}) = (B_\alpha)$ sur $]0, +\infty[$.

I.5.2

De plus, comme $\alpha \neq 0$ et que $\lim_{x \rightarrow 0} f_\alpha(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f_{-\alpha}(x)$,

$$\text{si } \alpha > 0, \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} j_\alpha(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} j_{-\alpha}(x) = +\infty \end{cases} \quad \text{et si } \alpha < 0, \text{ c'est l'inverse : } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} j_\alpha(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} j_{-\alpha}(x) = 0 \end{cases}$$

Comme précédemment, les fonctions j_α et $j_{-\alpha}$ sont non nulles. Si le système $(j_\alpha, j_{-\alpha})$ était lié, il existerait $b \in \mathbb{R}^*$ tel que $j_{-\alpha} = bj_\alpha$.

$$\text{On aurait alors } \left| \lim_{x \rightarrow 0} j_{-\alpha}(x) \right| = \left| b \lim_{x \rightarrow 0} j_\alpha(x) \right| = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 0 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}, \text{ ce qui est impossible.}$$

On en déduit que $(j_\alpha, j_{-\alpha})$ est un système libre de deux solutions sur $]0, +\infty[$ de l'équation (B_α) . Comme (B_α) est une équation différentielle linéaire du second ordre, homogène et sans point singulier dans $]0, +\infty[$, l'ensemble des solutions sur $]0, +\infty[$ de (B_α) est un espace vectoriel de dimension 2 dont $(j_\alpha, j_{-\alpha})$ est un système libre donc une base.

Les solutions de (B_α) sur $]0, +\infty[$ sont donc les fonctions $y :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall x > 0 \quad y(x) = Aj_\alpha(x) + Bj_{-\alpha}(x)$$

Pour déterminer les solutions de (B_α) sur $] -\infty, 0[$, on peut procéder comme en I.4.3

A une fonction y de classe C^2 de $] -\infty, 0[$ dans $\mathbb{R}$, on associe la fonction de classe C^2 sur $]0, +\infty[$: $z : x \mapsto y(-x)$.

y est solution de (B_α) sur $] -\infty, 0[$ si et seulement si

$$\forall x < 0, \quad x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \alpha^2)y(x) = 0, \text{ ce qui équivaut à :}$$

$$\forall x < 0, \quad x^2 z''(-x) - xz'(-x) + (x^2 - \alpha^2)z(-x) = 0, \text{ ce qui équivaut encore à}$$

$$\forall t > 0, \quad t^2 z''(t) + tz'(t) + (t^2 - \alpha^2)z(t) = 0$$

car $x \mapsto -x$ établit une bijection de $] -\infty, 0[$ sur $]0, +\infty[$.

On en déduit que y est solution de (B_α) sur $] -\infty, 0[$ si et seulement si z est solution de (B_α) sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $z \in \text{Vect}(j_\alpha, j_{-\alpha})$ et finalement

y est solution de (B_α) sur $] -\infty, 0[$ si et seulement si

$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall x < 0 \quad y(x) = Aj_\alpha(-x) + Bj_\alpha(-x).$$

PARTIE II

α est un réel fixé strictement supérieur à $-1/2$.

Posons pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \in [0, 1]$, $g(x, t) = (1 - t^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} \cos(xt)$ de sorte que

$$h_\alpha : x \mapsto \int_0^1 g(x, t) dt$$

II.1. On vérifie que le théorème de dérivation sous le signe intégral du cours s'applique :

• Pour $t \in [0, 1]$, $x \mapsto g(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

De même $x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = -t(1 - t^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} \sin(xt)$ et $x \mapsto \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) = -t^2(1 - t^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} \cos(xt)$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

• Soit $x \in \mathbb{R}$. $t \mapsto g(x, t)$ est continue sur $[0, 1]$ et on a, car $\alpha - 1/2 > 0$, pour tout $t \in [0, 1]$:

$$|g(x, t)| = (1 - t^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} |\cos(xt)| \leq (1 - t^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} \cdot 1.$$

$$\text{Et } (1 - t^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} = (1 + t)^{\alpha - \frac{1}{2}} (1 - t)^{\alpha - \frac{1}{2}} \underset{t \rightarrow 1^-}{\sim} 2^{\alpha - \frac{1}{2}} (1 - t)^{\alpha - \frac{1}{2}} = 2^{\alpha - \frac{1}{2}} \frac{1}{(1 - t)^{-\alpha + \frac{1}{2}}}$$

Or $\alpha > -1/2$ donc $-\alpha + \frac{1}{2} < 1$ donc $t \mapsto \frac{1}{(1 - t)^{-\alpha + \frac{1}{2}}}$ est intégrable sur $[0, 1]$ (Riemann).

D'où $\varphi : t \mapsto (1 - t^2)^{\alpha - \frac{1}{2}}$ est intégrable sur $[0, 1]$

Par comparaison la fonction $t \mapsto g(x, t)$ est intégrable sur $[0, 1[$.

- (domination) Pour $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = -t(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \sin(xt)$ est continue sur $[0, 1[$ et on a pour

$$\text{tout } t \in [0, 1[: \left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| = t(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} |\sin(xt)| \leq 1 \cdot (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \cdot 1 = \varphi(t).$$

On a vu que $t \mapsto \varphi(t)$ est intégrable sur $[0, 1[$.

Donc non seulement la fonction $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est intégrable sur $[0, 1[$, mais de plus h_α est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

- Pour $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) = -t^2(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \cos(xt)$ est continue sur $[0, 1[$ et on a la domination :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\forall t \in [0, 1[, \left| \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$$

et la fonction $t \mapsto \varphi(t)$ est bien intégrable sur $[0, 1[$.

La fonction $x \mapsto h_\alpha(x)$ est donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

II.2.1. D'après la question précédente $h_\alpha''(x) = \int_0^1 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) dt = \int_0^1 -t^2(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \cos(xt) dt$ d'où par linéarité de l'intégrale :

$$xh_\alpha''(x) + xh_\alpha'(x) = \int_0^1 (1-t^2)(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} x \cos(xt) dt = \int_0^1 (1-t^2)^{\alpha+\frac{1}{2}} x \cos(xt) dt$$

II.2.2. On se place sur $[0, b] \subset [0, 1[$ et on réalise une intégration par parties :

$$u(t) = (1-t^2)^{\alpha+\frac{1}{2}}, u'(t) = -2t(\alpha+\frac{1}{2})(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \text{ et } v'(t) = x \cos(xt), v(t) = 0 + \sin(xt) :$$

$$\int_0^b (1-t^2)^{\alpha+\frac{1}{2}} x \cos(xt) dt = (1-b^2)^{\alpha+\frac{1}{2}} \sin(xb) - 0 + (2\alpha+1) \int_0^b (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} t \sin(xt) dt$$

Puis en faisant tendre $b \rightarrow 1^-$, on obtient :

$$xh_\alpha''(x) + xh_\alpha'(x) = (2\alpha+1) \int_0^1 (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} t \sin(xt) dt$$

$$= -(2\alpha+1) \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) dt = -(2\alpha+1)h_\alpha'(x).$$

Donc h_α est solution de (E_α) sur $\mathbb{R}$.

II.3. On sait que pour tout réel u , $\cos(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} u^{2n}$. Avec $u = xt \in \mathbb{R}$, on obtient :

$$h_\alpha(x) = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} t^{2n} dt.$$

Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé et $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(t) = \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} t^{2n}$.

- Les fonctions u_n sont continues sur $[0, 1[$ et sont dominées par la fonction φ du 1i) donc intégrables sur $[0, 1[$.

- La série de fonction $\sum u_n$ converge simplement sur $[0, 1[$ (vers $t \mapsto g(x, t)$ qui est continue sur $[0, 1[$).

Remarque : en revanche il n'y a pas a priori convergence normale sur $[0, 1[$.

- Étude de la série des intégrales des modules.

$$\int_0^1 |u_n(t)| dt \leq \frac{x^{2n}}{(2n)!} \int_0^1 (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} dt.$$

$I_0(\alpha) = \int_0^1 (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} dt$ est une constante par rapport à n , et la série numérique $\sum \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ converge

(sa somme vaut $\cosh(x)$) donc $\sum \int_0^1 |u_n(t)| dt$ converge.

D'après le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions, on a en posant $I_n(\alpha) = \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^{2n} dt$:

$$h_\alpha(x) = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n I_n(\alpha)}{(2n)!} x^{2n}$$

II.4. h_α est une solution de (E_α) , paire et développable en série entière à l'origine donc d'après 1.3, on a $\boxed{h_\alpha = h_\alpha(0) f_\alpha}$.

II.5. On a donc le développement pour tout $x \in \mathbb{R}$: $h_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} h_\alpha(0) \frac{(-1)^n}{2^{2n} n! P_n(\alpha)} x^{2n}$.

Par unicité du développement en série entière, on a en remarquant $h_\alpha(0) = I_0(\alpha)$:

$$I_0(\alpha) \frac{(-1)^n}{2^{2n} n! P_n(\alpha)} = \frac{(-1)^n I_n(\alpha)}{(2n)!}, \text{ donc } \boxed{I_n(\alpha) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n! P_n(\alpha)} I_0(\alpha)}$$

PARTIE III

III.1. Laplacien en polaire $\tilde{F}(r, \theta) = F(r \cos \theta, r \sin \theta)$.

En dérivant par rapport à r^1 , on a en allégeant les écritures :

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial r} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \cos \theta \frac{\partial F}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial F}{\partial y}.$$

En dérivant une deuxième fois par rapport à r :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial r^2} &= \cos \theta \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \frac{\partial y}{\partial r} \right) + \sin \theta \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial r} \right) \\ &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} + \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

F étant de classe C^2 , on obtient (par le théorème de Schwarz) :

$$\frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial r^2} = \cos^2 \theta \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}.$$

De même en dérivant par rapport à θ : $\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \theta} = -r \sin \theta \frac{\partial F}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial F}{\partial y}$.

$$\text{Puis : } \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \theta^2} = -r \cos \theta \frac{\partial F}{\partial x} - r \sin \theta \frac{\partial F}{\partial y} + r^2 \sin^2 \theta \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2r^2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} + r^2 \cos^2 \theta \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}.$$

Le calcul donne alors :

$$\frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot 1 + 0 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cdot 1 = \Delta F(r \cos \theta, r \sin \theta).$$

III.2.1. Il existe r_0 tel que $f(r_0) \neq 0$ (car sinon F serait identiquement nulle). On a donc pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $g(\theta) = \tilde{F}(r_0, \theta)/f(r_0)$ et donc g est 2π -périodique.

III.2.2. On a ici $\frac{\partial \tilde{F}}{\partial r} = f'(r)g(\theta)$, $\frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial r^2} = f''(r)g(\theta)$, $\frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \theta^2} = f(r)g''(\theta)$ donc

$$0 = \Delta F + \omega^2 F = \frac{1}{r^2} (f(r)g''(\theta) + rf'(r)g(\theta) + r^2 f''(r)g(\theta) + r^2 \omega^2 f(r)g(\theta)) \quad (L)$$

En utilisant ceci avec $f(r_0) \neq 0$, on obtient un réel $\lambda = \frac{r_0 f'(r_0) + r_0^2 f''(r_0) + r_0^2 \omega^2 f(r_0)}{f(r_0)}$ (indépendant de θ et de r) tel que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$(ii) \quad g''(\theta) + \lambda g(\theta) = 0$$

En injectant ceci dans l'équation (L), on obtient :

$(-\lambda f(r) + rf'(r) + r^2 f''(r) + r^2 \omega^2 f(r))g(\theta) = 0$ et en utilisant un θ_0 tel que $g(\theta_0) \neq 0$:

$$(i) \quad \forall r > 0, \quad r^2 f''(r) + rf'(r) + (r^2 \omega^2 - \lambda)f(r) = 0$$

III.2.3. D'après III.2.1. g est 2π -périodique et n'est pas la fonction nulle.

Si on avait $\lambda < 0$, les solutions (non nulles) de $y'' + \lambda y = 0$ ne seraient pas périodiques ($\theta \mapsto A \exp(\sqrt{-\lambda}\theta) + B \exp(-\sqrt{-\lambda}\theta)$).

Pour $\lambda = 0$. $\lambda = 0^2$.

Pour $\lambda > 0$, les solutions sont les fonctions de la forme $\theta \mapsto \alpha \cos \sqrt{\lambda}\theta + \beta \sin \sqrt{\lambda}\theta$. On peut les mettre sous la forme $A \cos(\sqrt{\lambda}\theta + \phi)$. Avec A non nul, les fonctions de ce type sont périodiques ET de période $T = 2\pi/\sqrt{\lambda}$. Il existe donc un entier naturel non nul p tel que $pT = 2\pi$ ce qui donne $\sqrt{\lambda} = p$ puis $\lambda = p^2$.

λ est nécessairement de la forme p^2 avec $p \in \mathbb{N}$.

¹Les hypothèses du texte sont suffisantes pour pouvoir le faire...

III.2.4. Pour $p \neq 0$, la forme générale est $\theta \mapsto A \cos(p\theta) + B \sin(p\theta) \dots$

Pour $p = 0$, $g'' = 0$ donc g est affine. Or g est périodique, donc g est constante (et toutes les constantes conviennent).

Pour $p = 0$, les solutions pour g sont les fonctions constantes.

III.3.1. $\omega = 0$ et $\lambda = 0$, (i) devient $r^2 f''(r) + r f'(r) = 0$. La résolution (sur $]0, +\infty[$) donne $f'(r) = C e^{-\ln(r)} = \frac{C}{r}$ puis

$f : r \mapsto C \ln(r) + D$ où C et D sont des constantes.

III.3.2. $\omega = 0$ et $\lambda = p^2 \neq 0$, (i) devient $r^2 f''(r) + r f'(r) - p^2 f(r) = 0$.

On regarde les fonctions puissances $y : r \mapsto r^\alpha : r^2 y''(r) + r y'(r) - p^2 y(r) = r^\alpha (\alpha(\alpha-1) + \alpha - p^2)$.

$y : r \mapsto r^\alpha$ est solution de cette équation différentielle si, et seulement si, $\alpha^2 - p^2 = 0$.

Nous avons deux solutions $r \mapsto r^p$ et $r \mapsto r^{-p}$ de cette équation différentielle linéaire d'ordre deux (sans points singuliers sur $]0, +\infty[$), elles ne sont pas colinéaires donc les solutions sont les fonctions :

$f : r \mapsto C r^p + D r^{-p}$ où C et D sont des constantes.

III.4. On calcule sans peine $f_1'(r) = \frac{1}{\omega} f' \left(\frac{r}{\omega} \right)$, $f_1''(r) = \frac{1}{\omega^2} f'' \left(\frac{r}{\omega} \right)$ puis

$r^2 f_1''(r) + r f_1'(r) + (r^2 - p^2) f_1(r) = \frac{r^2}{\omega^2} f'' \left(\frac{r}{\omega} \right) + \frac{r}{\omega} f' \left(\frac{r}{\omega} \right) + (r^2 - p^2) f \left(\frac{r}{\omega} \right) = 0$ d'après l'équation

(i) évaluée en $r/\omega \in]0, +\infty[$.

f_1 est solution de l'équation (B_p) . (étudiée à la partie I...)