

EXAMEN FINAL SESSION 2026

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

*L'usage de la calculatrice et de tout matériel électronique est strictement interdit.
La clarté de la rédaction, la rigueur des raisonnements et la précision des justifications seront
des éléments majeurs d'appréciation de la copie.*

Exercice Dans cet exercice les parties I et II sont indépendantes.

I. On considère la fonction g donnée par :

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + x^2 t^2)}{1 + t^2} dt$$

I-1. Montrer que g est bien définie sur $[0, +\infty[$.

I-2. Montrer que g est continue sur $[0, +\infty[$. (Ind. Utiliser le fait que $\ln$ est monotone).

I-3. Montrer que g est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

I-4. En utilisant que $\forall x > 0$ et $x \neq 1$:

$$\frac{t^2}{(1+t^2)(1+x^2 t^2)} = \frac{1}{x^2-1} \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{1+x^2 t^2} \right)$$

Montrer que $g'(x) = \frac{\pi}{1+x}$, puis donner l'expression de $g(x)$ pour tout $x \geq 0$.

II Soit E_∞ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions continues et **bornées** sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs réelles. On munit l'espace vectoriel E_∞ de la norme de la convergence uniforme : $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} |f(x)|$.

On note $C_0(\mathbb{R}^+)$ l'ensemble des fonctions f continues sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs réelles telles que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

II-1. a) Montrer que si f est un élément de $C_0(\mathbb{R}^+)$, alors il est borné sur $[0, +\infty[$

b) Montrer que $C_0(\mathbb{R}^+)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $(E_\infty, \|\cdot\|_\infty)$.

II-2. Le but de cette question est de montrer que l'ensemble

$$A = \{f \in C_0(\mathbb{R}^+) \mid f(0) \neq 0\}$$

n'est pas un connexe par arcs. On considère l'application ϕ définie par

$$\begin{aligned} \phi : C_0(\mathbb{R}^+) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto f(0) \end{aligned}$$

II-2-a. Montrer que l'application ϕ est une forme linéaire continue

II-2-b. On suppose qu'il existe une application continue $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$ vérifiant $\gamma(0) = f_1$ et $\gamma(1) = f_2$, où f_1 et f_2 sont les fonctions définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f_1(x) = e^{-x} \quad \text{et} \quad f_2(x) = -e^{-x}.$$

En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à $\phi \circ \gamma$, montrer que

$$\exists t_0 \in]0, 1[, \quad \gamma(t_0) \notin A.$$

II-2-c. Conclure sur la connexité par arcs de l'ensemble A .

- II-3. On considère l'ensemble $C_c(\mathbb{R}^+) = \{f \in E_\infty; f \text{ est nulle dans un voisinage de } +\infty\}$.
 L'objectif de cette question est de montrer que $C_c(\mathbb{R}^+)$ est dense dans $C_0(\mathbb{R}^+)$.
 Soit $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions continues de $C_c(\mathbb{R}^+)$ définies pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ par

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, n] \\ 2 - \frac{x}{n} & \text{si } x \in [n, 2n] \\ 0 & \text{si } x \in [2n, +\infty[\end{cases}$$

II-3-a. Soit $f \in C_0(\mathbb{R}^+)$. Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sup_{x \geq n} |f(x)|$.

- (i) Montrer que la suite (u_n) est positive et décroissante.
 (ii) Soit $\varepsilon > 0$, montrer $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \leq \varepsilon$. Dédurre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

II-3-b. Soit $f \in C_0(\mathbb{R}^+)$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - f \cdot \varphi_n\|_\infty = 0$.

II-3-c. Montrer que $C_c(\mathbb{R}^+) \subset C_0(\mathbb{R}^+)$.

II-3-d. Montrer que $C_c(\mathbb{R}^+)$ est dense dans $C_0(\mathbb{R}^+)$.

II-4. Pour $f \in E_\infty$, on définit la fonction $T(f)$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad T(f)(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{f(xt)}{1+t^2} dt$$

L'objectif de cette question est de montrer que T est une application linéaire continue de $(C_0(\mathbb{R}^+), \|\cdot\|_\infty)$ dans lui-même.

II-4-a. Montrer que la fonction $T(f) \in E_\infty$. Montrer que T est une application linéaire continue de $(E_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ dans lui-même ?

II-4-b. Dans cette question, on suppose que la fonction $f \in C_c(\mathbb{R}^+)$ et qu'elle est nulle sur l'intervalle $[A, +\infty[$, où $A > 0$.

II-4-b-i. Montrer que pour tout $x > 0$ et pour $t > \frac{A}{x}$, on a $f(xt) = 0$.

II-4-b-ii. Montrer que pour tout $x > 0$

$$|T(f)(x)| \leq \frac{2}{\pi} \|f\|_\infty \int_0^{A/x} \frac{dt}{1+t^2}.$$

Dédurre que $T(f) \in C_0(\mathbb{R}^+)$.

II-4-c. Dans cette question, on suppose que $f \in C_0(\mathbb{R}^+)$. Montrer que $T(f) \in C_0(\mathbb{R}^+)$.
 Conclure.

(Indication : on pourra utiliser la densité établie dans la question II-3-d.)

Problème

Notations et cadre du problème :

Dans tout le problème, on pose pour tout réel $\alpha > 1$, la série de Riemann $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

On s'intéresse dans ce sujet à l'étude analytique et probabiliste d'une famille de variables aléatoires discrètes admettant une espérance mais dont la variance peut être infinie. Le problème est divisé en trois parties. La partie I propose des résultats d'analyse sur les séries entières. La partie II définit le cadre probabiliste. La partie III exploite les deux premières pour démontrer une version sophistiquée de la Loi Faible des Grands Nombres.

Partie I : Séries entières et comportement au bord du disque

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs ou nuls telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1$. On lui associe la série entière de la variable réelle $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $R_G > 0$.

On pose $G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $x \in]-R_G, R_G[$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit le reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$, et on lui associe la série entière et on lui associe la série entière de la variable réelle $\sum_{n \geq 0} R_n x^n$ de rayon de convergence R_H .

On pose

$$H(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} R_n x^n, \quad x \in]-R_H, R_H[.$$

1. Étude préliminaire de G et H .

- Montrer que le rayon de convergence R_G de la série entière définissant G vérifie $R_G \geq 1$.
- Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ converge normalement sur $[-1, 1]$ et déduire que G est continue sur $[-1, 1]$.
- Montrer que la fonction G est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $] -1, 1[$.
- Montrer que le rayon de convergence R_H de la série entière définissant H vérifie $R_H \geq 1$.

2. Relation entre G et H .

- Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, on a la relation :

$$1 - G(x) = (1 - x)H(x)$$

- On suppose que la série $\sum_{n \geq 0} R_n$ converge. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 1^-} H(x)$ existe et est finie.
- Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} R_n$ converge si et seulement si la fonction G est dérivable à gauche en 1. Dans ce cas, déduire que G est dérivable sur $] -1, 1[$ et que

$$G'(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} R_n.$$

3. Comportement asymptotique au bord.

Dans cette question, on suppose que :

$$R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{C}{n} \quad \text{où} \quad C > 0.$$

- Donner le développement en série entière au voisinage de 0 sur l'intervalle $] -1, 1[$ de la fonction $x \mapsto \ln(1 - x)$.
- Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$, tel que

$$\forall n \geq N, \quad (1 - \varepsilon) \frac{C}{n} \leq R_n \leq (1 + \varepsilon) \frac{C}{n}.$$

- En découpant la somme définissant $H(x)$ au niveau de l'entier N , montrer que

$$H(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} -C \ln(1 - x).$$

- En déduire la limite de $\frac{1 - G(x)}{1 - x}$ lorsque $x \rightarrow 1^-$.

Partie II : Variables aléatoires et séries génératrices

Soit un réel $\alpha > 1$. On considère X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, dont la loi est donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{\zeta(\alpha) n^\alpha}$$

Cette loi est appelée loi zêta de paramètre α . On note G_X la fonction génératrice de la variable X , donnée par :

$$G_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) t^n.$$

1. Caractérisation et existence des moments.

- (a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que X admette une espérance finie $\mathbb{E}[X]$. Exprimer alors $\mathbb{E}[X]$ à l'aide de la fonction ζ .
- (b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que X admette une variance finie $\mathbb{V}(X)$. Exprimer $\mathbb{V}(X)$ à l'aide de la fonction ζ .

2. Équivalent asymptotique de la queue de distribution.

On suppose dans cette question que $\alpha \in]1, 3]$.

- (a) En utilisant une comparaison série-intégrale que l'on justifiera avec rigueur, montrer que

$$\mathbb{P}(X > n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha - 1) \zeta(\alpha) n^{\alpha-1}}.$$

- (b) Retrouver par ce biais le résultat de la question Partie II-1-(a) concernant l'existence de l'espérance de X , en utilisant la relation $\mathbb{E}[X] = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > n)$.
- (c) Quel est le comportement asymptotique de $1 - G_X(t)$ lorsque $t \rightarrow 1^-$ dans le cas précis où $\alpha = 2$?

Partie III : Inégalités de concentration et Loi Faible des Grands Nombres

Dans toute cette partie, on considère une suite $(X_k)_{k \geq 1}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, toutes de même loi que X (Il est à noter que X suit la loi zêta de paramètre $\alpha > 1$).

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

1. Inégalités fondamentales (Question de cours).

Soit Z une variable aléatoire réelle définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, admettant une espérance μ_Z et une variance σ_Z^2 .

- (a) (i) Énoncer l'inégalité de Markov appliquée à Z , quand Z est positive.
(ii) Énoncer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à Z .
- (b) Soient A un événement de $\mathcal{A}$ et $\mathbf{1}_A$ sa fonction indicatrice. Montrer que $\mathbf{1}_A$ est une variable aléatoire réelle discrète sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p = \mathbb{P}(A)$.

2. Loi Faible des Grands Nombres : cas de la variance finie.

On suppose dans cette question que $\alpha > 3$. On note $\mu = \mathbb{E}[X]$ et $\sigma = V(X)$. Montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P} \left(\left| \frac{S_n}{n} - \mu \right| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

En déduire que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\left| \frac{S_n}{n} - \mu \right| \geq \varepsilon \right) = 0$$

3. Loi Faible des Grands Nombres : Cas de variance infinie

On suppose désormais que $\alpha \in]2, 3]$. Dans ce cas, X admet une espérance $\mu = \mathbb{E}[X]$ finie, mais sa variance est infinie. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ne s'applique donc plus directement à S_n .

Pour tout $k \geq 1$ et tout $n \geq 1$, l'indicatrice de l'événement $\{X_k \leq n\}$ est notée $\mathbf{1}_{\{X_k \leq n\}}$. On définit les variables aléatoires suivantes :

$$Y_{k,n} = X_k \mathbf{1}_{\{X_k \leq n\}}, \text{ et } S'_n = \sum_{k=1}^n Y_{k,n}$$

(a) À l'aide de la question Partie II-2-(a), montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n\mathbb{P}(X > n) = 0.$$

(b) Montrer que les deux événements $\{S_n = S'_n\}$ et $\bigcap_{k=1}^n \{X_k \leq n\}$ sont égaux. Déduire que

$$\mathbb{P}(S_n \neq S'_n) \leq n\mathbb{P}(X_1 > n).$$

(c) En utilisant le fait que $\{\{S_n = S'_n\}, \{S_n \neq S'_n\}\}$ est un système complet d'événement, déduire que pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P} \left(\left| \frac{S_n}{n} - \mu \right| \geq \varepsilon \right) \leq \mathbb{P} \left(\left| \frac{S'_n}{n} - \mu \right| \geq \varepsilon \right) + o(1) \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty$$

(d) On pose $\mu_n = \mathbb{E}[Y_{1,n}]$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n = \mu$.

(e) Soit $\alpha \in]2, 3]$. Par comparaison série-intégrale, montrer que :

$$\sum_{k=1}^n k^{2-\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^{3-\alpha}}{3-\alpha} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n k^{-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n).$$

(f) Vérifier que $\mathbb{V}[Y_{1,n}] \leq \mathbb{E}[Y_{1,n}^2]$. Montrer qu'il existe une constante $K > 0$ telle que :

$$\forall n \geq 2, \quad \mathbb{V}(Y_{1,n}) \leq \begin{cases} Kn^{3-\alpha} & \text{si } \alpha \in]2, 3[\\ K \ln(n) & \text{si } \alpha = 3 \end{cases}$$

(g) Soit $\varepsilon > 0$. Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la somme S'_n pour montrer

$$\mathbb{P} \left(\left| \frac{S'_n}{n} - \mu_n \right| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right) \leq \frac{4\mathbb{V}(Y_{1,n})}{n\varepsilon^2}.$$

(h) En utilisant la question Partie III-3-d. Montrer que $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}$,

$$n \geq N \implies \mathbb{P} \left(\left| \frac{S'_n}{n} - \mu \right| \geq \varepsilon \right) \leq \mathbb{P} \left(\left| \frac{S'_n}{n} - \mu_n \right| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

(i) Conclure que la Loi Faible des Grands Nombres reste valable pour la suite $(X_k)_{k \geq 1}$ bien que sa variance soit infinie.