

ÉLÉMENTS PROPRES

Définition: Éléments propres

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

- Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ . On dit que  $\lambda$  est valeur propre de  $u$  s'il existe  $x \in E \setminus \{0\}$  tel que  $u(x) = \lambda x$ .
- Soit  $x \in E$ . On dit que  $x$  est vecteur propre de  $u$  si  $x \neq 0$  et s'il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $u(x) = \lambda x$ .
- L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme est appelé le spectre de  $u$  et noté  $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$ .
- Soit  $\lambda \in \text{Sp}(u)$ .  $E_{\lambda}(u) = \text{Ker}(u - \lambda \cdot \text{Id}_E)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  distinct de  $\{0_E\}$  appelé le sous-espace propre de  $u$  associé à  $\lambda$

Propriété: Caractérisation en dim finie

Si  $E$  est de dimension finie  $n \geq 1$ , alors

$$\begin{aligned} \lambda \in \text{Sp}(u) &\Leftrightarrow (u - \lambda \cdot \text{Id}_E) \text{ n'est pas injectif} \\ &\Leftrightarrow (u - \lambda \cdot \text{Id}_E) \text{ n'est pas surjectif} \\ &\Leftrightarrow (u - \lambda \cdot \text{Id}_E) \text{ n'est pas bijectif} \\ &\Leftrightarrow \text{rg}(u - \lambda \cdot \text{Id}_E) < n \\ &\Leftrightarrow \det(u - \lambda \cdot \text{Id}_E) = 0 \end{aligned}$$

Définition: Éléments propres d'une matrice

Les éléments propres d'une matrice  $A$  sont ceux de l'endomorphisme canoniquement associé

$$u_A : \begin{cases} M_{n,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow M_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto AX \end{cases}$$

On écrit  $A$  à la place de  $u_A$

POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE

$E$  est de dimension finie  $n \geq 1$ .

Définition

- On appelle polynôme caractéristique de  $A$  le polynôme  $\chi_A = \det(XI_n - A)$ .
- On appelle polynôme caractéristique de  $u$  le polynôme  $\chi_u = \det(X\text{Id}_E - u)$ .

Propriété: Endomorphisme induit

Si  $F$  est stable par  $u$ , alors  $\chi_{u_F} | \chi_u$ .

$$\text{Si } E = \bigoplus_{i=1}^k F_i \text{ tel que } \forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, F_i \text{ est stable par } u, \text{ alors } \chi_u = \prod_{i=1}^k \chi_{u_{F_i}}$$

Propriété: Spectre et polynôme caractéristique

$$\text{Sp}(u) = \{\lambda \in \mathbb{K}, \chi_u(\lambda) = 0\}$$

Définition: Ordre de multiplicité

La multiplicité d'une racine  $\lambda$  de  $\chi_u$  est appelée l'ordre de multiplicité de  $\lambda$ , et on la note  $m(\lambda)$ .

$$1 \leq \dim E_{\lambda}(u) \leq m(\lambda)$$

POLYNÔME MINIMAL

Définition: Polynômes annulateurs et minimal

- Le noyau  $\{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u) = 0\}$  du morphisme d'évaluation  $P \mapsto P(u)$  est un idéal de  $\mathbb{K}[X]$ . On l'appelle l'idéal annulateur de  $u$ .
- On appelle polynôme annulateur de  $u$  tout élément de l'idéal annulateur;
- On appelle polynôme minimal de  $u \in \mathcal{L}(E)$  l'unique polynôme unitaire qui engendre l'idéal des polynômes annulateurs.

Même définition pour les matrices

Propriété: Théorème de décomposition des noyaux

Si  $P_1, \dots, P_k$  sont  $k$  polynômes deux à deux premiers entre eux, alors :

$$\text{Ker} \left[ \left( \prod_{i=1}^k P_i \right) (u) \right] = \bigoplus_{i=1}^k \text{Ker}(P_i(u))$$

$$\text{Si } P = \prod_{i=1}^k P_i \text{ un polynôme annulateur de } u, \text{ alors } E = \bigoplus_{i=1}^k \text{Ker}(P_i(u))$$

Propriété: Théorème de Cayley-Hamilton

Soit  $\chi_u$  le polynôme caractéristique de  $u$ , alors  $\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .

DIAGONALISATION

Définition

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ , soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ .

- On dit que  $u \in \mathcal{L}(E)$  est diagonalisable s'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  telle que  $M_{\mathcal{B}}(u)$  est diagonale.
- On dit que  $A \in M_n(\mathbb{K})$  est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

Propriété

Si  $A$  est diagonalisable et  $\Delta = P^{-1}AP$ , alors les valeurs propres sont les éléments de la diagonale de  $\Delta$  et la multiplicité de chacune est son nombre d'occurrence dans cette diagonale.

Propriété: Propriétés caractéristiques

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension  $n$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Soit  $\text{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ . Les affirmations suivantes sont équivalentes.

1.  $u$  est diagonalisable.
2.  $E$  possède une base de vecteurs propres;
3.  $E = \bigoplus_{i=1}^k E_{\lambda_i}$ ;
4.  $\sum_{i=1}^k \dim(E_{\lambda_i}) = \dim E$ ;
5.  $\chi_u$  est scindé et  $\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \dim E_{\lambda_i} = m_i$ .
6.  $\pi_u$  est scindé à racines simples.
7.  $u$  annule un polynôme scindé à racines simples.

TRIGONALISATION

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie  $n \geq 1$ ,  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $A \in M_n(\mathbb{K})$ .

Définition

- $u$  est dite trigonalisable s'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  pour laquelle  $M_{\mathcal{B}}(u)$  est triangulaire supérieure.
- $A$  est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice  $T$  triangulaire supérieure.

Propriété: Propriétés caractéristiques

Les quatre affirmations sont équivalentes :

1.  $u$  est trigonalisable.
2.  $\chi_u$  est scindé.
3.  $u$  annule un polynôme scindé
4.  $\pi_u$  est scindé.

**Corollaire 1** Si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , alors tout  $u \in \mathcal{L}(E)$  est trigonalisable. Toute  $A \in M_n(\mathbb{C})$  est trigonalisable.

ENDOMORPHISMES NILPOTENTS

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $A \in M_n(\mathbb{K})$ , avec  $\dim E = n$ .

Définition

Un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  est dit nilpotent s'il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $u^p = 0$ .

Ce vocabulaire se transpose aux matrices

Propriété: Propriété caractéristique

- $u$  est nilpotent  $\iff u$  est trigonalisable avec  $\text{Sp}(u) = \{0\}$
- $A$  est nilpotente  $\iff$  elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte

DÉCOMPOSITION SPÉCTRALE

Propriété: Décomposition spectrale

Si  $u$  est diagonalisable où  $E$  est de dim finie, avec  $\text{Sp}(u) = \{\lambda_i, i \in \llbracket 1, k \rrbracket\}$ . Pour  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ , on pose  $p_i$  la projection de  $E$  sur  $E_{\lambda_i}(u)$  (de direction

$$\bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k E_{\lambda_j}(u)). \text{ Alors}$$

$$u = \sum_{i=1}^k \lambda_i p_i$$

et

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], P(u) = \sum_{i=1}^k P(\lambda_i) p_i$$

CONTACT INFORMATION

**Web:** [www.elamdaoui.com](http://www.elamdaoui.com)

**Email:** [elamdaoui@gmail.com](mailto:elamdaoui@gmail.com)

**Phone:** 06 62 30 38 81

## RÉDUCTION D'UNE MATRICE D'ORDRE 3

Notons  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $M_{3,1}(\mathbb{K})$  et soit  $A \in M_3(\mathbb{K})$  de polynome caractéristique scindé

