
Réduction des endomorphismes

EL AMDAOUI Mustapha,

Lycée IBN TIMIYA,
site web: www.elamdaoui.com,
email: elamdaoui@gmail.com

Niveau: MP

Table des matières

I	Rappels de l'algèbre linéaire	2
I.1	Matrices semblables	2
I.2	Somme de plusieurs sous-espaces vectoriels	3
I.3	Projecteurs associés à une décomposition	5
I.4	Sous-espaces vectoriels stables	6
II	Éléments propres	7
II.1	Éléments propres d'un endomorphisme	7
II.2	Éléments propres d'une matrice carrée	11
II.3	Lien avec les endomorphismes	11
II.4	Cas de deux matrices semblables	11
II.5	Changement de corps	12
III	Polynôme caractéristique	12
III.1	Polynôme caractéristique d'une matrice carrée	12
III.2	Propriétés du polynôme caractéristique	14
III.3	Multiplicité d'une valeur propre	16
IV	Diagonalisation	16
IV.1	Endomorphisme diagonalisable	17
IV.2	Matrices diagonalisables	17
IV.3	Caractérisation de diagonalisation	18
IV.4	Diagonalisation effective	20
V	Trigonalisation	22
V.1	Définitions et propriétés	22
V.2	Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes	23
V.3	Trigonalisation effective	24
VI	Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice	26
VI.1	Polynômes d'un endomorphisme ou d'une matrice	27
VI.2	Idéal annulateur et Polynôme minimal	28
VI.3	Théorème de Cayley Hamilton	30
VI.4	Lemme des noyaux	31
VII	Application à la réduction de la notion de polynôme annulateur	33
VII.1	Décompositions spectrales	33
VII.2	Polynôme annulateur et diagonalisation	33
VII.3	Polynôme minimal et trigonalisation	35

I Rappels de l'algèbre linéaire

I.1 Matrices semblables

Définition 1

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. On dit que A est semblable à B , et on note $A \approx B$, si et seulement s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$

Propriété 1

La relation $\approx$ est une relation d'équivalence dans $M_n(\mathbb{K})$

Preuve:

- *Réflexivité* : $\forall A \in M_n(\mathbb{K}), A = I_n A I_n$
- *Symétrie* : S'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$. On pose $Q = P^{-1} \in GL_n(\mathbb{K})$, alors $A = Q^{-1}BQ$, donc $B \approx A$
- *Supposons que $A \approx B$ et $B \approx C$. Il existe $P, Q \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $B = P^{-1}AP$ et $C = Q^{-1}BQ$. Alors $C = Q^{-1}P^{-1}APQ = (PQ)^{-1}A(PQ)$ et $PQ \in GL_n(\mathbb{K})$, donc $A \approx C$*

Remarque :

Pour E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E , $\underset{\mathcal{B}}{\text{Mat}}(f)$ est $\underset{\mathcal{B}'}{\text{Mat}}(f)$ sont semblables.

Propriété 2

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K}), B \in M_{p,n}(\mathbb{K})$, alors $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.
En particulier $\forall A, B \in M_n(\mathbb{K}), \text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$

Preuve:

AB et BA sont des matrices carrées. En notant $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et

$$\text{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^p a_{ij} b_{ji} \right) = \sum_{j=1}^p \left(\sum_{i=1}^n b_{ji} a_{ij} \right) = \text{Tr}(BA)$$

Propriété 3

Si A et B deux matrices semblables, alors :

1. $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B)$;
2. $\det(A) = \det(B)$;
3. $\text{rg}(\lambda A) = \text{rg}(\lambda B)$.

Définition 2

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{L}(E)$, on appelle trace de l'endomorphisme f notée $\text{Tr}(f)$, la trace d'une matrice représentative de f dans une base de E

Exemple: Trace d'un projecteur

Si p est un projecteur de E , alors $\text{Tr}(p) = \text{rg}(\lambda p)$

- Si $p = 0$ ou $p = \text{Id}_E$, alors le résultat est trivial
- Sinon. On sait que $E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$. Soit alors $(e_1, \dots, e_r)$ une base de $\text{Im } p$ et $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ une base de $\text{Ker } p$. La famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E . Comme pour tout i dans $\llbracket 1, r \rrbracket$, on a $p(e_i) = e_i$ et pour tout i dans $\llbracket r+1, n \rrbracket$, $p(e_i) = 0_E$, la matrice de p est de la forme $M_{\mathcal{B}}(p) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$. On en déduit que $\text{Tr}(p) = r = \text{rg}(\lambda p)$

Exemple: Trace d'une symétrie

Soit s une symétrie de direction G et de base F , alors $\text{Tr}(s) = \dim F - \dim G$.

- Si $s = \text{Id}_E$ ou $s = -\text{Id}_E$, l'égalité est triviale.
- Sinon. On sait que $E = \text{Ker}(\text{Id}_E - s) \oplus \text{Ker}(\text{Id}_E + s)$. Soit alors $(e_1, \dots, e_r)$ une base de $\text{Ker}(\text{Id}_E - s)$ et $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ une base de $\text{Ker}(\text{Id}_E + s)$. La famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E . Comme pour tout i dans $\llbracket 1, r \rrbracket$, on a $s(e_i) = e_i$ et pour tout i dans $\llbracket r+1, n \rrbracket$, $s(e_i) = -e_i$, la matrice de p est de la forme

$$M_{\mathcal{B}}(p) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & -I_{n-r} \end{array} \right).$$

On en déduit que $\text{Tr}(s) = \dim(\text{Ker}(\text{Id}_E - s)) - \dim(\text{Ker}(\text{Id}_E + s)) = 2r - n$.

Propriété 4

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie

1. $\text{Tr}: \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathbb{K}$ est une forme linéaire
2. $\forall f, g \in \mathcal{L}(E), \quad \text{Tr}(g \circ f) = \text{Tr}(f \circ g)$

I.2 Somme de plusieurs sous-espaces vectoriels

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$, $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E . On définit la somme de $F_1, \dots, F_n$, notée $F_1 + \dots + F_n$ ou $\sum_{i=1}^n F_i$:

$$F_1 + \dots + F_n := \{x_1 + \dots + x_n \mid (x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \dots \times F_n\}$$

Théorème 1

1. $\sum_{i=1}^n F_i$ est un sous-espace vectoriel de E .
2. Le sous-espace vectoriel $\sum_{i=1}^n F_i$ de E est le sous-espace vectoriel de E engendré par $\bigcup_{i=1}^n F_i$

Preuve:

1. Montrons que $\sum_{i=1}^n F_i$ est un sous-espace vectoriel de E

◦ L'ensemble $\sum_{i=1}^n F_i$ n'est pas vide car $0 = \sum_{i=1}^n 0 \in \sum_{i=1}^n F_i$.

◦ Soient u et u' des éléments de $\sum_{i=1}^n F_i$, il existe alors deux éléments de chaque F_i , x_i et x'_i , tels que $u = \sum_{i=1}^n x_i$ et

$$u' = \sum_{i=1}^n x'_i.$$

Soit λ un scalaire. En utilisant les axiomes des espaces vectoriels, on obtient :

$$\lambda u + u' = \sum_{i=1}^n (\lambda x_i + x'_i)$$

Comme pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, F_i est un sous-espace vectoriel, alors $\lambda x_i + x'_i \in F_i$. Donc $\lambda u + u' \in \sum_{i=1}^n F_i$

2. Il est clair que $\sum_{i=1}^n F_i$ est un sous espace vectoriel contenant $\bigcup_{i=1}^n F_i$.

Il reste à démontrer que tout sous-espace vectoriel contenant $\bigcup_{i=1}^n F_i$ contient aussi $\sum_{i=1}^n F_i$.

Considérons H , un sous-espace vectoriel de E contenant $\bigcup_{i=1}^n F_i$, et u un élément de $\sum_{i=1}^n F_i$. L'élément u égale à $\sum_{i=1}^n x_i$ où $x_i \in F_i$.

Les éléments x_i appartiennent à $\bigcup_{i=1}^n F_i$, donc ils appartiennent aussi à H , et comme H est un sous-espace vectoriel,

l'élément $\sum_{i=1}^n x_i$ appartient à H donc u est un élément de H . Donc H contient $\sum_{i=1}^n F_i$.

Définition 3: Somme directe

On dit que $F_1, \dots, F_n$ sont en somme directe si et seulement si pour tout élément u de $\sum_{i=1}^n F_i$, il existe un unique n -uplets $(x_1, \dots, x_n)$ de $F_1 \times \dots \times F_n$ tel que $u = \sum_{i=1}^n x_i$.

On dit aussi dans ce cas que la somme $\sum_{i=1}^n F_i$ est directe. La somme sera notée : $\bigoplus_{i=1}^n F_i$.

Si de plus $\sum_{i=1}^n F_i = E$, on dit que $F_1, \dots, F_n$ sont supplémentaires

Théorème 2: Propriété caractéristique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E . Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $F_1, \dots, F_n$ sont en somme directe.
2. $\forall p \in \llbracket 2, n \rrbracket, \left(\sum_{i=1}^{p-1} F_i \right) \cap F_p = \{0\}$.
3. Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \dots \times F_n, \sum_{i=1}^n x_i = 0 \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i = 0$.

Preuve:

1 $\Rightarrow$ 2) Supposons que $F_1, \dots, F_n$ sont en somme directe.

Soient $p \in \llbracket 2, n \rrbracket$ et $x \in \left(\sum_{i=1}^{p-1} F_i \right) \cap F_p$ alors il existe $(x_1, \dots, x_{p-1}) \in F_1 \times \dots \times F_{p-1}$ tel que $x = \sum_{i=1}^{p-1} x_i$. Donc $0 = \sum_{i=1}^{p-1} x_i - x = \sum_{i=1}^n x_i$ avec $x_p = -x$ et $x_{p+1} = \dots = x_n = 0$. Or 0 s'écrit comme somme de vecteurs nuls, cela entraîne $x = 0$

2 $\Rightarrow$ 3) Soit $(x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \dots \times F_n$ tel que $\sum_{i=1}^n x_i = 0$. Montrons par récurrence forte et descendante, sur $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, que $x_i = 0$

► Pour $i = n$, on a $x_n = \sum_{k=1}^{n-1} -x_k \in F_n \cap \left(\sum_{k=1}^{n-1} F_k \right) = \{0\}$

► Soit $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, supposons que $x_i = \dots = x_n = 0$, alors $\sum_{k=1}^{i-1} x_k = \sum_{k=1}^n x_k = 0$, donc $x_{i-1} = \sum_{k=1}^{i-2} -x_k \in F_{i-1} \cap \left(\sum_{k=1}^{i-2} F_k \right) = \{0\}$, donc $x_{i-1} = 0$

3 $\Rightarrow$ 1) Soit $x \in \sum_{i=1}^n F_i$ et $(x_1, \dots, x_n), (x'_1, \dots, x'_n) \in F_1 \times \dots \times F_n$ tels que

$$x = \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x'_i$$

Alors $\sum_{i=1}^n (x_i - x'_i) = 0$, on $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $x_i - x'_i = 0$, puis $x_i = x'_i$

Théorème 3: Propriété caractéristique en dimension finie

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $F_1, \dots, F_n$ sont en somme directe

$$2. \dim \left(\sum_{i=1}^n F_i \right) = \sum_{i=1}^n \dim F_i$$

En particulier $F_1, \dots, F_n$ sont supplémentaires si et seulement si $E = \sum_{i=1}^n F_i$ et $\dim \left(\sum_{i=1}^n F_i \right) = \sum_{i=1}^n \dim F_i$

Preuve:

1 $\Rightarrow$ 2) Supposons que $F_1, \dots, F_n$ sont en somme directe.

Montrons par récurrence sur $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ que $\dim \left(\sum_{i=1}^p F_i \right) = \sum_{i=1}^p \dim F_i$

► Pour $p = 1$ rien à démontrer

► Soit $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, supposons que $\dim \left(\sum_{i=1}^p F_i \right) = \sum_{i=1}^p \dim F_i$. On a

$$\sum_{i=1}^{p+1} F_i = \sum_{i=1}^p F_i + F_{p+1} \quad \text{et} \quad \left(\sum_{i=1}^p F_i \right) \cap F_{p+1} = \{0\}$$

$$\text{Alors } \dim \left(\sum_{i=1}^{p+1} F_i \right) = \dim \left(\sum_{i=1}^p F_i \right) + \dim(F_{p+1}) = \dim \left(\sum_{i=1}^{p+1} F_i \right)$$

Récurrence achevée

2 $\Rightarrow$ 1) S'il existe $p \in \llbracket 2, n \rrbracket$ tel que $\left(\sum_{i=1}^{p-1} F_i \right) \cap F_p \neq \{0\}$, alors $\dim \left(\sum_{i=1}^p F_i \right) < \sum_{i=1}^p \dim F_i$, donc

$$\begin{aligned} \dim \left(\sum_{i=1}^n F_i \right) &\leq \dim \left(\sum_{i=1}^p F_i \right) + \dim \left(\sum_{i=p+1}^n F_i \right) \\ &< \sum_{i=1}^p \dim F_i + \sum_{i=p+1}^n \dim F_i = \sum_{i=1}^n \dim F_i \end{aligned}$$

I.3 Projecteurs associés à une décomposition

Soient $F_1, \dots, F_n$ sont des sous-espaces vectoriels de E réalisant une décomposition en somme directe.

$$\forall x \in E, \exists!(x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \dots \times F_n, x = x_1 + \dots + x_n$$

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose

$$p_i : \begin{cases} E & \longrightarrow E \\ x & \longmapsto x_i \end{cases}$$

Propriété 5

On a les relations

1. $\text{id}_E = \sum_{i=1}^n p_i$.
2. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, p_i est la projection sur $F = F_i$ parallèlement à $\bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n F_j$.
3. Pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on a $p_i \circ p_j = \delta_{i,j} \cdot p_i$ où δ est le symbole de Kronecker.

Les applications $p_1, \dots, p_n$ ainsi définies sont appelées projecteurs associés à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^n F_i$

Preuve:

1. Pour $x \in E$, on a $x = \sum_{i=1}^n p_i(x) = \sum_{i=1}^n p_i(x)$, donc $\text{id}_E = \sum_{i=1}^n p_i$.

2. Les espaces F_i et $\bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n F_j$ sont supplémentaires.

Notons p la projection sur F_i parallèlement à $\bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n F_j$.

Pour tout $x \in E$, on peut écrire de façon unique $x = x_1 + \dots + x_n$ avec $x_j \in F_j$.

On a alors $x = x_i + y$ avec $x_i \in F_i$ et $y = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n x_j \in G$.

Par suite $p(x) = x_i = p_i(x)$. Ainsi $p = p_i$.

3. Soit $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Si $i = j$, alors $p_i^2 = p_i$ car p_i est un projecteur. Sinon, $\text{Im}(p_i) = F_i \subset \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n F_k = \text{Ker}(p_j)$, donc $p_j \circ p_i = 0$.

I.4 Sous-espaces vectoriels stables

Définition 4: Sous-espace vectoriel stable

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et u un endomorphisme de E ; un sous-espace vectoriel F de E est dit stable pour u si, et seulement si, $u(F)$ est inclus dans F .

Remarque :

F est stable pour $u \iff \forall x, x \in F \Rightarrow u(x) \in F$

Propriété 6: Stabilité et famille génératrice

F est un sous-espace vectoriel stable pour u si, et seulement si, l'image par u d'une famille génératrice de F est contenue dans F .

Preuve:

La condition nécessaire est évidente : les éléments d'une famille génératrice de F sont des éléments particuliers de F .

Si $(f_1, \dots, f_p)$ engendrent F , alors $(u(f_1), \dots, u(f_p))$ engendrent $u(F)$, grâce à la linéarité de u :

$$x = \sum_{j=1}^p \lambda_j f_j \in F \Rightarrow u(x) = \sum_{j=1}^p \lambda_j u(f_j) \in u(F)$$

ce qui donne la condition suffisante

Exemple

Soit x un vecteur de E . Le sous-espace $\text{Vect} u^k(x)_{k \in \mathbb{N}}$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant x et stable par u .

En effet, ce sous-espace est évidemment contenu dans tout sous-espace contenant x et stable par u . Les relations $x = u^0(x)$ et $u(u^k(x)) = u^{k+1}(x)$ pour tout k montrent qu'il contient x et est stable par u .

Propriété 7: Application induite sur un sous-espace vectoriel stable

Si u est un endomorphisme de E et F un sous-espace vectoriel stable pour u , l'application $u_F : x \in F \mapsto u(x)$ induite par u sur F , est un endomorphisme de F .

Preuve:

L'application v est à valeurs dans F et est linéaire puisque u l'est.

Propriété 8

Si F est stable par u . Alors

$$\text{Im} u_F = u(F) \quad \text{et} \quad \text{Ker} u_F = F \cap \text{Ker} u$$

Définition 5: Base adaptée

Soit F un sous-espace vectoriel de E et $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

On dit que β est adaptée à F lorsqu'il existe $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $(e_1, \dots, e_p)$ est base de F

Remarque :

Le théorème de la base incomplète montre l'existence de telle base.

Exemple

Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$. Les deux vecteurs $\varepsilon_1 = (1, -1, 0)$ et $\varepsilon_2 = (0, 1, -1)$ forment une base de F . La famille $\beta = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ car

$$\det(\varepsilon_1, \varepsilon_2, e_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

β est une base de $\mathbb{R}^3$ adaptée à F

Propriété 9: Caractérisation des sous-espaces vectoriels stables

Soient F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E de dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de E adaptée à F et u un endomorphisme de E ; alors F est stable pour u si, et seulement si, la matrice de u relativement à $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure par blocs, soit

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

Preuve:

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base de E telle que les p premiers vecteurs $e_1, \dots, e_p$ constituent une base de F ; F est stable par u si, et seulement si, pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $u(e_j)$ est dans F . Or, $u(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i$ appartient à F si, et seulement si, $a_{i,j} = 0$ pour tout $j \in \llbracket p+1, n \rrbracket$, c'est-à-dire si, et seulement si, les p premières colonnes de la matrice de u ont des 0 à partir de la ligne $(p+1)$.

Propriété 10: Généralisation

Soient E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E , $\mathcal{B}$ une base de E adaptée à cette décomposition et u un endomorphisme de E ; alors u stabilise les sous-espaces F_j si, et seulement si, la matrice de u relativement à $\mathcal{B}$ est diagonale par blocs,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & (0) \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \boxed{A_p} \end{pmatrix}$$

Preuve:

Soit $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on a $F_j = \text{Vect} \beta_j$, donc

$$\begin{aligned} j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad u(F_j) \subset F_j &\iff j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \forall x \in F_j : u(x) \in \text{Vect} \beta_j \\ &\iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & (0) \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \boxed{A_p} \end{pmatrix} \begin{matrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{matrix} \end{aligned}$$

Remarque :

En appelant u_j l'endomorphisme induit par u sur le sous-espace stable F_j , A_j est la matrice de u_j relativement à la base $\mathcal{B}_j$ et

$$\det u = \det A_1 \times \dots \times \det A_p = \det u_1 \times \dots \times \det u_p$$

Si $\mathcal{D}$ est une droite vectorielle, tout endomorphisme de $\mathcal{D}$ est une homothétie; ainsi, si $\mathcal{D}$ est une droite vectorielle de E , stable pour u , l'endomorphisme de $\mathcal{D}$ induit par u est une homothétie de $\mathcal{D}$ ce qui donne le

II Éléments propres

II.1 Éléments propres d'un endomorphisme

E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie ou non et u un endomorphisme de E .

Soit $\mathcal{D}$ une droite vectorielle stable pour u , $u_{\mathcal{D}}$ est un endomorphisme de $\mathcal{D}$, donc une homothétie de $\mathcal{D}$; il existe donc un unique scalaire λ , dépendant de $\mathcal{D}$, tel que

$$u_{\mathcal{D}} = \lambda I_{\mathcal{D}} \quad \text{ie} \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad u(x) = \lambda x$$

Définition 6: Vecteur propre, valeur propre associée

1. Un vecteur x de E est dit vecteur propre de u lorsqu'il n'est pas nul et il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$. Ce scalaire est unique appelé valeur propre
2. Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de u s'il existe un vecteur non nul x de E tel que $u(x) = \lambda x$. Le vecteur x est dit propre associé à λ
3. L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme u est appelé le spectre de u et noté $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$ ou encore $\text{Sp}(u)$.

$$\lambda \in \text{Sp}(u) \iff \exists x \in E, \setminus \{0\} \quad \text{tel que} \quad u(x) = \lambda x$$

Attention

1. La valeur propre associée à un vecteur propre est unique.
2. Un vecteur non nul e est un vecteur propre si, et seulement si, la famille $(e, u(e))$ est une famille liée.
3. Si e est un vecteur propre pour u , tous les vecteurs non nuls de la droite stable $\mathbb{K}e$ sont des vecteurs propres pour u et sont associés à la même valeur propre.

Exemple

$\text{Sp}(\text{Id}_E) = \{1\}$ et $\text{Sp}(0_{\mathcal{L}(E)}) = \{0\}$.

Propriété 11: Caractérisation des vecteurs propres

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E \setminus \{0\}$.

x est vecteur propre de u , si et seulement si, $\text{Vect}(x)$ est stable par u

Preuve:

- Si x est vecteur propre de u , alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x \in \text{Vect}(x)$, donc $\text{Vect}(x)$ est stable par u
- Si $\text{Vect}(x)$ est stable par u , alors $u(x) \in \text{Vect}(x)$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$

Propriété 12: Caractérisation des valeurs propres

Si u un endomorphisme de E , alors

$$\begin{aligned} \lambda \in \text{Sp}(u) &\iff \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E) \neq \{0_E\} \\ &\iff u - \lambda \text{Id}_E \text{ n'est pas injectif} \end{aligned}$$

En particulier,

$$0 \in \text{Sp}(u) \iff u \text{ n'est pas injectif}$$

Propriété 13

Si u est un automorphisme de E , $\text{Sp}(u^{-1}) = \left\{ \frac{1}{\lambda} \mid \lambda \in \text{Sp}(u) \right\}$.

Preuve:

Si λ est une valeur propre de u , il existe un vecteur (propre) non nul $x \in E$ tel que $u(x) = \lambda x$, égalité que l'on peut encore écrire $0 = u(x) - \lambda x = (u - \lambda \text{Id}_E)(x)$; ceci donne les équivalences annoncées.

Si u est un automorphisme de E , toutes ses valeurs propres sont non nulles; pour toute valeur propre λ et tout vecteur propre x associé, on a :

$$u(x) = \lambda x \iff x = u^{-1}(\lambda x) = \lambda u^{-1}(x) \iff \frac{1}{\lambda} x = u^{-1}(x) \quad (1)$$

Ainsi λ est valeur propre de u si, et seulement si, λ^{-1} est valeur propre de u^{-1} et

$$\text{Sp}(u^{-1}) = \{\lambda^{-1}, \lambda \in \text{Sp}(u)\}$$

Propriété 14: Caractérisation du spectre en dimension finie

Si u est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie n , alors

$$\begin{aligned}\lambda \in \text{Sp}(u) &\iff u - \lambda \text{Id}_E \text{ non injectif} \\ &\iff u - \lambda \text{Id}_E \text{ non surjectif} \\ &\iff \text{rg}(u - \lambda \text{Id}_E) \leq n - 1 \\ &\iff \det(u - \lambda \text{Id}_E) = 0\end{aligned}$$

et aussi

$$\lambda \notin \text{Sp}(u) \iff (u - \lambda \text{Id}_E) \text{ est inversible}$$

Preuve:

C'est l'application des célèbres caractérisations des automorphismes d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie : si v est un endomorphisme de E , alors

$$\begin{aligned}v \text{ est inversible} &\iff v \text{ est injectif} \\ &\iff v \text{ est surjectif} \\ &\iff \text{rg}(v) = n \\ &\iff \det(v) \neq 0\end{aligned}$$

Ces caractérisations sont appliquées à $v = u - \lambda \text{Id}_E$.

Définition 7: Sous-espace propre

Si u est un endomorphisme de E et λ une valeur propre de u , le sous-espace vectoriel

$$E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E) = \{x \in E \mid u(x) = \lambda x\}$$

est appelé sous-espace vectoriel propre de u associé à λ .

Attention

$E_\lambda(u)$ est constitué de 0_E et des vecteurs propres de u associés à λ . Si e est un vecteur propre de u associé à λ , la droite $\mathbb{K}e$ est contenue dans $E_\lambda(u)$.

Exemple

Voici les éléments propres de quelques endomorphismes :

- ▶ homothétie $h = \lambda \text{Id}_E : \text{Sp}(h) = \{\lambda\}, E_\lambda(h) = E$;
- ▶ projecteur p non trivial : $\text{Sp}(p) = \{0, 1\}, E_0(p) = \text{Ker } p$ et $E_1(p) = \text{Im } p$;
- ▶ symétrie s non triviale : $\text{Sp}(s) = \{-1, 1\}, E_{-1}(s) = F_1$ et $E_1(s) = F_2$;

Exemple

Soit $u : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[X], P \longmapsto XP'$.

Déterminons $\text{Sp}(u)$ et les sous-espaces propres de u

On trouve $\text{Sp}(u) = \mathbb{N}$ et $E_n(u) = \text{Vect}(X^n)$

Propriété 15: Somme directe de sous-espaces propres

La somme d'une famille finie de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes deux à deux, est directe.

Preuve:

Par récurrence sur le nombre k de sous-espaces vectoriels propres.

$E_{\lambda_1}(u) \cap E_{\lambda_2}(u) = \{0\}$ car à tout vecteur propre est associé une seule valeur propre. La propriété est vraie pour $k = 2$.

Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_k, \lambda_{k+1})$ des valeurs propres distinctes de u et montrons que $E_{\lambda_{k+1}}(u) \cap \sum_{i=1}^k E_{\lambda_i}(u) = \{0_E\}$. Soit $x_{k+1} = \sum_{i=1}^k x_i \in$

$E_{\lambda_{k+1}}(u) \cap \sum_{i=1}^k E_{\lambda_i}(u)$. D'une part

$$u(x_{k+1}) = \lambda_{k+1}x_{k+1} = \lambda_{k+1} \sum_{i=1}^k x_i$$

et d'autre part

$$u(x_{k+1}) = u\left(\sum_{i=1}^k x_i\right) = \sum_{i=1}^k u(x_i) = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i,$$

donc

$$0 = \sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i)x_i$$

ce qui montre que $(\lambda_{k+1} - \lambda_i)x_i = 0$ puisque la somme $\sum_{i=1}^k E_{\lambda_i}(u)$ est directe (la propriété est vraie au rang k , puisque les valeurs propres sont distinctes deux à deux) et $x_i = 0$. Ainsi $x_{k+1} = 0$ et la propriété est vraie au rang $k+1$.

Le théorème de récurrence montre que la propriété est vraie pour tout k .

Corollaire 1 (Liberté d'une famille de vecteurs propres)

Toute famille de vecteurs propres, associés à des valeurs distinctes deux à deux, est une famille libre.

Preuve:

Soit $x_1, \dots, x_p$ des vecteurs propres associées respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ distinctes deux à deux. Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{k=1}^p \alpha_k x_k = 0$. Mais $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$: $\alpha_i x_i \in \text{Ker}(u - \lambda_i \text{Id})$ et $\sum_{i=1}^p \text{Ker}(u - \lambda_i \text{Id})$ est directe, donc $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$: $\alpha_i x_i = 0$, puis $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$: $\alpha_i = 0$

Exemple

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $\exp_\lambda : x \mapsto e^{\lambda x}$. Montrons que $(\exp_\lambda)$ est libre.

$\exp_\lambda$ est un vecteur propre de l'endomorphisme

$$D : \begin{cases} \mathcal{C}^\infty & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty \\ f & \longmapsto & f' \end{cases}$$

Exemple

Soit $n \in \mathbb{N}$, $g_n : x \mapsto \cos(nx)$. Montrons que $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est libre

Soit $n \in \mathbb{N}$, g_n est un vecteur propre associé à $-n^2$ de l'endomorphisme

$$D : \begin{cases} \mathcal{C}^\infty & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty \\ f & \longmapsto & f'' \end{cases}$$

Propriété 16

Le spectre d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie n est fini de cardinal au plus n .

Propriété 17: Stabilité des sous-espaces propres

Soit u et v deux endomorphismes de E qui commutent

1. $\text{Im} u$ et $\text{Ker} u$ sont stables par v et réciproquement.
2. Tout sous-espace vectoriel propre relativement à u est stable par v et réciproquement.

Preuve:

1. ► Soit $y = u(x)$ un vecteur quelconque de $\text{Im} u$, son image par v , $v(y) = v(u(x)) = u(v(x))$ reste dans $\text{Im} u$.
► Si x est élément de $\text{Ker} u$, alors $u(v(x)) = v(u(x)) = v(0) = 0$, et $v(x)$ reste dans $\text{Ker} u$.
2. Puisque u et v commutent, $u - \lambda \text{Id}_E$ et v commutent, et donc, $\text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E) = E_\lambda(u)$ est stable par v . De même $\text{Ker}(v - \lambda \text{Id}_E) = E_\lambda(v)$ est stable par u .

Propriété 18: Endomorphisme induit

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E stable par u . Alors

1. $\text{Sp}(u_F) \subset \text{Sp}(u)$
2. $\forall \lambda \in \text{Sp}(u_F), E_\lambda(u_F) = E_\lambda(u) \cap F$

Preuve:

1. Soit $\lambda \in \text{Sp}(u_F)$, alors il existe un vecteur x non nul de $F \subset E$ tel que $u(x) = \lambda x$, donc $\lambda \in \text{Sp}(u)$
2. $E_\lambda(u_F) = \text{Ker}(u_F - \lambda \text{Id}_F) = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E) \cap F = E_\lambda(u) \cap F$

II.2 Éléments propres d'une matrice carrée

Dans ce paragraphe, M est une matrice carrée d'ordre $n \geq 1$, à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Définition 8: Éléments propres d'une matrice carrée

1. Un élément X de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ est dit vecteur propre de M s'il est non nul et s'il existe un scalaire λ tel que $MX = \lambda X$.
2. Un scalaire λ est dit valeur propre de M si la matrice $M - \lambda I_n$ n'est pas inversible.
3. L'ensemble des valeurs propres de M est le spectre de M ; il est noté $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(M)$ ou $\text{Sp}(M)$ si le corps n'est pas ambigu.
4. Si $\lambda \in \text{Sp}(M)$, le sous-espace vectoriel $\text{Ker}(M - \lambda I_n) = \{X \in M_{n,1}(\mathbb{K}), MX = \lambda X\}$ de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ est appelé sous-espace vectoriel propre associé à λ ; il est noté $E_\lambda(M)$.

Propriété 19

Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$. Alors

$$\begin{aligned} \lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}} M &\iff M - \lambda I_n \notin \text{GL}_n(\mathbb{K}) \\ &\iff \det(M - \lambda I_n) = 0 \\ &\iff \text{Ker}(M - \lambda I_n) \neq \{0\} \\ &\iff \text{rg}(M - \lambda I_n) \leq n - 1 \end{aligned}$$

II.3 Lien avec les endomorphismes

À la matrice $M \in M_n(\mathbb{K})$, on associe l'endomorphisme u_M de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ par la formule

$$u_M : X \in M_{n,1}(\mathbb{K}) \mapsto MX$$

ce qui donne la propriété

Propriété 20: Éléments propres d'une matrice et de son endomorphisme

Les éléments propres de la matrice M sont les éléments propres de l'endomorphisme u_M associé.

Propriété 21: Éléments propres d'un endomorphisme et de sa matrice

Si u est un endomorphisme de E où E est de dim finie et $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ sa matrice relativement à une base $\mathcal{B}$, alors :

1. u et M ont le même spectre;
2. x est vecteur propre de u associé à λ si, et seulement si, sa matrice $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ relativement à $\mathcal{B}$ est vecteur propre de M associé à λ .

II.4 Cas de deux matrices semblables

Soient A et B deux matrices semblables d'ordre n , et P une matrice inversible telle que $B = P^{-1}AP$; à A est associé l'endomorphisme u_A de $M_{n,1}(\mathbb{K})$. La matrice P peut s'interpréter comme la matrice de passage de la base

naturelle (canonique) $\mathcal{E}$ de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ à une base $\mathcal{B}$ constituée des vecteurs colonnes de P . Relativement à cette base, la matrice de u_A est B .

Propriété 22: Matrices semblables et endomorphisme

Deux matrices sont semblables si, et seulement si, elles représentent le même endomorphisme (relativement à deux bases).

Corollaire 2 (Spectre de deux matrices semblables)

Deux matrices semblables ont le même spectre.

Preuve:

C'est le spectre de l'unique endomorphisme qu'elle représente.

II.5 Changement de corps

Propriété 23

1. Soit $\mathbb{L}$ un sous-corps de $\mathbb{K}$ et $M \in M_n(\mathbb{L})$, alors $\text{Sp}_{\mathbb{L}}(M) \subset \text{Sp}_{\mathbb{K}}(M)$
2. Si M est une matrice à coefficients réels, alors $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(M) \subset \text{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$; en général, les deux spectres sont distincts.

Preuve:

Si λ est un élément de $\text{Sp}_{\mathbb{L}}(M)$ et X un vecteur propre associé, alors $MX = \lambda X$, X est non nul et appartient à $M_{n,1}(\mathbb{L})$ donc à $M_{n,1}(\mathbb{K})$; ainsi λ appartient à $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(M)$.

Exemple

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ est vide. Par contre, i est une valeur propre complexe de A , puisque $A - iI_2 = \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

III Polynôme caractéristique

III.1 Polynôme caractéristique d'une matrice carrée

Définition 9: Polynôme caractéristique d'une matrice carrée

Si $M = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une matrice carrée d'ordre $n \geq 1$, le polynôme caractéristique de M , que l'on note χ_M , est le déterminant

$$\chi_M(X) = \det(XI_n - M) = \begin{vmatrix} X - a_{1,1} & -a_{1,2} & \cdots & -a_{1,n} \\ -a_{2,1} & X - a_{2,2} & \cdots & -a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n,1} & -a_{n,2} & \cdots & X - a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Exemple

Voici quelques polynômes caractéristiques de matrices :

- ▶ Matrice nulle : $\chi_0 = X^n$;
- ▶ Matrice unité d'ordre n : $\chi_{I_n} = (X - 1)^n$;
- ▶ Matrice diagonale $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$: $\chi_D = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$;
- ▶ Matrice triangulaire $T = [t_{i,j}]$: $\chi_T = \prod_{i=1}^n (X - t_{i,i})$.

Exemple

Propriété 24: Transposée et matrices semblables

1. Une matrice et sa transposée ont le même polynôme caractéristique.
2. Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique

Preuve:

1. Rappelons qu'une matrice et sa transposée ont le même déterminant; d'où $XI_n - {}^tM = {}^t(XI_n - M)$, et donc $\det(XI_n - {}^tM) = \det({}^t(XI_n - M)) = \det(XI_n - M)$ ce qui donne le résultat.
2. Rappelons que deux matrices semblables ont le même déterminant. Si A et B sont deux matrices semblables, et P une matrice inversible telle que $B = P^{-1}AP$, alors

$$B = P^{-1}AP \Rightarrow XI_n - B = XI_n - P^{-1}AP = P^{-1}(XI_n - A)P$$

les matrices $XI_n - B$ et $XI_n - A$ sont semblables, d'où

$$\det(XI_n - B) = \det P^{-1}(XI_n - A)P = \det(XI_n - A)$$

ce qui donne le résultat.

Exemple: Matrice compagnon

Soit $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$, on pose $P = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. On appelle matrice compagnon de P , la matrice :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Alors $\chi_A = P$

Soit $P = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. Le polynôme caractéristique de la matrice compagnon C est égal à :

$$\begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ -1 & X & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ & & \ddots & -1 & X & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & X - a_{n-1} \end{vmatrix}$$

L'opération $L_1 \leftarrow L_1 + \sum_{i=2}^n X^{i-1} L_i$ transforme ce déterminant en :

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & P(X) \\ -1 & X & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ & & \ddots & -1 & X & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & X - a_{n-1} \end{vmatrix}$$

dont le développement suivant la première ligne est $(-1)^{n+1} P(X) (-1)^{n-1} = P(X)$

Définition 10: Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

Si u est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 1$, le polynôme caractéristique de la matrice qui représente u dans une base donnée $\mathcal{B}$ de E , est indépendant du choix de cette base ; on l'appelle polynôme caractéristique de l'endomorphisme u ; il est noté χ_u .

$$\chi_u = \det \left(XI_n - \underset{\mathcal{B}}{\text{Mat}}(u) \right) \quad \text{où } \mathcal{B} \text{ est une base de } E$$

Exemple

Le polynôme caractéristique de l'application identique est $\chi_{\text{Id}_E} = \chi_{I_n} = (X - 1)^n$ et celui de l'application nulle $\chi_{0_{\mathcal{L}(E)}} = \chi_{0_{M_n(\mathbb{K})}} = X^n$.

III.2 Propriétés du polynôme caractéristique**Propriété 25: Polynôme caractéristique et valeurs propres**

Les valeurs propres d'une matrice sont les racines sur $\mathbb{K}$ de son polynôme caractéristique.

Preuve:

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, alors

$$\begin{aligned} \lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(M) &\iff M - \lambda I_n \notin \text{GL}_n(\mathbb{K}) \\ &\iff \det(M - \lambda I_n) = 0 \\ &\iff \chi_M(\lambda) = 0 \end{aligned}$$

Corollaire 3 (Spectre d'une matrice complexe)

Toute matrice à coefficients complexes admet, au moins, une valeur propre (complexe).

Preuve:

Tout polynôme à coefficients complexes admet une racine complexe, c'est le théorème de D'Alembert.

Propriété 26: Coefficients du polynôme caractéristique

χ_M est un polynôme de degré n et

$$\chi_M = X^n - \text{Tr}(M)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det M$$

$$a_n = 1, a_{n-1} = -\text{Tr}(M) \text{ et } a_0 = (-1)^n \det M$$

Preuve:

L'égalité $\chi_M(0) = \det(-M)$ donne le coefficient constant.

Appelons $a_{i,j}$ le terme général de M et $\tilde{a}_{i,j}$ celui de $XI_n - M$. Si s est une permutation de $\mathcal{S}_n$ distincte de l'identité, $\prod_{i=1}^n \tilde{a}_{i,s(i)}$ est un polynôme de degré au plus $(n-2)$, ce qui donne

$$\begin{aligned} \chi_M &= \begin{vmatrix} X - a_{1,1} & -a_{1,2} & \cdots & -a_{1,n} \\ -a_{2,1} & X - a_{2,2} & \cdots & -a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n,1} & -a_{n,2} & \cdots & X - a_{n,n} \end{vmatrix} \\ &= \prod_{i=1}^n (X - a_{i,i}) + \underbrace{\sum_{\substack{s \in \mathcal{S}_n \\ s \neq e}} \varepsilon(s) \prod_{i=1}^n \tilde{a}_{i,s(i)}}_{\text{polynôme de degré } \leq n-2} \\ &= X^n - \left(\sum_{i=1}^n a_{i,i} \right) X^{n-1} + \underbrace{\cdots + \cdots + \cdots}_{\text{polynôme de degré } \leq n-2} \\ &= X^n - \text{Tr}(M) X^{n-1} + \underbrace{\cdots + \cdots + \cdots}_{\text{polynôme de degré } \leq n-2} \end{aligned}$$

Exemple

Le calcul de χ_M est facile en dimension 2

$$\chi_M = X^2 - \text{Tr}(M)X + \det M$$

Corollaire 4 (Nombre de valeurs propres distinctes d'une matrice carrée)

Le nombre de valeurs propres d'une matrice carrée est au plus égal à son ordre.

Preuve:

Le nombre de valeurs propres distinctes d'une matrice carrée d'ordre n est égal au nombre de racines distinctes du polynôme caractéristique, ie d'un polynôme de degré n ; ce nombre est compris entre 0 et n .

Corollaire 5 (Cas des polynômes caractéristiques scindés)

Si le polynôme caractéristique de M est scindé sur $\mathbb{K}$, avec $\chi_M = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$, alors

$$\text{Sp}(M) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}, \quad \text{Tr}(M) = \sum_{i=1}^n \lambda_i, \quad \det M = \prod_{i=1}^n \lambda_i$$

Preuve:

Il suffit de développer $\prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$ et d'identifier ce polynôme avec celui de la formule précédente.

Corollaire 6 (Cas des matrices réelles)

Tout matrice à coefficients réels et d'ordre impair admet, au moins, une valeur propre réelle.

Preuve:

Si n est impair, χ_M est de degré impair et $\chi_M(x) \sim (-x)^n$; le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'une racine réelle pour χ_M , et $\text{Sp}_{\mathbb{R}} M$ n'est pas vide.

Propriété 27: Cas d'une matrice triangulaire par blocs

Le polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire par blocs se calcule aisément :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}, \text{ avec } A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \text{ et } C \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K}) \Rightarrow \chi_M = \chi_A \chi_C$$

Preuve:

$M - XI_n = \begin{pmatrix} XI_p - A & -B \\ 0 & XI_q - C \end{pmatrix}$ et le calcul du déterminant d'une matrice triangulaire par blocs donne le résultat.

Conséquence 1

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, F un sous-espace de E stable par u et $v \in \mathcal{L}(F)$ l'endomorphisme de F induit par u . Alors χ_u divise χ_v .

Preuve:

Soit $\mathcal{B}_F = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F complétée en $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, \dots, e_n)$ base de E .

Alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$ avec $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(v) \in M_p(\mathbb{K})$, donc

$$\begin{aligned} \chi_u(X) &= \det \begin{pmatrix} XI_p - A & -B \\ 0 & XI_{n-p} - C \end{pmatrix} \\ &= \det(XI_p - A) \det(XI_{n-p} - C) \end{aligned}$$

soit :

$$\chi_u(X) = \chi_v(X) \det(XI_{n-p} - C)$$

Propriété 28

Si u stabilise les sous-espaces d'une famille $(E_i, \dots, E_r)$ telle que $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_r$, le polynôme caractéristique de u est donnée par :

$$\chi_u = \chi_{u_1} \cdots \chi_{u_r}$$

où u_i est l'endomorphisme induit par u sur E_i quel que soit $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$.

III.3 Multiplicité d'une valeur propre**Définition 11: Multiplicité d'une valeur propre**

L'ordre de multiplicité d'une racine λ de χ_M est appelé multiplicité de la valeur propre λ de M ; elle est noté $m(\lambda)$.

Remarque :

Si χ_M est scindé et si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les valeurs propres deux à deux distinctes de M , le polynôme caractéristique de M s'écrit

$$\chi_M = \prod_{j=1}^p (X - \lambda_j)^{m(\lambda_j)} = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(M)} (X - \lambda)^{m(\lambda)}$$

et la somme des multiplicités des valeurs propres de M est égale à son ordre.

Propriété 29: Dimension d'un sous-espace vectoriel propre

Soient λ une valeur propre de M , $m(\lambda)$ sa multiplicité et $q(\lambda)$ la dimension du sous-espace propre associé ; alors

$$1 \leq q(\lambda) = \dim E_\lambda(M) = n - \text{rg}((M - \lambda I_n)) \leq m(\lambda)$$

Preuve:

Appelons u l'endomorphisme de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ associé à M .

Pour $\lambda \in \text{Sp}(u) = \text{Sp}(M)$, on a

- $E_u(\lambda) = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_{\mathbb{E}}) \neq \{0\}$, donc $q(\lambda) \geq 1$;
- $\dim E_\lambda(u) = \dim \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_{\mathbb{E}}) = n - \text{rg}((u - \lambda \text{Id}_{\mathbb{E}}))$;
- $E_\lambda(u)$ est un sous-espace stable par u ; dans une base adaptée, la matrice de u est triangulaire (supérieure) par blocs, soit

$$N = \begin{pmatrix} \lambda I_{q(\lambda)} & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

donc $\chi_N = \chi_u = \chi_M = (X - \lambda)^{q(\lambda)} \chi_C$; ceci montre que $q(\lambda) \leq m(\lambda)$.

Exemple: Les endomorphismes du rang 1

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme du rang 1 où E est de dimension finie $n \geq 2$. Déterminons χ_u

0 est valeur propre de u et la dimension de l'espace propre associé à 0 est égale à $n - 1$. Ainsi, on en déduit que X^{n-1} divise le polynôme caractéristique de u . Ce polynôme étant de degré n et étant divisible par X^{n-1} , il se factorise en $X^{n-1}(X - \lambda)$. Par identification $\lambda = \text{Tr}(u)$, donc

$$\chi_u = X^{n-1}(X - \text{Tr}(u))$$

Corollaire 7 (Cas des valeurs propres simples)

Le sous-espace propre associé à une valeur propre simple est une droite vectorielle.

Preuve:

Les inégalités $1 \leq q(\lambda) \leq m(\lambda) = 1$ donnent le résultat.

IV Diagonalisation

On suppose ici que E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et u un endomorphisme de E .

IV.1 Endomorphisme diagonalisable

Définition 12

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit diagonalisable lorsqu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Une telle base $\mathcal{B}$ est appelée base de diagonalisation de u .

Exemple: Identité

Id_E est diagonalisable, et n'importe qu'elle base de E est base de diagonalisation

Exemple: Projecteur

Les projections vectorielles sont diagonalisables.

Soit p un projecteur de E et $\mathcal{B}$ une base adaptée à la décomposition $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$, alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O_{n-r} \end{pmatrix}$$

Avec $r = \text{rg}(p)$

Exemple: Symétrie

Les symétries vectorielles sont diagonalisables.

Soit s une syétrie de E et $\mathcal{B}$ une base adaptée à la décomposition

$$E = \text{Ker}(s - id_E) \oplus \text{Ker}(s + id_E)$$

Alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & -I_{n-r} \end{pmatrix}$$

Avec $r = \dim \text{Ker}(s - id_E)$

IV.2 Matrices diagonalisables

Définition 13

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On dit que la matrice A est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

Propriété 30

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors A est diagonalisable, si et seulement si l'endomorphisme canoniquement associé est diagonalisable.

Preuve:

Soit u l'endomorphisme de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ canoniquement associé à A . La matrice de u dans la base canonique $\mathcal{B}_c$ de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ est A

$\Rightarrow$ A est diagonalisable, alors il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$. Si l'on note $\mathcal{B}'$ la base de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ telle que la matrice de passage $\mathcal{B}_c$ à $\mathcal{B}'$ soit égale à P , la matrice de u dans $\mathcal{B}'$ est $P^{-1}AP$, c'est-à-dire D . On a trouvé une base dans laquelle la matrice de u est diagonale. Cela prouve que u est diagonalisable.

$\Leftarrow$ Si u est diagonalisable, alors il existe une base $\mathcal{B}'$ de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de u , ou encore $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$ est diagonale qui est semblable à A

IV.3 Caractérisation de diagonalisation

Propriété 31

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie ; les propositions suivantes sont équivalentes :

1. u est diagonalisable.
2. Il existe une base de E formée de vecteurs propres de u .
3. E est la somme des sous-espaces propres, c'est-à-dire,

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_{\lambda}(u)$$

4. La somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la dimension de E , c'est-à-dire,

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim E_{\lambda}(u) = \dim E.$$

5. Le polynôme caractéristique de u est scindé, et, pour toute valeur propre de u , la multiplicité est égale à la dimension du sous-espace propre associé.

On a un critère analogue pour $A \in M_n(\mathbb{K})$

Preuve:

- 1) $\Rightarrow$ 2) Supposons u diagonalisable et considérons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de diagonalisation de u . La matrice de u dans $\mathcal{B}$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $u(e_i) = \lambda_i e_i$ avec $e_i \neq 0$, donc e_i est un vecteur propre de u . La famille $\mathcal{B}$ est donc une base de vecteurs propres de u .

- 2) $\Rightarrow$ 3) Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base constituée de vecteurs propres de u . Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, le vecteur e_i est propre de u , donc $e_i \in \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_{\lambda}(u)$, puis $E \subset \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_{\lambda}(u)$ et enfin

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_{\lambda}(u)$$

- 3) $\Rightarrow$ 4) $\dim E = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim E_{\lambda}(u)$

- 4) $\Rightarrow$ 5) Le polynôme $\prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)^{q(\lambda)}$ divise le polynôme caractéristique χ_u et il est de degré $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} q(\lambda) =$

$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim E_{\lambda}(u) = \dim E = n$. Donc les deux polynômes unitaires $\prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)^{q(\lambda)}$ et χ_u sont associés et, par suite, ils sont égaux. En particulier χ_u est scindé et $m(\lambda) = q(\lambda)$

- 5) $\Rightarrow$ 1) On a $\dim E = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim E_{\lambda}(u)$. Une famille formée par concaténation de bases des espaces $E_{\lambda}(u)$ est une famille libre formée de $\dim E$ vecteurs, c'est donc une base de vecteurs propres.

Propriété 32

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$; les propositions suivantes sont équivalentes :

1. A est diagonalisable.
2. Il existe une base de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ formée de vecteurs propres de A .
3. $M_{n,1}(\mathbb{K})$ est la somme des sous-espaces propres, c'est-à-dire,

$$M_{n,1}(\mathbb{K}) = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_{\lambda}(A)$$

4. La somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la dimension de E , c'est-à-dire,

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim E_{\lambda}(A) = \dim M_{n,1}(\mathbb{K}) = n$$

5. Le polynôme caractéristique de A est scindé, et, pour toute valeur propre de A , la multiplicité est égale à la dimension du sous-espace propre associé.

Exemple

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ base de E tel que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Étudions la diagonalisation de u ?

On a $\chi_u = X^{n-1}(X-1)$, qui est un polynôme scindé, donc $\text{Sp}(u) = \{0, 1\}$, avec $m(0) = n-1$ et $m(1) = 1$. Les colonnes de $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ sont identiques et $u \neq 0$, donc $\text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)) = 1$ puis $\dim E_0(u) = \dim \text{Ker } u = n-1$ et comme $\dim E_n(u) = 1$. Ainsi u est diagonalisable et plus précisément il existe une base $\mathcal{B}'$ telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} & & 0 \\ & (0) & \vdots \\ & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$$

Propriété 33: Cas des valeurs propres simples

Si $u \in \mathcal{L}(E)$ possède $n = \dim E$ valeurs propres distinctes alors u est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

Preuve:

Dans ce cas, $m(\lambda) = \dim E_{\lambda}(u) = 1$ pour toute valeur propre λ de u .

Exemple

Soit $u : \mathbb{K}_n[X] \rightarrow \mathbb{K}_n[X], P \mapsto 2P + (X-1)P'$.

Étudions la diagonalisation de u

Soit $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$

- u est bien définie, car si $\deg P \leq n$, alors $\deg(X-1)P' \leq n$
- Calculons de X_u . On a $u(1) = 2$ et pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$u(X^k) = 2X^k + kX^{k-1}(X-1) = (2+k)X^k - kX^{k-1}$$

donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & (0) \\ & 3 & \ddots & & \\ & & \ddots & -k & \\ & & & 2+k & \ddots \\ (0) & & & & \ddots & -n \\ & & & & & 2+n \end{pmatrix}$$

Alors $X_u = \prod_{k=0}^n (X - (2+k))$ est scindé à racines simples, donc u est diagonalisable

IV.4 Diagonalisation effective

Exemple: Racines simples

Diagonaliser la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

On donnera aussi la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres.

► **Le polynôme caractéristique de A ?**

Par définition

$$\chi_A = \det(XI_n - A) = \begin{vmatrix} X & -2 & 1 \\ -3 & X+2 & 0 \\ 2 & -2 & X-1 \end{vmatrix}$$

Avec les opérations $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$, puis $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, on obtient

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & -2 & 1 \\ X-1 & X+2 & 0 \\ X-1 & -2 & X-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-1 & -2 & 1 \\ 0 & X+4 & -1 \\ 0 & 0 & X-2 \end{vmatrix} = (X-1)(X-2)(X+4)$$

Il est scindé à racines simples à savoir 1, 2 et -4, ce qui assure que A est diagonalisable.

► **Sous-espace propre associé à 1 ?**

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{K})$, On résout $AX = X$, c'est-à-dire le système :

$$\begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ 3x - 3y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases} \iff x = y = z$$

Donc $E_1(A) = \text{Vect}(c_1)$, avec $c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

► **Sous-espace propre associé à 2 ?**

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{K})$, On résout $AX = 2X$, c'est-à-dire le système :

$$\begin{cases} -2x + 2y - z = 0 \\ 3x - 4y = 0 \\ -2x + 2y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 4\alpha \\ y = 3\alpha \\ z = -2\alpha \end{cases} \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{K}$$

Donc $E_2(A) = \text{Vect}(c_2)$, avec $c_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

► **Sous-espace propre associé à -4 ?**

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{K})$, On résout $AX = -4X$, c'est-à-dire le système :

$$\begin{cases} 4x + 2y - z = 0 \\ 3x + 2y = 0 \\ -2x + 2y + 5z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2\alpha \\ y = -3\alpha \\ z = 2\alpha \end{cases} \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{K}$$

Donc $E_{-4}(A) = \text{Vect}(c_3)$, avec $c_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

► Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique à la base (c_1, c_2, c_3) , alors

$$P^{-1}AP = \mathbf{diag}(1, 2, -4)$$

Exemple: Racines multiples

Diagonaliser la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

On donnera aussi la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres.

► Le polynôme caractéristique de A ?

Par définition

$$\chi_A = \det(XI_n - A) = \begin{vmatrix} X & -3 & -2 \\ 2 & X-5 & -2 \\ -2 & 3 & X \end{vmatrix}$$

Avec les opérations $L_1 \leftarrow L_1 + C_3$, $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$, $C_3 \leftarrow C_3 - C_2$, puis $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$, on obtient

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-2 & 0 & X-2 \\ 2 & X-5 & -2 \\ -2 & 3 & X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-2 & 0 & 0 \\ 2 & X-5 & -4 \\ -2 & 3 & X+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-2 & 0 & 0 \\ 2 & X-5 & 1-X \\ -2 & 3 & X-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-2 & 0 & 0 \\ 2 & X-2 & 0 \\ -2 & 3 & X-1 \end{vmatrix}$$

Donc $\chi_A = (X-1)(X-2)^2$, qui est scindé de racines 1 et 2.

► Sous-espace propre associé à 1 ?

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{K})$, On résout $AX = X$, c'est-à-dire le système :

$$\begin{cases} -x + 3y + 2z = 0 \\ -2x + 4y + 2z = 0 \\ 2x - 3y - z = 0 \end{cases} \iff x = y = -z$$

Donc $E_1(A) = \mathbf{Vect}(c_1)$, avec $c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

► Sous-espace propre associé à 2 ?

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{K})$, On résout $AX = 2X$, c'est-à-dire le système :

$$-2x + 3y + 2z = 0 \iff \begin{cases} x = 3\alpha + 3\beta \\ y = 2\alpha \\ z = -3\beta \end{cases} \quad \text{où } \alpha, \beta \in \mathbb{K}$$

Donc $E_2(A) = \mathbf{Vect}(c_2, c_3)$, avec $c_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $c_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

► Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique à la base (c_1, c_2, c_3) , alors

$$P^{-1}AP = \mathbf{diag}(1, 2, 2)$$

V Trigonalisation

E un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{K}$ et u un endomorphisme de E .

V.1 Définitions et propriétés

Définition 14

On dit que u est **trigonalisable** s'il existe une base B de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure

Définition 15

On dit que $A \in M_n(\mathbb{K})$ est **trigonalisable** si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure

Propriété 34

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors A est diagonalisable, si et seulement si l'endomorphisme canoniquement associé est diagonalisable.

Preuve:

Soit u l'endomorphisme de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ canoniquement associé à A . La matrice de u dans la base canonique $\mathcal{B}_c$ de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ est A

$\Rightarrow$ A est trigonalisable, alors il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et une matrice T triangulaire supérieure telles que $A = PDP^{-1}$. Si l'on note $\mathcal{B}'$ la base de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ telle que la matrice de passage $\mathcal{B}_c$ à $\mathcal{B}'$ soit égale à P , la matrice de u dans $\mathcal{B}'$ est $P^{-1}AP$, c'est-à-dire T . On a trouvé une base dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure. Cela prouve que u est trigonalisable.

$\Leftarrow$ Si u est trigonalisable, alors il existe une base $\mathcal{B}'$ de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$ est triangulaire supérieure qui est semblable à A

Propriété 35

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. u soit trigonalisable
2. son polynôme caractéristique χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$

On a un critère analogue pour $A \in M_n(\mathbb{K})$

Preuve:

1 $\Rightarrow$ 2) Si u est trigonalisable, donc il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est triangulaire supérieure, soit

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ (0) & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Donc $\chi_u = \prod_{i=1}^n (X - a_{ii})$ est scindé sur $\mathbb{K}$

2 $\Rightarrow$ 1) Par récurrence sur n

► Pour $n = 1$, c'est immédiat car une matrice de taille 1 est considérée triangulaire supérieure.

► Soit $n \geq 1$. Supposons la propriété établie au rang n .

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension $n + 1$. On suppose χ_u scindé. Celui-ci possède donc une racine λ et celle-ci est alors valeur propre de u . Soit e un vecteur propre associé. Considérons $D = \text{Vect}(e)$ et H un sous-espace vectoriel supplémentaire de D de sorte que $D \oplus H = E$. Considérons $(e_1, \dots, e_n)$ une base de H . La matrice de u dans la base $\mathcal{B} = (e, e_1, \dots, e_n)$ est de la forme

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & L \\ \hline 0 & B \end{array} \right) \quad \text{avec } L \in M_{1,n}(\mathbb{K}) \text{ et } B \in M_n(\mathbb{K})$$

On a $\chi_u = (\lambda - X)\chi_B$ et χ_u est scindé, donc χ_B est scindé. Par hypothèse de récurrence, $B \in M_n(\mathbb{K})$, la matrice B est trigonalisable, soit $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = QTQ^{-1}$.

Posons $P = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{array} \right) \in M_{n+1}(\mathbb{K})$. On a $P^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{array} \right)$, ainsi

$$\begin{aligned} PAP^{-1} &= \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} \lambda & L \\ 0 & B \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} \lambda & LQ^{-1} \\ 0 & T \end{array} \right) \in T_{n+1}^+(\mathbb{K}) \end{aligned}$$

Remarque :

Tout endomorphisme diagonalisable est trigonalisable

Corollaire 8 1. Tout endomorphisme du $\mathbb{C}$ -espace vectoriel E est trigonalisable.
2. Toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

Preuve:

Car de polynôme caractéristique scindé.

Corollaire 9

Soit F un sous-espace vectoriel stable par u . On suppose que u est trigonalisable, alors u_F est trigonalisable.

Preuve:

L'endomorphisme u est trigonalisable donc χ_u est scindé. Or $\chi_v \mid \chi_u$ donc π_v est scindé d'où v est trigonalisable.

V.2 Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes

Définition 16

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit nilpotent s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u^p = 0$.

Au quel cas le plus petit p vérifiant cette identité est appelé indice de nilpotence de u

Définition 17

Une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est dite nilpotente si une de ces puissances est nulle

Au quel cas le plus petit p vérifiant cette identité est appelé indice de nilpotence .

Propriété 36

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base de E . Alors

u est nilpotent si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est nilpotente.

Preuve:

Il suffit de voir $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)^n = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u^n)$

Propriété 37

Soit A une matrice triangulaire supérieure stricte de $M_n(\mathbb{K})$. Alors A est nilpotente

Preuve:

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Posons $V_0 = \{0\}$ et $V_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Puisque A est triangulaire supérieure stricte, alors pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f(V_k) \subset V_{k-1}$. Par récurrence sur $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on montre que $f^k(V_n) \subset V_{n-k}$

► Pour $k = 0$, rien à démontrer

► Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Par hypothèse $f^k(V_n) \subset V_{n-k}$, donc $f^{k+1}(V_n) \subset f(V_{n-k}) \subset V_{n-k-1}$

Récurrence achevée. En particulier $f^n(V_n) \subset V_0 = \{0\}$, donc $f^n = 0$. Ce qui montre que f est nilpotent, puis A est nilpotente

Exemple: Matrice de Jordan

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$$

La matrice A est nilpotente d'indice n .

A est triangulaire supérieure stricte, donc, $A^n = 0$, elle est nilpotente. Si f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, alors $\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $f^k(e_n) = e_{n-k}$. En particulier $f^{n-1}(e_n) = e_1 \neq 0$, donc $f^{n-1} \neq 0$. Donc l'indice de A vaut n .

Théorème 4

u est nilpotent si et seulement si u est trigonalisable et $\text{Sp}(u) = \{0\}$.

Preuve:

$\Rightarrow$) Raisonnons matriciellement. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, montrons que $A \in M_n(\mathbb{K})$ est nilpotente, alors A est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte.

► Cas $n = 1$: Une matrice nilpotente de taille 1 est nécessairement nulle.

► Supposons la propriété établie au rang $n \geq 1$.

La matrice A ne peut être inversible et donc $\text{Ker} A \neq \{0\}$. Soit e_1 un vecteur non nul de $\text{Ker} A$. On complète ce vecteur e_1 en une base de $\mathbb{K}^{n+1}$ de la forme $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_{n+1})$. La matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à A dans la base $\mathcal{C}$ est de la forme

$$B = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & A' \end{pmatrix} \text{ avec } A' \in M_n(\mathbb{K})$$

La matrice B est semblable à A et donc elle aussi nilpotente. On en déduit que le bloc A' est nilpotent. Par hypothèse de récurrence, il existe $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $Q^{-1}A'Q$ soit triangulaire supérieure stricte. Formons alors

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$$

Par produit par blocs

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & Q^{-1}A'Q \end{pmatrix}$$

est triangulaire supérieure stricte.

Finalement, A est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte.

Récurrence établie.

$\Leftarrow$) Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est triangulaire et elle a pour coefficients diagonaux les valeurs propres de u , elle est donc triangulaire supérieure stricte et par conséquent nilpotente.

Corollaire 10

L'indice d'un endomorphisme nilpotent est au plus égal à la dimension de l'espace.

Exemple

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'indice p .

L'endomorphisme est inversible et son inverse est : $\sum_{k=1}^{p-1} u^k$.

Il suffit pour le voir de développer le produit $(1-u) \sum_{k=1}^{p-1} u^k$

V.3 Trigonalisation effective

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ tel que χ_A soit scindé dans $\mathbb{K}[X]$. On peut écrire

$$\chi_A = \prod_{k=1}^m (X - \lambda_k)^{a_k}$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ les valeurs propres deux à deux distinctes et $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ leurs multiplicités respectives. On admet qu'il est possible de rendre la matrice A semblable à une matrice diagonale par blocs de la forme

$$\begin{pmatrix} T_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & T_m \end{pmatrix}$$

avec $T_k \in M_{\alpha_k}(\mathbb{K})$ de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_k & \varepsilon_1 & & (0) \\ & \lambda_k & \ddots & \\ & & \ddots & \varepsilon_{\alpha_k-1} \\ (0) & & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

où $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{\alpha_k-1} \in \{0, 1\}$

Exemple: Racines doubles

Trigonaliser la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

On donnera aussi la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres.

► Le polynôme caractéristique de A ?

Par définition

$$\chi_A = \det(XI_n - A) = \begin{vmatrix} X+1 & 3 & 1 \\ 1 & X-1 & -1 \\ 2 & 3 & X \end{vmatrix}$$

Avec les opérations $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$ et $C_3 \leftarrow C_3 + C_1$, on obtient

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & 0 & 1-X \\ 1 & X-1 & -1 \\ 2 & 3 & X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-1 & 0 & 0 \\ 1 & X-1 & 0 \\ 2 & 3 & X+2 \end{vmatrix} = (X-1)^2(X+2)$$

$\text{Sp}(A) = \{1, -2\}$. 1 est valeur propre double et -2 est valeur propre simple, ce qui assure que A est diagonalisable.

► Sous-espace propre associé à -2 ?

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{K})$, On résout $AX = -2X$, c'est-à-dire le système :

$$\begin{cases} x - 3y - z = 0 \\ -x + 3y + z = 0 \\ -2x - 3y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$$

Donc $E_{-2}(A) = \text{Vect}(C_1)$, avec $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

► Sous-espace propre associé à 1 ?

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{K})$, On résout $AX = X$, c'est-à-dire le système :

$$\begin{cases} -2x - 3y - z = 0 \\ -x + z = 0 \\ -2x - 3y - z = 0 \end{cases} \iff x = -y = z$$

Donc $E_1(A) = \text{Vect}(C_2)$, avec $C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a $\dim E_1(A) = 1 < m(1) = 2$, donc la matrice A n'est pas diagonalisable, cependant elle est trigonalisable,

► **Complétion de la famille (C_1, C_2) ?**

La famille (C_1, C_2) est libre, donc elle est peut-être complétée en une base (C_1, C_2, C_3) de $M_{3,1}(\mathbb{K})$ et

pour des raisons pratiques, on cherche C_3 tel que $AC_3 = C_3 + C_2$. Notons alors $C_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{K})$,

alors le système $AC_3 = C_3 + C_2$ équivaut à

$$\begin{cases} -x - 3y - z &= 1 \\ -x + z &= -1 \\ -2x - 3y - z &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 3y + z &= -1 \\ 3y + 2z &= -2 \end{cases}$$

et, après résolution de l'équation $AC_3 = C_3 + C_2$, donne $C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

► Posons $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{R})$. On a

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple: Racines triples

Diagonaliser la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On donnera aussi la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres.

$\chi_A = (X + 1)^3$ et $\text{Sp}(A) = \{-1\}$. La matrice A est trigonalisable sans être diagonalisable car $A \neq -I_3$. On a

$E_{-1}(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ qui est de dimension 1. Nous cherchons des colonnes C_1, C_2, C_3 vérifiant $AC_1 = -C_1$, $AC_2 = -C_2 + C_1$ et $AC_3 = -C_3 + C_2$.

Prenons $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Après résolution de l'équation matricielle $(A + I_3)C_2 = C_1$, la colonne $C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ convient.

Après résolution de l'équation matricielle $(A + I_3)C_3 = C_2$, la colonne $C_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ convient.

Finalement, pour

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{R})$$

On a

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

VI Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice

Si u est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E et $A \in M_n(\mathbb{K})$

VI.1 Polynômes d'un endomorphisme ou d'une matrice

Définition 18: Polynôme d'un endomorphisme, d'une matrice

Si $u \in \mathcal{L}(E)$, $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $P = \sum_{k=0}^m a_k X^k$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$, on définit

1. $P(u) = \sum_{k=0}^m a_k u^k \in \mathcal{L}(E)$. $P(u)$ est un polynôme de l'endomorphisme u .
2. $P(M) = \sum_{k=0}^m a_k A^k \in M_n(\mathbb{K})$. $P(M)$ est un polynôme de la matrice M .

Exemple: Matrice diagonale

Si $M = \mathbf{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in M_n(\mathbb{K})$, alors pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$,

$$P(M) = \mathbf{diag}(P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n))$$

Exemple: Matrice diagonale par blocs

Soit

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & & (0) \\ & M_2 & \\ & & \ddots \\ (0) & & & M_r \end{pmatrix}$$

Avec les M_i sont des matrices carrées, alors pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$,

$$P(M) = \begin{pmatrix} P(M_1) & & (0) \\ & P(M_2) & \\ & & \ddots \\ (0) & & & P(M_r) \end{pmatrix}$$

Propriété 38: Règles de calcul, cas des endomorphismes

L'application $\varphi_u : P \in \mathbb{K}[X] \mapsto P(u) \in \mathcal{L}(E)$ est un morphisme d'algèbre ; en particulier

$$\forall u \in \mathcal{L}(E), \forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2, \quad (P \times Q)(u) = P(u) \circ Q(u)$$

Son image, notée $\mathbb{K}[u]$, est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$, appelée sous-algèbre engendrée par u . C'est la plus petite sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ contenant u .

Preuve:

Soit $P = \sum_{i=0}^p a_i X^i$ et $Q = \sum_{i=0}^q b_i X^i$. Quitte à considérer $r = \max(p, q)$ et compléter par des facteurs nuls, on peut supposer que $p = q = r$.

► On a $\varphi_u(1) = \text{Id}_E$

► Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$\begin{aligned} \varphi_u(\lambda P + Q) &= \sum_{i=0}^r (\lambda a_i + b_i) u^i \\ &= \lambda \sum_{i=0}^r a_i u^i + \sum_{i=0}^r b_i u^i \\ &= \lambda \varphi_u(P) + \varphi_u(Q) \end{aligned}$$

Quant à l'égalité $\varphi_u(PQ) = \varphi_u(P) \circ \varphi_u(Q)$, on commence par la démontrer pour $Q = X^k$:

$$\varphi_u(PX^k) = \sum_i a_i u^{i+k} = \left(\sum_i a_i u^i \right) \circ u^k = \varphi_u(P) \circ \varphi_u(X^k)$$

puis dans le cas général $Q = \sum_k b_k X^k$ en utilisant la linéarité de φ_u :

$$\begin{aligned} \varphi_u(PQ) &= \varphi_u\left(\sum_k b_k PX^k\right) = \sum_k b_k \varphi_u(PX^k) = \sum_k b_k \varphi_u(P) \circ \varphi_u(X^k) \\ &= \varphi_u(P) \circ \left(\sum_k b_k \varphi_u(X^k)\right) = \varphi_u(P) \circ \varphi_u(Q) \end{aligned}$$

L'image $\mathbb{K}[u]$ de φ_u est clairement la plus petite sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ contenant u .

Propriété 39: Règles de calcul, cas des matrices

L'application $\varphi_M : P \in \mathbb{K}[X] \mapsto P(M) \in M_n(\mathbb{K})$ est un morphisme d'algèbre ; en particulier

$$\forall M \in M_n(\mathbb{K}), \forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2, \quad (PQ)(M) = P(M)Q(M)$$

Preuve:

Même démonstration que précédemment.

Propriété 40: Matrice d'un polynôme d'endomorphisme

Si A est la matrice de u dans une base $\mathcal{B}$ de E , alors $P(A)$ est celle de $P(u)$ dans $\mathcal{B}$.

Propriété 41

Si F est un sous-espace de E stable par u , alors F est stable par $P(u)$ et, en notant u_F l'endomorphisme induit, on a :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], \quad P(u)_F = P(u_F)$$

Preuve:

L'ensemble $\mathcal{L}_F(E)$ des endomorphismes laissant F stable est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ contenant u et donc $\mathbb{K}[u]$.

On obtient $P(u)_F = P(u_F)$ en remarquant que $v \mapsto v_F$ est un morphisme de $\mathbb{K}$ -algèbres de $\mathcal{L}_F(E)$ vers $\mathcal{L}(F)$

Propriété 42: u -stabilité de $\text{Ker}P(u)$ et de $\text{Im}P(u)$

Pour tout polynôme P à coefficients dans $\mathbb{K}$ et tout endomorphisme u de E , $\text{Im}P(u)$ et $\text{Ker}P(u)$ sont stables par u .

Preuve:

Ce sont en effet les sous-espaces image et noyau d'un endomorphisme commutant avec u .

Propriété 43: Valeurs propres d'un polynôme d'endomorphisme

Si x est un vecteur propre de u associé à λ , pour tout polynôme P , x est un vecteur propre de $P(u)$ associé à $P(\lambda)$.

Preuve:

x est non nul et

$$u(x) = \lambda x \Rightarrow u^k(x) = \lambda^k x \text{ (par récurrence sur } k)$$

Si $P = \sum_{k=0}^m a_k X^k$, on a :

$$P(u)(x) = \left(\sum_{k=0}^m a_k u^k \right)(x) = \sum_{k=0}^m a_k u^k(x) = \sum_{k=0}^m a_k \lambda^k x = P(\lambda)x$$

VI.2 Idéal annulateur et Polynôme minimal

Définition 19

- Le noyau $\{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u) = 0\}$ du morphisme d'évaluation $P \mapsto P(u)$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$. On l'appelle l'idéal annulateur de u .
- On appelle polynôme annulateur de u tout élément de l'idéal annulateur.

Même définition pour les matrices

Preuve:

C'est le noyau du morphisme d'évaluation φ_u . C'est donc un idéal de $\mathbb{K}[X]$.

Propriété 44

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est de dimension finie

1. L'idéal annulateur de u est non réduit à $\{0\}$ dont le générateur unitaire est appelé le polynôme minimal

de u et noté π_u ;

2. Si $d = \deg(\pi_u)$, alors

(a) $d \geq 1$

(b) $(1, u, \dots, u^{d-1})$ une base de $\mathbb{K}[u]$.

(c) $\dim \mathbb{K}[u] = \deg \pi_u = d$

Preuve:

1. Si φ_u n'est pas injectif, le noyau de φ_u est idéal non nul de $\mathbb{K}[X]$, donc il existe un unique $\pi_u \in \mathbb{K}[X]$ unitaire tel que $\text{Ker} \varphi = \pi_u \cdot \mathbb{K}[X]$.

2. Soit $d = \deg(\pi_u)$.

(a) Sinon $\pi_u = 1$ et par définition $\text{Id}_E = \pi_u(u) = 0$.

(b) ► Montrons que la famille $(\text{Id}_E, u, u^2, \dots, u^{d-1})$ est libre de $\mathbb{K}[u]$.

Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{d-1}) \in \mathbb{K}^d$ tel que $\sum_{k=0}^{d-1} \lambda_k u^k = 0$. Le polynôme $P = \sum_{k=0}^{d-1} \lambda_k X^k$ est annulateur de u , donc $\pi_u \mid P$.

Mais $\deg P < \deg \pi_u$ d'où $P = 0$, puis $\forall i \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket, \lambda_i = 0$

► Montrons que la famille $(\text{Id}_E, u, u^2, \dots, u^{d-1})$ est génératrice de $\mathbb{K}[u]$.

Soit $x \in \mathbb{K}[u]$, alors il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $x = P(u)$. La division euclidienne de P par π_u montre qu'il existe $Q, R \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$\begin{cases} P = Q \cdot \pi_u + R \\ \deg R < \deg \pi_u \end{cases}$$

D'où

$$\begin{aligned} x &= P(u) = \underbrace{Q(u)\pi_u(u)}_{=0} + R(u) \\ &= R(u) \in \text{Vect}(\text{Id}_E, u, \dots, u^{d-1}) \end{aligned}$$

la famille $(\text{Id}_E, u, \dots, u^{d-1})$ est génératrice de $\mathbb{K}[u]$

Donc la famille $(\text{Id}_E, u, \dots, u^{d-1})$ est une base de $\mathbb{K}[u]$

(c) D'après la question précédente $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[u] = d$.

Propriété 45

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$

1. L'idéal annulateur de A est non réduit à $\{0\}$ dont le générateur unitaire est appelé le polynôme minimal de A et noté π_A ;

2. Si $d = \deg(\pi_A)$, alors

(a) $d \geq 1$

(b) $(1, A, \dots, A^{d-1})$ une base de $\mathbb{K}[A]$.

(c) $\dim \mathbb{K}[A] = \deg \pi_A = d$

Corollaire 11

Si A est la matrice de $u \in \mathcal{L}(E)$ dans la base $\mathcal{B}$ de E , alors $\pi_u = \pi_A$

Preuve:

La relation : $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(P(u)) = P(A)$ montre que les idéaux annulateurs de u et A sont égaux.

Propriété 46

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est de dim finie et F un sous-espace vectoriel de E stable par u , alors $\pi_{u_F} \mid \pi_u$

Preuve:

La relation $P(u_F) = P(u)_F$ montre que l'idéal annulateur de u est contenu dans l'idéal annulateur de u_F . Ainsi $\pi_u(u_F) = 0$ et π_{u_F} divise π_u .

Propriété 47: Valeur propre et polynôme annulateur

Soit P est un polynôme annulateur pour u , alors

$$\text{Sp}(u) \subset \text{Rac}(P) \text{ où } \text{Rac}(P) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid P(\lambda) = 0\}$$

Avec égalité si $P = \pi_u$

Preuve:

- Si λ est une valeur propre de u , $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Or, 0 est la seule valeur propre de $0_{\mathcal{L}(E)}$, d'où $P(\lambda) = 0$ et λ est racine de P .
- Soit $\lambda \in \text{Rac}(\pi_u)$, donc $\pi_u(\lambda) = 0$, donc $(X - \lambda)$ divise π_u dans $\mathbb{K}[X]$. On écrit alors $\pi_u = (X - \lambda)Q$. Mais $\pi_u(u) = 0$, donc $(u - \lambda \text{Id}_E) \circ Q(u) = 0$, ceci permet d'écrire $\text{Im} Q(u) \subset \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)$.
Si $\lambda \notin \text{Sp}(u)$, alors $\text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E) = \{0\}$, donc $\text{Im} Q(u) = \{0\}$, donc l'endomorphisme $Q(u)$ est nul. La minimalité de π_u donne π_u divise Q et comme Q divise π , les deux polynômes sont associés. Absurde

Exemple

Soit u un projecteur de E . Déterminons $\text{Sp}(u)$?

On a $u^2 = u$, donc $u^2 - u = 0$. Le polynôme $P = X^2 - X$ est annulateur de u dont les racines sont 0 et 1, donc $\text{Sp}(u) \subset \{0, 1\}$. Réciproquement

- $0 \in \text{Sp}(u)$?

$$\begin{aligned} 0 \in \text{Sp}(u) &\iff \exists x \in E \setminus \{0\}, \quad u(x) = 0 \\ &\iff \text{Ker} u \neq \{0\} \\ &\iff \text{Im}(u) \neq E \iff u \neq \text{Id}_E \end{aligned}$$

- $1 \in \text{Sp}(u)$?

$$\begin{aligned} 1 \in \text{Sp}(u) &\iff \exists x \in E \setminus \{0\}, \quad u(x) = x \\ &\iff \exists x \in E \setminus \{0\}, \quad u(x) - x = 0 \\ &\iff \text{Ker}(u - \text{Id}_E) \neq \{0\} \\ &\iff \text{Ker}(u) \neq E \iff u \neq 0 \end{aligned}$$

Bref

- ▶ $\text{Sp}(u) = \{0, 1\} \iff u \neq \text{Id}_E$ et $u \neq 0$
- ▶ $\text{Sp}(u) = \{1\} \iff u = \text{Id}_E$
- ▶ $\text{Sp}(u) = \{0\} \iff u = 0$

VI.3 Théorème de Cayley Hamilton**Théorème 5: Cayley-Hamilton**

Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme ou d'une matrice est un polynôme annulateur de cet endomorphisme ou de cette matrice, soit :

$$\chi_M(M) = 0_{M_n(\mathbb{K})} \quad \text{et} \quad \chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

Preuve:**Non exigible**

Soit $x \in E$. Notons F le sous-espace $\text{Vect}(u^k(x), k \in \mathbb{N})$ et P le polynôme annulateur de x .

On sait que F est stable par u et que dans une base convenable l'endomorphisme $u|_F$ induit par u sur F a comme matrice la matrice compagnon de P . Son polynôme caractéristique vaut donc P .

Le sous-espace F étant stable par il existe un polynôme M tel que l'on ait $\chi_u = \chi_{u|_F} M$. On obtient alors $\chi_u = PM$ et :

$$\chi_u(u)(x) = (M(u) \circ P(u))(x) = 0$$

puisque $P(u)(x) = 0$. Cela valant pour tout x , l'endomorphisme $\chi_u(u)$ est nul.

Conséquence 2

π_u et χ_u ont mêmes facteurs irréductibles

Preuve:

π_u divise χ_u et $\text{Rac}(\pi_u) = \text{Rac}(\chi_u) = \text{Sp}(u)$

Conséquence 3

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est de dimension finie n et $A \in M_n(\mathbb{K})$, alors

1. $\pi_u \mid \chi_u$, donc $\deg \pi_u \leq n$
2. $\mathbb{K}[u] = \text{Vect}(\text{Id}_E, u, \dots, u^{n-1})$ et $\mathbb{K}[A] = \text{Vect}(I_n, A, \dots, A^{n-1})$
3. $\dim \mathbb{K}[u] \leq n$ et $\dim \mathbb{K}[A] \leq n$

Exemple: Calcul d'une puissance

Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculons A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$

On a $\chi_A = (X-1)^2(X-4)$. Par division euclidienne il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n \in \mathbb{K}$ tels que :

$$P(X) = X^n = (X-1)^2(X-4)Q + \alpha_n X^2 + \beta_n X + \gamma_n$$

Le calcul de $P(1)$, $P(4)$ et de $P'(1)$, donne le système

$$\begin{cases} \alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 2^n \\ 16\alpha_n + 4\beta_n + \gamma_n = 4^n \\ 2\alpha_n + \beta_n = n \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_n = -\frac{1}{3}n + \frac{1}{9}4^n - \frac{1}{9} \\ \beta_n = \frac{5}{3}n - \frac{2}{9}n + \frac{2}{9} \\ \gamma_n = -\frac{4}{3} + \frac{1}{9}4^n + \frac{8}{9} \end{cases}$$

En évaluant en suite en A , $A^n = \alpha_n A^2 + \beta_n A + \gamma_n I_3$. Avec $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{pmatrix}$, on obtient

$$A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4^n + 2 & -4^n + 1 & 4^n - 1 \\ -4^n + 1 & 4^n + 2 & -4^n + 1 \\ 4^n - 1 & -4^n + 1 & 4^n + 2 \end{pmatrix}$$

VI.4 Lemme des noyaux**Propriété 48**

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P \wedge Q = 1$, alors

$$\text{Ker}(PQ)(u) = \text{Ker}P(u) \oplus \text{Ker}Q(u)$$

Si de plus PQ est annulateur de u , alors $E = \text{Ker}P(u) \oplus \text{Ker}Q(u)$

Preuve:

► Montrons l'égalité $\text{Ker}(PQ)(u) = \text{Ker}P(u) + \text{Ker}Q(u)$:

► Grâce à Bézout : $PA + QB = 1$ donc en passant aux polynômes d'endomorphisme, ceci se traduit par $\text{Id} = P(u) \circ A(u) + Q(u) \circ B(u)$ et, en appliquant cette relation au vecteur x de E , on obtient $x = x_1 + x_2$ où $x_1 = P(u) \circ A(u)(x)$ et $x_2 = Q(u) \circ B(u)(x)$.

Si $x \in \text{Ker}PQ(u)$ alors

$$\begin{aligned} Q(u)(x_1) &= Q(u)[(P(u) \circ A(u))(x)] = (Q(u) \circ P(u) \circ A(u))(x) \\ &= (A(u) \circ P(u) \circ Q(u))(x) = 0 \\ &= A(u)[(P(u) \circ Q(u))(x)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

car $\mathbb{K}[u]$ est une algèbre commutative. Par conséquent $x_1 \in \text{Ker}Q(u)$.

De même on démontre $x_2 \in \text{Ker}P(u)$.

Ainsi l'inclusion $\text{Ker}(PQ)(u) \subset \text{Ker}P(u) + \text{Ker}Q(u)$

- Inversement $\text{Ker}P(u) \subset \text{Ker}Q(u) \circ P(u) = \text{Ker}(PQ)(u)$ et $\text{Ker}Q(u) \subset \text{Ker}P(u) \circ Q(u) = \text{Ker}(PQ)(u)$, donc l'inclusion $\text{Ker}P(u) + \text{Ker}Q(u) \subset \text{Ker}(PQ)(u)$
- Montrons que $\text{Ker}P(u) \cap \text{Ker}Q(u) = \{0\}$.

Soit $x \in \text{Ker}P(u) \cap \text{Ker}Q(u)$. Comme $\text{Id} = A(u) \circ P(u) + B(u) \circ Q(u)$, alors $x = (A(u) \circ P(u))(x) + (B(u) \circ Q(u))(x) = 0$

Exemple: Projecteur

Soit p un projecteur de E , montrons que $E = \text{Ker}p \oplus \text{Imp}$.

Soit p un projecteur de E , alors p est un endomorphisme de E vérifiant $p^2 = p$.

Posons $Q = X^2 - X$, alors $Q(X) = X(X - 1)$, avec $X \wedge (X - 1) = 1$ et $Q(p) = 0$. D'après le lemme des noyaux

$$\text{Ker}Q(p) = \text{Ker}p \oplus \text{Ker}(p - \text{Id}_E)$$

Or $\text{Ker}(p - \text{Id}_E) = \{x \in E \mid p(x) = x\} = \text{Imp}$ et $E = \text{Ker}Q(p)$, donc

$$E = \text{Ker}p \oplus \text{Imp}$$

Exemple: Symétrie

Soit s une symétrie vectorielle de E , alors $E = \text{Ker}(s - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$.

Soit s une symétrie vectorielle de E , alors s est un endomorphisme de E vérifiant $s^2 = \text{Id}_E$.

Posons $Q = X^2 - 1$, alors $Q(X) = (X + 1)(X - 1)$, avec $(X + 1) \wedge (X - 1) = 1$ et $Q(s) = 0$. D'après le lemme des noyaux

$$\text{Ker}Q(s) = \text{Ker}(s - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$$

L'égalité $\text{Ker}Q(s) = E$ donne le résultat demandé

Conséquence 4

Soit $P_1, \dots, P_r$ des polynômes deux à deux premiers entre eux et $u \in \mathcal{L}(E)$, alors

$$\text{Ker}[(P_1 \cdots P_r)(u)] = \bigoplus_{i=1}^r \text{Ker}[P_i(u)]$$

Si de plus $P_1 \cdots P_r$ est annulateur de u , alors

$$E = \bigoplus_{i=1}^r \text{Ker}[P_i(u)]$$

Preuve:

Se fait par récurrence sur r :

- On vient de faire la démonstration dans le cas $r = 2$.
- On suppose la propriété vraie à l'ordre $r \geq 2$: si $P = P_1 P_2 \cdots P_{r+1}$ se décompose en produit de polynômes premiers entre eux deux à deux alors, en écrivant que $P = Q_r P_{r+1}$ où $Q_r = P_1 P_2 \cdots P_r$. D'après le lemme des noyaux $\text{Ker}P(u) = \text{Ker}Q_r(u) \oplus \text{Ker}P_{r+1}(u)$ et par hypothèse de récurrence

$$\text{Ker}Q_r(u) = \text{Ker}P_1 \cdots P_r(u) = \bigoplus_{i=1}^r \text{Ker}P_i(u)$$

On conclut que

$$\begin{aligned} \text{Ker}P_1 \cdots P_{r+1}(u) &= \text{Ker}Q_r(u) \oplus \text{Ker}P_{r+1}(u) \\ &= \bigoplus_{i=1}^r \text{Ker}P_i(u) \oplus \text{Ker}P_{r+1}(u) \\ &= \bigoplus_{i=1}^{r+1} \text{Ker}P_i(u) \end{aligned}$$

VII Application à la réduction de la notion de polynôme annulateur

VII.1 Décompositions spectrales

Propriété 49

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme diagonalisable, $\text{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ et $(p_i)_{1 \leq i \leq r}$ la famille des projecteurs associées à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^r E_{\lambda_i}(u)$. Alors

1. $u = \sum_{i=1}^r \lambda_i p_i$. Cette écriture $u = \sum_{i=1}^r \lambda_i p_i$ est appelée décomposition spectrale de l'endomorphisme diagonalisable u .
2. Pour tout $q \in \mathbb{N}$, $u^q = \sum_{i=1}^r \lambda_i^q p_i$
3. Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$ $P(u) = \sum_{i=1}^r P(\lambda_i) p_i$

Preuve:

1. Soit $x \in E = \bigoplus_{i=1}^r E_{\lambda_i}(u)$, donc $x = \sum_{i=1}^r x_i$ où $x_i \in E_{\lambda_i}(u)$.

$$u(x) = u \left(\sum_{i=1}^r x_i \right) = \sum_{i=1}^r u(x_i) = \sum_{i=1}^r \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^r \lambda_i p_i(x)$$

$$\text{Donc } u = \sum_{i=1}^r \lambda_i p_i$$

2. Par récurrence sur q

► $q = 0$, on a $u^0 = \text{Id}_E = \sum_{i=1}^r p_i$

► Supposons la propriété établie au rang $q \geq 0$. On a

$$\begin{aligned} u^{q+1} &= u \circ u^q = \\ &= \left(\sum_{i=1}^r \lambda_i p_i \right) \left(\sum_{i=1}^r \lambda_i^q p_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^r \lambda_i \lambda_k^q \delta_i^k p_i \\ &= \sum_{i=1}^r \lambda_i^{q+1} p_i \end{aligned}$$

3. Conséquence immédiate de 2)

VII.2 Polynôme annulateur et diagonalisation

Propriété 50

Soit $u \in (E)$. On a équivalence entre

1. u est diagonalisable
2. u annule un polynôme scindé à racines simples.
3. π_u est scindé à racines simples

Preuve:

1) $\Rightarrow$ 2) Appelons $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres deux à deux distinctes de u et $m_1, \dots, m_p$ leurs ordres de multiplicité respectifs.

Dans une base adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{j=1}^p E_{\lambda_j}(u)$, la matrice de u est diagonale par blocs

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{m_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_p I_{m_p} \end{pmatrix}$$

Le polynôme $P = \prod_{j=1}^p (X - \lambda_j)$ est annulateur de M , car, par blocs,

$$P(M) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1)I_{m_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P(\lambda_2)I_{m_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & P(\lambda_p)I_{m_p} \end{pmatrix}$$

Donc $P(M) = 0$ car λ_j est racine de P pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

Ainsi le polynôme P est scindé, à racines simples et annulateur de u .

2) $\Rightarrow$ 3) π_u divise tout polynôme annulateur de u

3) $\Rightarrow$ 1) On écrit $\pi_u = \prod_{j=1}^p (X - \lambda_j)$, alors $\text{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ et d'après le lemme des noyaux

$$\text{Ker} \pi_u(u) = \text{Ker} \prod_{j=1}^p (u - \lambda_j \text{Id}_E) = \bigoplus_{j=1}^p \text{Ker}(u - \lambda_j \text{Id}_E)$$

$\text{Ker} \pi_u(u) = E$ et donc u est diagonalisable.

Exemple

Tout projecteur est diagonalisable.

Soit p un projecteur de E . Le polynôme $X^2 - X$, scindé à racines simples, annule p , donc p est diagonalisable.

Exemple

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ base de E tel que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Étudions la diagonalisation de u ?

Remarquons que u est du rang 1, donc $X^2 - \text{Tr}(u)X = X^2 - nX$ est annulateur de u . Le polynôme $X^2 - nX = X(X - n)$ est scindé à racines simples, donc u est diagonalisable

Propriété 51

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$. On a équivalence entre

1. u est diagonalisable et $\text{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$

2. $\pi_u = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)$

Preuve:

2) $\Rightarrow$ 1) C'est fait

1) $\Rightarrow$ 2) Soit $P = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)$. Le lemme des noyaux donne $\text{Ker} P(u) = \bigoplus_{i=1}^r \text{Ker}(u - \lambda_i \text{Id}_E)$ et comme u est diagonalisable, alors

$$E = \bigoplus_{i=1}^r \text{Ker}(u - \lambda_i \text{Id}_E) \text{ et, par suite, } \text{Ker} P(u) = E, \text{ soit } P(u) = 0$$

Conséquence 5

Le seul endomorphisme nilpotent et diagonalisable est l'endomorphisme nul

Corollaire 12 (Endomorphisme induit)

Si u est un endomorphisme diagonalisable de E et F un sous-espace stable pour u , l'endomorphisme v , induit par u sur F , est diagonalisable.

Preuve:

Soit P un polynôme annulateur de u , scindé et à racines simples. La restriction de $P(u)$ à F est $P(v)$, et donc, P est annulateur de v . Ainsi v est diagonalisable.

Propriété 52: Caractérisation des matrices diagonalisables

Pour une matrice carrée M d'ordre n et à coefficients dans $\mathbb{K}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. M est diagonalisable ;
2. π_M est scindé à racines simples
3. M annule un polynôme scindé à racines simples.

VII.3 Polynôme minimal et trigonalisation**Théorème 6**

Soit $u \in (E)$. On a équivalence entre

1. u est diagonalisable
2. u annule un polynôme non nul et scindé
3. π_u est scindé

Preuve:

- 1) $\Rightarrow$ 2) Soit $\mathcal{B}$ une base de trigonalisation de u . La matrice T de u est triangulaire supérieure donc $\chi_u = \chi_T = \prod_{i=1}^n (X - t_{ii})$
d'où est scindé. D'après Cayley-Hamilton est annulateur de d'où le résultat.
- 2) $\Rightarrow$ 3) Le polynôme minimal divise tout polynôme annulateur
- 3) $\Rightarrow$ 1) Posons $\pi_u = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$. D'après le théorème de décomposition des noyaux $E = \text{Ker}(\pi_u) = \bigoplus \text{Ker}(u - \lambda_i \text{id}_E)^{\alpha_i}$.
Pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ le sous-espace $\text{Ker}(u - \lambda_i \text{id}_E)^{\alpha_i}$ est u -stable. Posons $F_i = \text{Ker}(u - \lambda_i \text{id}_E)^{\alpha_i}$ et u_i la restriction u de u à F_i . Soit $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, alors pour tout $x \in F_i$, on a

$$(u_i - \lambda_i \text{id}_{F_i})^{\alpha_i}(x) = (u - \lambda_i \text{id}_E)^{\alpha_i}(x) = 0$$

donc $n_i = u_i - \lambda_i \text{id}_{F_i}$ est nilpotent. On déduit qu'il existe une base $\mathcal{B}_i$ de F_i dans laquelle la matrice de u_i est triangulaire supérieure stricte d'où la matrice de u_i dans la base $\mathcal{B}_i$ est triangulaire supérieure avec λ_i dans sa diagonale.

On déduit que la matrice de u dans la base $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^k \mathcal{B}_i$ est triangulaire supérieure. L'endomorphisme est alors trigonalisable.

Corollaire 13

Pour une matrice carrée M d'ordre n et à coefficients dans $\mathbb{K}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. M est diagonalisable
2. M annule un polynôme non nul et scindé
3. π_M est scindé