

Correction "Révision Topologie"

Exercice 4

$$1) d(x, A) = 0 \Leftrightarrow \forall y \in A: \|x - y\| \geq 0 \\ \text{et } \exists (y_n) \subset A \text{ tq } \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - y_n\| = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x$$

$$\Leftrightarrow x \in \bar{A}$$

$$2) \text{ on a. } A_n \subset A_{n+1} \Rightarrow d(x, A_n) \geq d(x, A_{n+1}) \\ \Rightarrow (d(x, A_n))_{n \in \mathbb{N}} \text{ est suite décroissante et elle} \\ \text{est à termes positifs, alors elle CV et} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, A_n) \geq d(x, A)$$

$$\text{D'autre part. } \forall y \in A, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } y \in A_{n_0} \\ \Rightarrow d(x, A_{n_0}) \leq d(x, y) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, A_n) \leq d(x, A_{n_0}) \leq d(x, y), \forall y \in A \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, A_n) \leq d(x, A) \\ \text{Ainsi } d(x, A) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, A_n)$$

$$3) \text{ Soit } (y_n) \text{ suite d'éléments de } B \cap V.$$

$$\Rightarrow (y_n) \in B \Leftrightarrow \|y_n - x\| \leq \|x\| \\ \Rightarrow \|y_n\| \leq 2\|x\|.$$

$$\Rightarrow (y_n) \text{ suite bornée}$$

D'autre part $(y_n) \in V = \text{e.v. de dim finie}$
 $\Rightarrow$ d'après le th de B.W il existe $(y_{\varphi(n)})$
série de (y_n) CV vers $y \in E$.

$$\text{De plus. } \|y_{\varphi(n)} - x\| \leq \|x\|$$

$$n \mapsto \varphi(n) \Rightarrow \|y - x\| \leq \|x\| \Rightarrow y \in B \\ \Rightarrow y \in B \cap V.$$

ce qui montre que $B \cap V$ compact

$$b) \text{ on a } B \cap V \subset V.$$

$$\Rightarrow d(x, B \cap V) \geq d(x, V)$$

D'autre part, si $y \in B$

$$\text{Soit } y \in V \Rightarrow d(x, V) \leq d(x, y) = \|x - y\|$$

$$\text{si } y \notin B \Rightarrow \|x - y\| > \|x\| = d(x, 0) \\ \geq d(x, B \cap V) \quad (\text{car } 0 \in B \cap V)$$

$$\Rightarrow \forall y \in V \quad d(x, V) \leq \|x - y\|$$

$$\Rightarrow d(x, V) \leq d(x, B \cap V)$$

$$\text{Ainsi } d(x, V) = d(x, B \cap V)$$

$$y) \text{ on a. } d(x, V) = d(x, B \cap V)$$

comme $B \cap V = \text{Compact de } E$ non vide ($0 \in B \cap V$)
et l'app $y \mapsto \|x - y\|$ est continue
et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Ainsi, fust bornée et atteint ses bornes par B.W

$$\text{① En particulier } \exists y_0 \in B \cap V \Rightarrow y_0 \in V$$

$$\inf \{ \|y - x\|, y \in B \cap V \} = \|y_0 - x\|$$

$$\Rightarrow d(x, V) = \|x - y_0\|.$$

Exercice 4

$$f \in \mathcal{C}(E)$$

1) Soit K un convexe de E ; montrons que $f(K)$ convexe de E .

$$\text{soit } x \in f(K) \Rightarrow \exists x' \in K \text{ tq } x = f(x')$$

$$y \in f(K) \Rightarrow \exists y' \in K \text{ tq } y = f(y')$$

soit $\lambda \in [0, 1]$.

$$\lambda x + (1 - \lambda)y = f(\lambda x' + (1 - \lambda)y')$$

Puisque K convexe, alors $\lambda x' + (1 - \lambda)y' \in K$.

$$\Rightarrow \lambda x + (1 - \lambda)y \in f(K)$$

$$\Rightarrow f(K) \text{ convexe.}$$

2) Soit $x \in E, r > 0$.

$B_f(x, r)$ = boule fermée de centre x et de rayon r est un fermé et borné dans E qui est de dimension finie, alors c'est un compact.

De plus f est bien définie sur E qui est de dimension finie. Alors f est continue.

D'où $f(B_f(x, r))$ est un compact.

$$3) a) y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f^k(a) =$$

$$y_n - x = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f^k(a) - x$$

$$= \frac{1}{n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} f^k(a) - \sum_{k=0}^{n-1} x \right)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (f^k(a) - x)$$

$$\Rightarrow \|y_n - x\| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \|f^k(a) - x\|$$

$$\text{or } a \in K \text{ et } f(K) \subset K \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} \quad f^k(a) \in K. \Rightarrow \|f^k(a) - x\| \leq r$$

$$\Rightarrow \|y_n - x\| \leq r. \Rightarrow (y_n) \in K.$$

D'autre part:

$$f(y_n) - y_n = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n f^k(a) - \sum_{k=0}^{n-1} f^k(a) \right)$$

$$= \frac{1}{n} (f^n(a) - a)$$

$$\Rightarrow \|f(y_n) - y_n\| \leq \frac{1}{n} (\|f^n(a) - x\| + \|x - a\|)$$

$$\leq \frac{2r}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

b) (y_n) suite d'éléments de $K = \text{compact}$
 $\Rightarrow \exists (y_{\varphi(n)})$ s. suite de (y_n) tq

(2)

$$y_{\varphi(n)} \rightarrow y \in K.$$

Comme f est continue, alors

$$f(y_{\varphi(n)}) \rightarrow f(y)$$

$$\text{De plus } \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_{\varphi(n)}) - y_{\varphi(n)} = 0$$

$$\Rightarrow f(y) - y = 0 \Leftrightarrow f(y) = y$$

$$\text{S.) supposons que } y = 0 \Rightarrow y = 0 \in B_f(x, r)$$

$$\Rightarrow \|x\| \leq r \text{ abs } \Rightarrow y \neq 0$$

$$f(y) = y \Rightarrow \forall p \in f$$

Exercice 3

$\bigcup (A^p)_{p \in \mathbb{N}}$ suite bornée $\Rightarrow \exists M \geq 0$ tq

$$\|A^p\| \leq M, \forall p \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \|B_p\| \leq M, \forall p \in \mathbb{N}$$

(B_p) suite bornée dans $(\Pi_n(\mathbb{R}))$ qui est de dimension finie, alors $\exists (B_{\varphi(p)})$

$$\text{S. suite de } (B_p) \text{ tq } B_{\varphi(p)} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} B$$

$$2) \|B_p(I_n - A)\| = \|B_p - B_p A\|$$

$$= \left\| \frac{1}{p} (I_n - A^p) \right\| \leq \frac{\|I\| + M}{p} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow B_{\varphi(p)}(I_n - A) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{Comme } \Pi \mapsto \Pi(I_n - A)$$

est continue (linéaire + d. finie)

$p \rightarrow \infty$, on obtient :

$$B \cdot (I_n - A) = 0 \Leftrightarrow B = BA$$

$$3) a) \text{ soit } x \in \ker(I_n - A) \cap \text{Im}(A - I_n)$$

$$\Rightarrow Ax = x \text{ et } \exists x' \text{ tq } x = (A - I_n)x'$$

$$\Rightarrow Ax = x, \forall x \Rightarrow Ax = x, \forall x$$

$$\Rightarrow Bx = x$$

$$Bx = B(Ax) - Bx' = Bx' - Bx'$$

$$= Bx' - Bx'$$

$$= 0$$

$$\text{Continuité } B_{\varphi(n)}x = x \Rightarrow Bx = x$$

$$\Rightarrow x = 0$$

b) si $x \in \ker(A - I_n) \cap \text{Im}(A - I_n) \Rightarrow x = 0$ Exercice 2

$$\Rightarrow \ker(A - I_n) \cap \text{Im}(A - I_n) = \{0\}$$

D'après le th du rang

$$K^n = \ker(A - I_n) \oplus \text{Im}(A - I_n)$$

4) Soit $x \in \ker(A - I_n) \Rightarrow Bx = x$

c) d'après 3/ $\Rightarrow x \in \ker(A - I_n)$

D'après ce qui précède aussi $\text{Im}(A - I_n) \subset \ker B$.

ii) Soit $x \in K^n \Rightarrow \exists x_1 \in \ker(A - I_n)$
 $\exists x_2 \in \text{Im}(A - I_n)$

$$\text{tg } x = x_1 + x_2$$

$$Bx = Bx_1 + Bx_2 = x_1$$

$\Rightarrow B$: proj. sur $\ker(A - I_n) // \text{Im}(A - I_n)$

5) (B_p) est une suite bornée dans un e.v.n de dimension finie $\Rightarrow (B_p) \in B_p(0, M)$

De plus (B_p) admet une seule valeur d'adhérence qui est B.

Alors (B_p) cv vers B.

$K = \text{Compact}$ et $f: K \rightarrow K$ tq
 $\forall x \neq y \quad \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$

1) a) si f admet un point fixe, montrons qu'il est unique.

Supp $\exists x, y \in K$ tq $f(x) = x$
 et $f(y) = y$

$$\Rightarrow \|x - y\| < \|x - y\| \text{ imp}$$

b) $\varphi: K \rightarrow \mathbb{R}$ tq $\varphi(x) = \|f(x) - x\|$

φ continue. sur K a valeurs dans $\mathbb{R}$

K compact.

$$\Rightarrow \exists a \in K \text{ tq } \min_{x \in K} \varphi(x) = \varphi(a)$$

Supp $f(a) \neq a$:

$$\text{ma. } \|f(f(a)) - f(a)\| < \|f(a) - a\|$$

$$\varphi(a) = \min_{x \in K} \varphi(x)$$

ce qui est absurde.

$\Rightarrow f(a) = a \Rightarrow a$ est l'unique point fixe de f .

2) $\left. \begin{array}{l} x_{n+1} = f(x_n) \\ x_0 \in K \end{array} \right\} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}; x_n \in K$

si il existe $x_{n_0} \in \mathbb{N}$ tq $x_{n_0} = a \Rightarrow \forall n \geq n_0$
 $x_n = a$

$$\Rightarrow x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$$

si $\forall n \in \mathbb{N}; x_n \neq a \Rightarrow \|f(x_n) - f(a)\| < \|x_n - a\|$
 $\Rightarrow (x_n - a)$ est $\downarrow$ min $\Rightarrow \text{cv}$.

D'autre part (x_n) suite d'éléments de K .

$\Rightarrow \exists (x_{\varphi(n)})$ s. suite de (x_n) tq $x_{\varphi(n)} \rightarrow x \in K$

f continue $\Rightarrow f(x_{\varphi(n)}) \rightarrow f(x)$

$$\|x_{\varphi(n)} - a\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 = \|x - a\|$$

$$\|f(x_{\varphi(n)}) - a\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|f(x) - a\|$$

Si $x \neq a$ $\|x_{\varphi(n)} - a\| \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \|x - a\| = \|f(x) - a\| = \|f(x) - f(a)\|$$

$$\Rightarrow x = a. \quad \text{absurde}$$

Problème

Partie I

$$\int_0^1 t(1-t)^n dt = -\frac{1}{2(n+1)} \int_0^1 -2nt(1-t)^n dt$$

$$= -\frac{1}{2(n+1)} \left[(1-t)^{n+1} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2(n+1)}$$

On a $a_n = \int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt = 2 \int_0^1 (1-t^2)^n dt$

$$\geq 2 \int_0^1 t(1-t^2) dt \geq \frac{2}{2(n+1)} = \frac{1}{n+1}$$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, a_n \geq \frac{1}{n+1}$

b) $t \in [0, 1]$ et $t \in [n, 1] \Rightarrow t^2 \geq n^2$

$$\Rightarrow 1-t^2 \leq 1-n^2 \Rightarrow \frac{(1-t^2)^n}{a_n} \leq \frac{(1-n^2)^n}{a_n}$$

$\Rightarrow P_n(t) \leq (1+n)(1-n^2)^n$

De plus $\forall t \in [0, 1], 0 \leq P_n(t)$

Alors $\forall t \in [0, 1], 0 \leq P_n(t) \leq (1+n)(1-n^2)^n$

3) a) f continue sur $\mathbb{R}$. $f(x) = 0, \forall x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

On a f est continue sur $\mathbb{R}$, alors continue sur

$[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, d'après le th de Heine, f est unif. continue

sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \Rightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0$ q $\forall x, y \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ avec $|x-y| < \alpha \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$

- si $x, y \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ avec $|x-y| < \alpha$

$\Rightarrow |f(x)-f(y)| = 0 < \varepsilon$

- si $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, et $y \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ avec $|x-y| < \alpha$

on a $|x-\frac{1}{2}| < |x-y| < \alpha$ (ou $|x+\frac{1}{2}| < |x-y| < \alpha$)

$\Rightarrow \dots$

$$\Rightarrow |f(x)-f(y)| = |f(x)-f(\frac{1}{2})| < \varepsilon$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0$ q $\forall x, y \in \mathbb{R}$ avec $|x-y| < \alpha \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$

$\Rightarrow f$ est unif. sur $\mathbb{R}$.

D'autre part f continue sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, alors elle est bornée sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et elle est nulle sur $\mathbb{R} \setminus [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Donc f est bornée sur $\mathbb{R}$.

b) $f_n(x) = \int_{-1}^1 f(x-t) P_n(t) dt$

c) $\forall x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

$f_n(x) = \int_{x-1}^x f(u) P_n(x-u) du$ ($u = x-t$)

soit $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \Rightarrow x-1 \leq -\frac{1}{2}$
et $x+1 \geq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow f_n(x) = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(u) P_n(x-u) du$

(6)

i.e) on a. P_n est une fonction polynomiale $\Rightarrow$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{np} b_k x^k.$$

$$\Rightarrow f_n(x) = \sum_{k=0}^{np} b_k \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t) (x-t)^k dt.$$

$$= \sum_{k=0}^{np} b_k \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t) \sum_{i=0}^k C_k^i x^i (-t)^{k-i} dt$$

$$\Rightarrow f_n(x) = \sum_{k=0}^{np} \sum_{i=0}^k (b_k C_k^i \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} C_k^i f(t) (-t)^{k-i} dt) x^i$$

Ce qui montre que f_n est une fonction polynomiale sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Si on a. f est unif continue sur $\mathbb{R}$, alors.

Pour $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel $\forall x, y \in \mathbb{R}$ avec

$$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

[- si $\delta \leq 1$, on prend $\eta = \delta$.

[- si $\delta > 1$, on choisit $\eta < \delta$ et $\eta \in]0, 1[$.

puis pour $y = x-t \Rightarrow |x-y| = |t| < \eta$
et $t \in]-\eta, \eta[$

$$\Rightarrow |f(x-t) - f(x)| \leq \varepsilon \cdot \int_{-\eta}^{\eta} 1 dx = 2\varepsilon \eta$$

ii) on a. $\int_{-1}^1 P_n(x) dx = \frac{\int_{-1}^1 (1-x^2) dx}{a_n} = 1$

$\forall x \in \mathbb{R}$:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \int_{-1}^1 (f(x-t) - f(x)) P_n(t) dt \right|$$

$$= \left| \int_{-1}^1 (f(x-t) - f(t)) P_n(t) dt + \int_{-1}^1 (f(t) - f(x)) P_n(t) dt \right|$$

$$+ \int_{-1}^1 (f(x-t) - f(t)) P_n(t) dt$$

$\forall t \in [-1, 1]$, d'après i)

$$|f(x-t) - f(t)| \leq \varepsilon \cdot |P_n(t)| \text{ et } \int_{-1}^1 P_n(t) dt = 0$$

$\forall t \in]-1, -\eta[\cup]\eta, 1[$.

$$|f(x-t) - f(t)| \leq |f(x-t)| + |f(t)| \leq 2\eta$$

$$\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon + 2\eta \int_{-1}^1 P_n(t) dt + \int_{-1}^1 P_n(t) dt$$

ii) on a P_n est paire $\Rightarrow$

$$\int_{-1}^1 P_n(t) dt + \int_{-1}^1 P_n(t) dt = 2 \int_{-1}^1 P_n(t) dt$$

d'après 1-b $\sup_{t \in [-1, 1]} |P_n(t)| \leq (1+n)(1-\eta^n)$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow \infty} (1+n)(1-\eta^n) = 0$$

$$\Rightarrow \sup_{t \in [-1, 1]} |P_n(t)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow P_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

De plus $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n est continue sur $[-1, 1]$.

$$\text{Alors } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 P_n(t) dt = \int_{-1}^1 \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(t) dt = 0$$

$\Rightarrow$ Pour $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel $\forall n \geq n_0$

$$2\eta \int_{-1}^1 P_n(t) dt \leq \varepsilon$$

(7)

c) Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque f est unif. continue sur $\mathbb{R} \Rightarrow \exists \alpha > 0$ tq

si $t \in]-\alpha, \alpha[\Rightarrow |x-t-x| < \alpha \Rightarrow$

$$|f(x-t)-f(x)| \leq \varepsilon.$$

$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ tq $\alpha n < 1$ (ou $n < \alpha$ sinon)

$\Rightarrow$ si $|t| < n \Rightarrow |f(x-t)-f(x)| \leq \varepsilon.$

(i) on a $\int_{-1}^1 P_n(x) dx = 1$

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \int_{-1}^1 f(x-t) P_n(t) dt - f(x) \int_{-1}^1 P_n(t) dt \right|$$

$$\leq \int_{-1}^1 |f(x-t) - f(x)| P_n(t) dt$$

$$\leq \int_{-n}^{-1} + \int_{-n}^n + \int_n^1$$

sur $[-n, n]$: $|f(x-t) - f(x)| \leq \varepsilon.$

et f est bornée $\Rightarrow$ sur $[-1, n] \cup [n, 1] \Rightarrow$

$$|f(x-t) - f(x)| \leq 2M$$

$$\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \int_{-n}^n P_n(t) dt + 2M \left(\int_{-1}^{-n} + \int_n^1 \right)$$

$$\leq \varepsilon \int_{-1}^1 P_n(t) dt + 2M \left(\int_{-1}^{-n} + \int_n^1 \right)$$

$$\leq \varepsilon + 2M \left(\int_{-1}^{-n} P_n(t) + \int_n^1 P_n(t) dt \right)$$

(ii) P_n est paire alors

$$\int_{-n}^{-1} P_n(t) dt + \int_n^1 P_n(t) dt = 2 \int_n^1 P_n(t) dt$$

$$\leq 2(1+n)(1-n^n)(1-n)$$

$$1-n^n < 0 \Rightarrow (1+n)(1-n^n)(1-n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq n_0, (1+n)(1-n^n)(1-n) \leq \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq n_0$$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f_n \xrightarrow{CU} f \text{ sur } \mathbb{R}$$

b) Soit f continue sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Si $f(\frac{1}{2}) = f(-\frac{1}{2}) = 0$, alors la fonction

la fonction $\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{si } x \notin [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \end{cases}$$

$\tilde{f}$ continue sur $\mathbb{R}$ et nulle en dehors de $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

En fait, alors

$$P_n \xrightarrow{CU} \tilde{f} \text{ sur } \mathbb{R} \Rightarrow P_n \xrightarrow{CU} f \text{ sur } [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$$

* si $f(\frac{1}{2}) \neq 0$ ou $f(-\frac{1}{2}) \neq 0$

on pose $g(x) = f(x)f(\frac{1}{2}) + -(f(\frac{1}{2}) - f(-\frac{1}{2}))(x + \frac{1}{2})$

$\Rightarrow g$ continue sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et vérifie $g(\frac{1}{2}) = g(-\frac{1}{2}) = 0$

$\Rightarrow$ d'après ce qui précède $\exists P_n \xrightarrow{CU} g$.

$$\Rightarrow \sup_{x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} |f(x) - Q_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

avec $Q_n =$

* Soit f continue sur $[a, b] \Rightarrow \exists \lambda \in [0, 1]$

tq $\forall x \in [a, b]: \exists \lambda \in [0, 1]$ tq $x = \lambda a + (1-\lambda)b$

$$\Rightarrow x = \left(\frac{1}{2} - t \right) a + \left(\frac{1}{2} + t \right) b$$

$$x = \left(t + \frac{1}{2} \right) a + \left(\frac{1}{2} - t \right) b$$

on pose $h(t) = f\left(t + \frac{1}{2}a + \left(\frac{1}{2} - t\right)b\right)$

h continue sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

Partie II

$$1) \text{ soit } f \in L^1: \int_0^1 (f(x))^2 dx \leq \int_0^1 \|f\|_\infty^2 dx$$

$$\|f\|_2^2 =$$

$$\Rightarrow \|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$$

$$2) \text{ soit } f \in \bar{A} \Rightarrow \exists (f_n) \subset E^1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_2 = 0$$

$$\text{D'après 1), } \|f_n - f\|_2 \leq \|f_n - f\|_\infty$$

$$\Rightarrow \|f_n - f\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\Leftrightarrow f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \text{ pour } \|\cdot\|_2$$

$$\Rightarrow f \in \bar{A} \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{A}^2$$

$$3) E_0 = \{f \in E^1 \mid f(0) = 0\}$$

$$a) \text{ soit } L: (E, \|\cdot\|_2) \xrightarrow{f \mapsto f(0)} (\mathbb{R}, |\cdot|)$$

$$\cdot L \text{ est une app. linéaire}$$

$$\cdot \forall f \in E: |f(0)| \leq \|f\|_\infty \Rightarrow f \text{ est}$$

continue

3)

$E_0 = L^1(\mathbb{R})$
 $\{f \mid 0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$. $\Rightarrow E_0$ est un fermé de $(E, \|\cdot\|_2)$
 $\cdot L$ est continue

c) Supposons que E_0 est dense dans $(E, \|\cdot\|_2)$
 Alors $\overline{E_0}^{\|\cdot\|_2} = E$
 $\Rightarrow E_0 = E$ absurde car $f=1 \notin E_0$

$\Rightarrow$

f) Supposons que E_0 est dense dans $(E, \|\cdot\|_2)$
 Alors $\overline{E_0} = E$. Or E_0 est fermé dans $(E, \|\cdot\|_2)$
 $\Rightarrow E_0 = E$ ce qui est absurde car la fonction $f: x \mapsto 1 \in E$ et $f \notin E_0$.

4) $\forall \epsilon > 0 \exists \eta > 0 \forall n \geq \eta \forall x \in \mathbb{R} \quad \|\varphi_n - \varphi_0\|_2 < \epsilon$
 $\forall \epsilon > 0 \exists \eta > 0 \forall n \geq \eta \quad \|\varphi_n - \varphi_0\|_2 < \epsilon$

$$\text{On a } \|\varphi_n - \varphi_0\|_2^2 = \int_0^1 (1-x)^{2n} dx = \frac{1}{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow \|\varphi_n - \varphi_0\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

b) Soit $f \in E$;

$$\begin{aligned} \|f - f \cdot \varphi_n\|_2^2 &= \int_0^1 |f(x) - f(x) \varphi_n(x)|^2 dx \\ &\leq \left(\sup_{x \in [0,1]} |f(x)| \right)^2 \int_0^1 |1 - \varphi_n(x)|^2 dx \quad (1) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|f - f \cdot \varphi_n\|_2 \leq \|f\|_\infty \cdot \|\varphi_0 - \varphi_n\|_2$$

c) Soit $f \in E$, $\exists \varphi_n - f \cdot \varphi_n \in E_0$ d'où $\|f - \varphi_n\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, d'où $f \in \overline{E_0}^{\|\cdot\|_2}$

$$\Rightarrow E \subset \overline{E_0}^{\|\cdot\|_2} \Rightarrow E = \overline{E_0}^{\|\cdot\|_2}$$

d) Or $\overline{E_0}^{\|\cdot\|_2} \neq E$ et $\overline{E_0}^{\|\cdot\|_2} = E$

Alors $\|\cdot\|_2 \neq \|\cdot\|_1$

e) Soit G un s.v. de $E \Rightarrow \overline{G} \subset E$

$$0_E \in G \subset \overline{G} \Rightarrow 0_E \in \overline{G}$$

Soit $x \in \overline{G} \Rightarrow \exists (x_n) \subset G$ t.q. $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$
 $y \in \overline{G} \Rightarrow \exists (y_n) \subset G$ t.q. $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$

Soit $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda x_n + y_n \in G$ (s.v.)

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda x_n + y_n = \lambda x + y \in \overline{G}$$

$\Rightarrow \overline{G}$ s.v. de E

f) a) Soit G un s.v. de E

" $\Leftarrow$ " Supposons que $\forall k \in \mathbb{N}, \exists k' \text{ t.q. } x \mapsto x^{k'} \in \overline{G}$
 Comme $\overline{G}$ est un s.v. de E , alors $\forall p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \in \overline{G}$

D'après le th. de Weierstrass

$\forall f \in E, \exists (P_n)$ suite de fonctions polynômes

$$P_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f$$

Or $P_n \in \overline{G} \Rightarrow f \in \overline{G}$ (fermé)

$$\Rightarrow E \subset \overline{G} \Rightarrow E = \overline{G}$$