
Fonctions vectorielles d'une variable réelle

EL AMDAOUI Mustapha,

Lycée IBN TIMIYA,
site web: www.elamdaoui.com,
email: elamdaoui@gmail.com

Niveau: MP

Table des matières

I	Dérivabilité	2
I.1	Dérivabilité	2
I.2	Propriétés de la dérivée	3
I.3	Dérivées successives et opérations	5
II	Intégration sur un segment	8
II.1	Intégrale d'une fonction continue par morceaux	8
II.2	Sommes de Riemann	9
II.3	Intégration et dérivation	10
III	Calcul des intégrales	12
III.1	Intégration par parties	12
III.2	Changement de variable	12
IV	Applications	14
IV.1	Théorèmes de Rolle	14
IV.2	Inégalité des accroissements finies	15
IV.3	Prolongement par dérivabilité	16
V	Formules de Taylor	17
V.1	Formules de Taylor avec reste intégral	17
V.2	Inégalité de Taylor-Lagrange	18
V.3	Formule de Taylor-Young	18
VI	Arcs paramétrés	20
VI.1	Définitions	20
VI.2	Exemples	21

Dans tout le chapitre les espaces vectoriels $E, F, G \dots$ sont normés et de dimensions finies sur $\mathbb{K}$ et parfois ils sont euclidiens.

I, J désignent des intervalles de $\mathbb{R}$ d'intérieurs non vide.

Soit $f : I \rightarrow E$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $(f_i)_{1 \leq i \leq p}$ les applications coordonnées de f dans la base $\mathcal{B}$:

$$\forall t \in I, \quad f(t) = \sum_{i=1}^p f_i(t) e_i$$

I Dérivabilité

I.1 Dérivabilité

Définition 1

Soit $f : I \rightarrow E$.

1. Soit $a \in I$. On dit que f admet une dérivée en a si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe.

Dans ce cas cette limite est notée $f'(a)$ ou $\frac{df}{dx}(a)$.

2. On dit f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I et la fonction de I vers E qui à x associe $f'(x)$ est appelée dérivée de f sur I , on la note f' ou bien $\frac{df}{dx}$ ou encore Df

Notation :

$\mathcal{D}(I, E)$ désigne l'ensemble des fonctions dérivables sur I à valeurs dans E

Remarque :

1. Sous réserve d'existence, on remarque que $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$
2. f est dérivable en a si, et seulement, s'il existe $\ell \in E$ tel que

$$f(a+h) = f(a) + h \cdot \ell + o(h)$$

3. Si $x \mapsto f(x)$ est le paramétrage d'un mobile, alors $f'(a)$ est le vecteur vitesse en $x = 0$. Lorsque $f'(a) \neq 0$, la droite $f(a) + \text{Vect}(f'(a))$ est appelée la tangente à la trajectoire en $x = a$

Propriété 1

Soit $f : I \rightarrow E$

1. Soit $a \in I$. Si f est dérivable au point a , alors f est continue au point a
2. Si f est dérivable sur I , alors f est continue sur I

Remarque :

La réciproque est bien entendue fausse

Définition 2

Soit $f : I \rightarrow E$ et a un point intérieur à I .

1. On dit que f est dérivable à droite en a si $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe. Au quel cas cette limite se note $f'_d(a)$
2. On dit que f est dérivable à gauche en a si $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe. Au quel cas cette limite se note $f'_g(a)$

Propriété 2

Soit $f : I \rightarrow E$ et $a \in \overset{\circ}{I}$.

f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite en a et $f'_d(a) = f'_g(a)$

Sous ces hypothèses, on a $f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a)$

Propriété 3: Caractérisation à l'aide d'une base

Soit $f : I \rightarrow E$ de fonctions coordonnées $f_1, \dots, f_p$ dans une base $\beta = (e_1, \dots, e_p)$ de E . Alors

1. f est dérivable en $a \iff \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, f_i$ est dérivable en a .

$$\text{Auquel cas } f'(a) = \sum_{i=1}^p f'_i(a) e_i$$

2. f est dérivable sur $I \iff \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, f_i$ est dérivable sur I .

$$\text{Auquel cas } f' = \sum_{i=1}^p f'_i e_i$$

Preuve:

Pour $h \neq 0$ tel que $a + h \in I$, on a :

$$\frac{1}{h} (f(a+h) - f(a)) = \sum_{i=1}^p \frac{1}{h} (f_i(a+h) - f_i(a)) \cdot e_i$$

Donc $h \mapsto \frac{1}{h} (f(a+h) - f(a))$ admet une limite ℓ en 0 si, et seulement, si pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, la fonction $h \mapsto \frac{1}{h} (f_i(a+h) - f_i(a))$ admet une limite ℓ_i en 0, et dans ce cas $\ell = \sum_{i=1}^p \ell_i e_i$

Exemple

Si $E = \mathbb{C}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est dérivable
2. $\Re(f)$ et $\Im(f)$ sont dérivables
3. $\bar{f}$ est dérivable

Dans ce cas $\overline{f'} = \overline{f}'$ et $f' = \Re(f)' + i \Im(f)'$

Exemple

$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} : I \rightarrow M_{n,p}(\mathbb{K})$ est dérivable sur I si, et seulement si, les fonctions coefficients $a_{i,j} : t \mapsto a_{i,j}(t)$ le sont. On a alors

$$\forall t \in I, \quad A'(t) = \left(a'_{i,j}(t) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = \begin{pmatrix} a'_{1,1}(t) & \cdots & a'_{1,p}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{n,1}(t) & \cdots & a'_{n,p}(t) \end{pmatrix}$$

I.2 Propriétés de la dérivée**Propriété 4**

Si $f : I \rightarrow E$ est continue et dérivable sur l'intérieur de I . Les assertions suivantes sont équivalentes

1. f est constante sur I
2. $f' = 0$ sur l'intérieur de I

Preuve:

Le résultat est connu dans le cas réel $E = \mathbb{R}$. On l'applique à $\Re(f)$ et $\Im(f)$ pour l'étendre aux fonctions complexes puis aux fonctions composantes dans le cas général

Propriété 5

Soit $f, g \in \mathcal{D}(I, E)$ et $\alpha \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$. Alors

1. L'application $f + g \in \mathcal{D}(I, E)$ et $(f + g)' = f' + g'$
2. L'application $\alpha f \in \mathcal{D}(I, E)$ et $(\alpha f)' = \alpha' f + \alpha f'$.
En particulier, α est constante, on a $(\alpha f)' = \alpha f'$
3. Si α ne s'annule pas sur I , alors l'application $\frac{f}{\alpha} \in \mathcal{D}(I, E)$ et

$$\left(\frac{f}{\alpha} \right)' = \frac{\alpha f' - \alpha' f}{\alpha^2}$$

Preuve:*Fonctions composantes***Remarque :**

1. $\mathcal{D}(I, E)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.
2. L'application $D : \begin{cases} \mathcal{D}(I, E) & \longrightarrow & \mathcal{F}(I, E) \\ f & \longmapsto & f' \end{cases}$ est linéaire

Propriété 6: Linéarité et dérivationSoit $f \in \mathcal{D}(I, E)$ et $L : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors $L \circ f : I \longrightarrow F$ est dérivable et

$$(L \circ f)' = L \circ f'$$

Preuve:Soit $t_0 \in I$ et $t \in I \setminus \{t_0\}$, on a

$$\frac{L \circ f(t) - L \circ f(t_0)}{t - t_0} = L \left(\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \right) \xrightarrow{t \rightarrow t_0} L \circ f'(t_0)$$

AttentionLa formule $(L \circ f)' = f' \times L' \circ f$ n'a pas de sens car L' n'en a pas.**Exemple**Soit $A \in \mathcal{D}(I, M_n(\mathbb{R}))$, alors $g : t \longmapsto \text{Tr}(A(t))$ est de classe $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ et

$$g'(t) = \text{Tr}(A'(t))$$

Propriété 7: Bilinearité et dérivationSoit E, F et G trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies, $B : E \times F \longrightarrow G$ une application bilinéaire, $f \in \mathcal{D}(I, E)$ et $g \in \mathcal{D}(I, F)$.Alors l'application $B(f, g) : \begin{cases} I & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & B(f(x), g(x)) \end{cases}$ est dérivable et

$$B(f, g)' = B(f', g) + B(f, g')$$

Preuve:Soit $t_0 \in I$ et $t \in I \setminus \{t_0\}$, on a :

$$B(f(t), g(t)) - B(f(t_0), g(t_0)) = B(f(t) - f(t_0), g(t)) + B(f(t_0), g(t) - g(t_0))$$

Donc

$$\frac{B(f(t), g(t)) - B(f(t_0), g(t_0))}{t - t_0} = B\left(\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}, g(t)\right) + B\left(f(t_0), \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0}\right)$$

 B est continue, forme bilinéaire en dimension finie, donc $B(f, g)$ est dérivable et

$$B(f, g)' = B(f', g) + B(f, g')$$

Propriété 8Si E est euclidien et $\|\cdot\|_2$ étant la norme associée au produit scalaire, si f et g sont deux éléments de $\mathcal{D}(I, E)$. Alors

1. les applications $\langle f | g \rangle$ et $\|f\|_2^2$ sont dérivables et

$$\langle f | g \rangle' = \langle f' | g \rangle + \langle f | g' \rangle$$

En particulier

$$(\|f\|_2^2)' = 2 \langle f' | f \rangle$$

2. Si f ne s'annule jamais sur I , alors $\|f\|_2$ est dérivable sur I et

$$\|f\|_2' = \frac{\langle f' | f \rangle}{\|f\|_2}$$

Si $\|f\|_2 = 1$, alors $f \perp f'$

Corollaire 1

Si $\mathbb{A}$ est une $\mathbb{K}$ -algèbre, alors $\mathcal{D}(I, \mathbb{A})$ est une $\mathbb{K}$ -algèbre. En particulier

$$\forall f, g \in \mathcal{D}(I, \mathbb{A}), \quad fg \in \mathcal{D}(I, \mathbb{A}) \text{ et } (fg)' = f'g + fg'$$

Exemple

Soit $A : I \rightarrow M_n(\mathbb{K})$ une fonction dérivable sur I .

La fonction $t \mapsto \det(A(t))$ est dérivable car

$$\det(A(t)) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i), i}(t)$$

Corollaire 2 (Multilinéarité et dérivation)

Soit $M : E_1 \times \cdots \times E_n \rightarrow F$ une application n -linéaire et $f_i \in \mathcal{D}(I, E_i)$.

Alors $g : t \mapsto M(f_1(t), \dots, f_n(t))$ est dérivable sur I et

$$g' = \sum_{i=1}^n M(f_1, \dots, f'_i, \dots, f_n)$$

Propriété 9: Dérivation et composition

Soit $f \in \mathcal{D}(J, E)$, $\varphi \in \mathcal{D}(I, J)$. Alors $(f \circ \varphi) \in \mathcal{D}(I, E)$ et

$$(f \circ \varphi)' = \varphi' \times (f' \circ \varphi)$$

Preuve:

On peut écrire $f = \sum_{i=1}^n f_i \cdot e_i$ et utiliser $f_i \circ \varphi$

I.3 Dérivées successives et opérations

Définition 3

Soit $f \in \mathcal{F}(I, E)$. On définit les dérivées successives de f , si elles existent, au moyen d'une récurrence

- $f^{(0)} = f$
- Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons avoir défini $f^{(k)}$ sur I , si $f^{(k)}$ est dérivable sur I , on pose $f^{(k+1)} = (f^{(k)})'$

La fonction $f^{(k)}$, si elle existe, est appelée la dérivée $k^{\text{ème}}$ de la fonction f ; on la note parfois $\frac{d^k f}{dx^k}$ ou $D^k f$

Exemple: De base

Soit $a \in \mathbb{C}$

1. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x-a}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$, dérivable à tout ordre et $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}$
2. $f : x \mapsto (x-a)^k$ est définie sur $\mathbb{R}$, dérivable à tout ordre et

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \frac{k!}{(k-n)!} (x-a)^{k-n} & \text{si } n \leq k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\cos^{(n)} : x \mapsto \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \text{ et } \sin^{(n)} : x \mapsto \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

Exemple

Calculons les dérivées $n^{\text{ème}}$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$

Définition 4: Fonctions de $\mathcal{C}^n$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : I \rightarrow E$. On dit que

- ▶ f est de $\mathcal{C}^n$ sur I si f est n -fois dérivable sur I et $f^{(n)}$ est continue sur I
- ▶ f est de $\mathcal{C}^\infty$ sur I ou f est lisse sur I si f est k -fois dérivable sur I pour tout $k \in \mathbb{N}$

Notation :

- ▶ $\mathcal{D}^n(I, E)$ est l'ensemble des fonctions n -fois dérivable sur I
- ▶ $\mathcal{C}^n(I, E)$ est l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I
- ▶ $\mathcal{C}^\infty(I, E)$ est l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I

Remarque :

1. $\mathcal{C}^{n+1}(I, E) \subset \mathcal{D}^{n+1}(I, E) \subset \mathcal{C}^n(I, E)$
2. Si $f \in \mathcal{C}^n(I, E)$, avec $n \geq 1$, alors $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $f^{(k)} \in \mathcal{C}^{n-k}(I, E)$
3. $\mathcal{C}^\infty(I, E) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{D}^k(I, E) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^k(I, E)$

Propriété 10: Caractérisation via les fonctions coordonnées

Soit $f : I \rightarrow E$ de fonctions coordonnées $f_1, \dots, f_p$ dans une base $\beta = (e_1, \dots, e_p)$ de E . Les propriétés suivantes sont équivalentes

1. $f \in \mathcal{D}^n(I, E)$
2. $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $f_i \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{K})$

Si tel est le cas

$$f^{(n)} = \sum_{i=1}^p f_i^{(n)} \cdot e_i$$

Mêmes équivalences si on remplace $\mathcal{D}^n$ par $\mathcal{C}^n$ ou par $\mathcal{C}^\infty$

Preuve:

Il se démontre immédiatement par récurrence.

Propriété 11: Somme et multiplication par un scalaire

Soit $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $f, g \in \mathcal{D}^n(I, E)$. Alors $\lambda f + g \in \mathcal{D}^n(I, E)$ et

$$(\lambda f + g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + g^{(n)}$$

Preuve:

Par récurrence sur n

Corollaire 3

Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f, g \in \mathcal{C}^n(I, E)$. Alors $\lambda f + g \in \mathcal{C}^n(I, E)$

Propriété 12

Soit $f \in \mathcal{D}^n(I, E)$ et $L \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $L \circ f \in \mathcal{D}^n(I, F)$ et

$$(L \circ f)^{(n)} = L \circ f^{(n)}$$

Preuve:

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$

Corollaire 4

Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $f \in \mathcal{C}^n(I, E)$ et $L \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $L \circ f \in \mathcal{C}^n(I, F)$

Propriété 13: Formule de Leibniz

Soit $B : E \times F \longrightarrow G$ une application bilinéaire, $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{D}^n(I, E)$ et $g \in \mathcal{D}^n(I, F)$. Alors $B(f, g) \in \mathcal{D}^n(I, G)$ et

$$B(f, g)^{(n)} = \sum_{i=0}^n C_n^i B(f^{(i)}, g^{(n-i)}) \quad (\text{Formule de Leibniz})$$

Preuve:

Identique à celle déjà faite dans le cas réel.

Corollaire 5

Soit $B : E \times F \longrightarrow G$ une application bilinéaire, $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $f \in \mathcal{C}^n(I, E)$ et $g \in \mathcal{C}^n(I, F)$. Alors $B(f, g) \in \mathcal{C}^n(I, G)$

Corollaire 6

Soit $\lambda \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{K})$ et $g \in \mathcal{D}^n(I, E)$ où $n \in \mathbb{N}$. Alors $\lambda g \in \mathcal{D}^n(I, E)$ et

$$(\lambda g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda^{(n-k)} g^{(k)}$$

Corollaire 7

Soit $\lambda \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ et $g \in \mathcal{C}^n(I, E)$ où $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Alors $\lambda g \in \mathcal{C}^n(I, E)$

Propriété 14

$(\mathcal{C}^k(I, E), +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{C}(I, E), +, \cdot)$.

Propriété 15: Formule de Leibniz

Soit $f, g \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{A})$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors $f \times g \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{K})$ et

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

Exemple

Calculer la dérivée énième de la fonction f définie par $f(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x}$

Preuve:

Les deux fonctions $g : x \mapsto x^2 + x + 1$ et $h : x \mapsto e^{-x}$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, on peut donc appliquer la formule de Leibniz à tout ordre. Cette formule s'écrit $f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k g^{(k)}(x) h^{(n-k)}(x)$.

On a donc, en utilisant $h^{(n)}(x) = (-1)^n e^{-x}$ (qui se prouve facilement par récurrence) et $g^{(n)}(x) = 0$ pour tout $n \geq 3$

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= C_n^0 g^{(0)}(x) h^{(n)}(x) + C_n^1 g'(x) h^{(n-1)}(x) + C_n^2 g''(x) h^{(n-2)}(x) \\ &= (-1)^n \left[x^2 + (1-2n)x + 1 - 2n + n^2 \right] e^{-x} \end{aligned}$$

On vérifie avec $n = 0$ et $n = 1$ la relation reste valable.

Propriété 16: Dérivation et composition

Soit $f \in \mathcal{D}^n(I, E)$, $\varphi \in \mathcal{D}^n(J, I)$. Alors $(f \circ \varphi) \in \mathcal{D}^n(J, E)$

Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, si $f \in \mathcal{C}^n(I, E)$, $\varphi \in \mathcal{C}^n(J, I)$, alors $(f \circ \varphi) \in \mathcal{C}^n(J, E)$

Preuve:

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$

II Intégration sur un segment

Dans cette partie I est le segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, $a < b$.

Soit $f : I \rightarrow E$ et $(f_i)_{1 \leq i \leq p}$ les applications coordonnées de f dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ de E

$$\forall t \in I, \quad f(t) = \sum_{i=1}^p f_i(t) e_i$$

II.1 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Définition 5: Fonction continue par morceaux

Une fonction $f : I \rightarrow E$ est dite continue par morceaux si, et seulement si, ses fonctions coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ le sont.

Notation :

On note $\mathcal{C}_{pm}(I, E)$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I , à valeurs dans E .

Définition 6

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}(I, E)$.

Pour tout $a, b \in I$, on appelle intégrale de f de a à b le vecteur

$$\int_a^b f(t) dt := \sum_{i=1}^p \left(\int_a^b f_i(t) dt \right) e_i$$

S'il n'y a pas de confusion l'intégrale se note $\int_a^b f$ ou $\int_{[a,b]} f$ lorsque $a \leq b$

Propriété 17

La valeur de l'intégrale ici définie ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{B}$ de E .

Preuve:

Soit $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_p)$ une base de E et soit $P = (p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à la base $\tilde{\mathcal{B}}$. On a

$$\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \tilde{e}_j = \sum_{i=1}^p p_{i,j} e_i$$

On écrit $f = \sum_{i=1}^p f_i \cdot e_i = \sum_{i=1}^p \tilde{f}_i \tilde{e}_i$, alors pour tout $t \in I$, on a

$$\begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_p(t) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \tilde{f}_1(t) \\ \vdots \\ \tilde{f}_p(t) \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^p \int_a^b \tilde{f}_j(t) dt \cdot \tilde{e}_j &= \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^p p_{i,j} \int_a^b \tilde{f}_j(t) dt \cdot e_i \\ &= \sum_{i=1}^p \int_a^b \left(\sum_{j=1}^p p_{i,j} \tilde{f}_j(t) \right) dt \cdot e_i \\ &= \sum_{i=1}^p \int_a^b f_i(t) dt \cdot e_i \end{aligned}$$

Convention :

Si $\int_b^a f(t) dt = - \int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^a f(t) dt = 0$

Propriété 18

Soit $f, g \in \mathcal{C}_{pm}(I, E)$, $a, b \in I$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors :

1. **Linéarité** : $\int_a^b (\lambda f + g) = \lambda \int_a^b f + \int_a^b g$
2. **Relation de Chasles** : Pour tout $c \in I$, alors $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

Preuve:

1. Via les fonctions coordonnées dans une base de E .
2. Via les fonctions coordonnées dans une base de E .

II.2 Sommes de Riemann**Propriété 19**

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a, b], E)$, $\sigma = (x_i)_{i=0}^n$ une subdivision de $[a, b]$. $p(\sigma) = \max(x_{i+1} - x_i)$ est appelé le pas de σ et $c_i \in [x_i, x_{i+1}]$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) f(c_k) \xrightarrow{p(\sigma) \rightarrow 0} \int_a^b f$$

Preuve:

Par passage des fonctions coordonnées

Propriété 20

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}(I, E)$ et $a, b \in I$ alors

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f$$

Preuve:

Via les fonctions coordonnées dans une base de E .

Remarque :

On a aussi

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f$$

Exemple

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} = \ln 2$$

Exemple

$$\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}} \sim \frac{4n}{e}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}} &= \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n (n+k)} \\ &= \sqrt[n]{n^n \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right)} \\ &= n \exp \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n}\right) \right] \end{aligned}$$

Puisque $x \rightarrow \ln(x)$ est continue sur $[1, 2]$, alors :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right) &= \int_1^2 \ln(t) dt \\ &= [(\ln t - 1)t]_1^2 \\ &= 2\ln 2 - 1 \end{aligned}$$

D'où le résultat

Propriété 21

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}(I, E)$, a, b deux éléments de I et $L \in \mathcal{L}(E, F)$, alors

$$L\left(\int_a^b f\right) = \int_a^b L \circ f$$

Preuve:

f est continue par morceaux sur $[a, b]$, donc

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f$$

Or L est continue sur E , car elle est linéaire et E est de dimension finie donc

$$L\left(\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} L\left(\int_a^b f\right)$$

D'autre part L est linéaire, donc

$$L\left(\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)\right) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n L \circ f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b L \circ f$$

Propriété 22: Inégalité triangulaire

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a, b], E)$ et $L \in \mathcal{L}(E, F)$, alors

$$\left\| \int_{[a, b]} f \right\| \leq \int_{[a, b]} \|f\|$$

Preuve:

D'une part

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$$

et d'autre part

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left\| f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \right\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \|f(t)\| dt$$

Or par inégalité triangulaire

$$\left\| \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \right\| \leq \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left\| f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \right\|$$

On conclut par passage à la limite et par la continuité de la norme.

II.3 Intégration et dérivation

Définition 7

Soit $f \in \mathcal{C}(I, E)$.

On dit que l'application $F : I \rightarrow E$ est une primitive de f sur I si F est dérivable et $F' = f$

Propriété 23

1. Toute primitive est de classe $\mathcal{C}^1$
2. Deux primitives d'une même fonction continue diffèrent d'une constante

Preuve:

Soit F et G deux primitives d'une fonction $f : I \rightarrow E$ continue par morceaux. La fonction $G - F$ est constante par morceaux, et puisque $G - F$ est continue alors $G - F$ est constante sur I .

Théorème 1: Fondamental de l'analyse

Soit $f : I \rightarrow E$ une fonction continue sur I et $a \in I$.

1. L'application

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$$

est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a .

2. Pour toute primitive G de f sur I

$$\int_a^x f(t) dt = G(x) - G(a)$$

Preuve:

Via les fonctions coordonnées

Corollaire 8

Si $f : I \rightarrow E$ est de classe $\mathcal{C}^p(I, E)$ et $a \in I$, alors $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^{p+1}(I, E)$

Corollaire 9

Pour toute fonction f de classe C^1 sur I , et $a \in I$

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt$$

Corollaire 10

Si $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ est de signe constant sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(t) dt = 0 \Rightarrow f = 0$

Preuve:

$F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et $F' = f$. Supposons que $f \geq 0$; F est croissante sur $[a, b]$ et $F(a) = F(b)$. Donc $F = 0$. D'où $F' = f = 0$

Corollaire 11

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, E)$ et T -périodique

1. f a une primitive T -périodique si, et seulement si, toutes ses primitives le sont ou encore si, et seulement si, $\int_0^T f(t) dt = 0$

2. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{a+T}^{b+T} f(t) dt \quad \text{et} \quad \int_a^{a+T} f(t) dt = \int_b^{b+T} f(t) dt$$

Preuve:

Soit $H(x) = \int_x^{x+T} f(t) dt = F(x+T) - F(x)$ où $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est la primitive de f s'annulant en a . Tout comme F , H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et $H'(x) = f(x+T) - f(x) = 0$, donc H est constante.

1. F est T -périodique si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $H(x) = H(0) = \int_0^T f = 0$. Si G est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, $G : x \mapsto F(x) + C$ et $F(x+T) - F(x) = G(x+T) - G(x)$.

2. $H(a) = H(b)$ donne la deuxième égalité. La première en déduit par la relation de Chasles.

Corollaire 12

Soit $f \in \mathcal{C}(I, E)$, $a \in I$ et $u \in \mathcal{D}(J, \mathbb{R})$ tels que $u(J) \subset I$.

Alors $G : x \mapsto \int_a^{u(x)} f(t) dt$ est dérivable sur J et $G'(x) = u'(x) \cdot f(u(x))$

Preuve:

Avec les notations précédentes, $G = F \circ u$. Il suffit d'appliquer le théorème de dérivation des fonctions composées.

III Calcul des intégrales

III.1 Intégration par parties

Propriété 24: Intégration par parties

Soit $f : I \rightarrow E$ et $g : I \rightarrow F$ deux fonctions continues de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $B : E \times F \rightarrow G$. Alors pour tout $a, b \in I$, on a :

$$\int_a^b B(f'(t), g(t)) dt = [B(f(t), g(t))]_a^b - \int_a^b B(f(t), g'(t)) dt.$$

Preuve:

$B(f, g)$ est continue et continue par morceaux sur I , donc

$$\int_a^b B(f, g)' dt = [B(f(t), g(t))]_a^b$$

et

$$\int_a^b B(f, g)' dt = \int_a^b B(f'(t), g(t)) dt + \int_a^b B(f(t), g'(t)) dt.$$

D'où le résultat

Corollaire 13

Soit $\lambda : I \rightarrow \mathbb{K}$ et $f : I \rightarrow E$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}_{pm}^1$ sur I et $a, b \in I$, alors :

$$\int_a^b \lambda(t).f'(t) dt = [\lambda(t)f(t)]_a^b - \int_a^b \lambda(t)f'(t) dt.$$

Preuve:

$\mathbb{K} \times E \rightarrow E, (\lambda, x) \mapsto \lambda x$ est bilinéaire

III.2 Changement de variable

Propriété 25: Changement de variable

Soit φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I à valeurs dans J , $f \in \mathcal{C}(J, E)$ et $a, b \in I$. Alors :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt = \int_a^b \varphi'(t) f(\varphi(t)) dt$$

Preuve:

Soit F une primitive de f sur J . On a $F \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $\forall x \in I : (F \circ \varphi)' = \varphi' \times f \circ \varphi$

$$\begin{aligned} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt &= [F(t)]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \\ &= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) \\ &= F \circ \varphi(b) - F \circ \varphi(a) \\ &= \int_a^b (F \circ \varphi)'(t) dt \\ &= \int_a^b \varphi'(t) f(\varphi(t)) dt \end{aligned}$$

Corollaire 14

Soit φ de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone sur I à valeurs dans J , $f \in \mathcal{C}(J, E)$ et $\alpha, \beta \in J$. Alors :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \int_{\varphi^{-1}(\alpha)}^{\varphi^{-1}(\beta)} \varphi'(t) f(\varphi(t)) dt$$

Exemple

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que, pour tout $x \in [a, b]$, on a $f(a + b - x) = f(x)$. Montrer que

$$\int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)dx.$$

En déduire la valeur de $I = \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$.

La fonction $x \mapsto (a + b - x)$ est une bijection continue strictement décroissante de $[a, b]$ sur lui-même, envoyant a en b et b en a . Effectuant le changement de variables $u = a + b - x$, on trouve donc

$$\begin{aligned} \int_a^b xf(x)dx &= - \int_b^a (a + b - u)f(a + b - u)du \\ &= \int_a^b (a + b - u)f(u)du \\ &= (a + b) \int_a^b f(x)dx - \int_a^b xf(x)dx. \end{aligned}$$

Ceci donne le résultat demandé.

Pour l'application, posons $a = 0$, $b = \pi$ et $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}$. Alors $f(\pi - x) = f(x)$ et donc, d'après le résultat précédent, on a

$$I = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

On calcule cette intégrale en effectuant le changement de variables $u = \cos x$. En effet, la fonction $x \mapsto \cos x$ réalise une bijection de l'intervalle $[0, \pi]$ sur l'intervalle $[-1, 1]$. De $du = -\sin x dx$, on déduit

$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi}{2} \int_1^{-1} \frac{-du}{1 + u^2} \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 \frac{du}{1 + u^2} \\ &= \frac{\pi}{2} (\arctan(1) - \arctan(-1)) \\ &= \frac{\pi^2}{4}. \end{aligned}$$

Exemple

Calculons $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \sin(x)} dx$

On pose $t = \tan \frac{x}{2}$, $\sin(x) = \frac{2t}{1 + t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1 + t^2}$. Lorsque $x = 0$ alors $t = 0$ et lorsque $x = \frac{\pi}{2}$, alors $t = 1$. Donc

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \sin(x)} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1 + \frac{2t}{1 + t^2}} \frac{2dt}{1 + t^2} \\ &= 2 \int_0^1 \frac{1}{(1 + t)^2} dt = 1 \end{aligned}$$

Corollaire 15 1. Soit $f \in C(I)$ où I est un intervalle symétrique par rapport à 0

- Si f est impaire, alors $\int_{-a}^a f(t)dt = 0$
- Si f est paire, alors $\int_{-a}^a f(t)dt = 2 \int_0^a f(t)dt$

2. Soit $f \in C(I)$, périodique de période $\top$. Alors pour tout $a \in I$, on a :

$$\int_a^{a+\top} f = \int_0^\top f$$

IV Applications

IV.1 Théorèmes de Rolle

Propriété 26: Théorème de Rolle

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$

Preuve:

La fonction f est continue sur $[a, b]$, l'image du segment $[a, b]$ par f est un segment $[m, M]$

- Si $f(a) = f(b) \neq M$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = M$. Le théorème précédent affirme que $f'(c) = 0$
- Si $f(a) = f(b) \neq m$, on procède de la même manière.
- Si $f(a) = f(b) = m = M$. L'égalité $m = M$ implique la constance de f sur $[a, b]$ et donc de dérivée nulle sur $]a, b[$

D'où le résultat

Exemple

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout réel α , le polynôme $P' + \alpha P$ est lui aussi scindé sur $\mathbb{R}$.

Rappelons qu'un polynôme est scindé sur un corps si, et seulement si, la somme des multiplicités des racines de ce polynôme sur ce corps égale son degré. Notons $a_0 < a_1 < \dots < a_m$ les racines réelles de P et $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ leurs multiplicités respectives. Le polynôme P étant scindé, on peut écrire

$$\deg P = \sum_{k=0}^m \alpha_k$$

On convient de dire qu'une racine de multiplicité 0 n'est en fait pas racine d'un polynôme. Avec ses termes, si a_k est racine de multiplicité $\alpha_k \geq 1$ de P alors a_k est racine de multiplicité $\alpha_k - 1$ du polynôme P' et donc racine de multiplicité au moins (et même exactement) $\alpha_k - 1$ du polynôme $P' + \alpha P$. Ainsi les a_k fournissent

$$\sum_{k=0}^m (\alpha_k - 1) = \deg P - (m + 1)$$

racines comptées avec multiplicité au polynôme $P' + \alpha P$. Considérons ensuite la fonction réelle $f : x \mapsto P(x)e^{\alpha x}$. Cette fonction est indéfiniment dérivable et prend la valeur 0 en chaque a_k . En appliquant le théorème de Rolle à celle-ci sur chaque intervalle $[a_{k-1}, a_k]$, on produit des réels $b_k \in]a_{k-1}, a_k[$ vérifiant $f'(b_k) = 0$. Or

$$f'(x) = (P'(x) + \alpha P(x))e^{\alpha x}$$

et donc b_k est racine du polynôme $P' + \alpha P$. Ajoutons à cela que les b_k sont deux à deux distincts et différents des précédents a_k car, par construction

$$a_0 < b_1 < a_1 < b_2 < \dots < b_m < a_m$$

On vient donc de déterminer m nouvelles racines au polynôme $P' + \alpha P$ et ce dernier possède donc au moins

$$\deg P - 1$$

racines comptées avec multiplicité.

- Dans le cas $\alpha = 0$, cela suffit pour conclure car $\deg P' = \deg P - 1$
- Dans le cas $\alpha \neq 0$, il nous faut encore une racine...
 - Si $\alpha > 0$, la fonction f tend vers 0 en $-\infty$ par argument de croissance comparée. On peut alors appliquer un théorème de Rolle généralisé à la fonction f sur l'intervalle $]-\infty, a_0]$ et cela fournit la racine manquante.
 - Si $\alpha < 0$, on exploite comme au dessus la nullité de la limite de f en $+\infty$ cette fois pour trouver une racine dans l'intervalle $]a_m, +\infty[$

IV.2 Inégalité des accroissements finis

Propriété 27: Théorème des accroissements finis

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

En particulier si $f(a) = f(b)$ on retrouve le théorème de Rolle

Preuve:

Considérons sur $[a, b]$ l'application

$$\varphi : x \mapsto f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

L'application φ , d'après les théorèmes généraux, est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ et vérifie $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Le théorème de Rolle assure l'existence d'un élément $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$, ce qui équivaut à :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Donc le résultat.

Corollaire 16 (Inégalité des accroissements finis)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

Si $|f'|$ est majorée par un certain $k \in \mathbb{R}^+$ sur $]a, b[$, alors $|f(b) - f(a)| \leq k|b - a|$

Remarque :

Le théorème des accroissements finis tombe en défaut si $\dim E \geq 2$.

Par exemple, la fonction $t \mapsto e^{it}$ est continue sur $[0, 2\pi]$, dérivable sur $]0, 2\pi[$, et $e^{i0} = e^{2i\pi} = 1$, mais pourtant sa dérivée, qui est la fonction $t \mapsto ie^{it}$, ne s'annule pas

Propriété 28: Inégalité des accroissements finis

Soit $f \in \mathcal{C}^1(I, E)$ telle que $\|f'\|$ soit bornée sur I i.e. il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall t \in I, \|f'(t)\| \leq M$, alors

$$\forall a, b \in I, \|f(b) - f(a)\| \leq M|b - a|$$

En d'autres termes, la fonction f est lipschitzienne.

Preuve:

Puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$, on peut écrire

$$\forall x \in I, f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt$$

Cas $a \leq b$

$$\|f(b) - f(a)\| = \left\| \int_a^b f'(t) dt \right\| \leq \int_{[a, b]} \|f'(t)\| dt$$

et donc

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M(b - a)$$

Cas $a > b$: analogue.

Remarque :

si la vitesse instantanée d'un point mobile est majorée par M sur $]a, b[$, alors la distance entre le point de départ et le point d'arrivée est au plus $M(b - a)$. Sa vitesse moyenne est donc majorée par M . Bien sûr, la réciproque est fautive !

IV.3 Prolongement par dérivabilité

Propriété 29: Prolongement par dérivabilité

Si $f : [a, b] \rightarrow E$ une fonction continue sur $[a, b]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b[$ telle que $\lim_b f'(x) = \ell \in E$, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et $f'(b) = \ell$

Preuve:

Définissons sur $[a, b]$ l'application g par

$$g : \begin{cases} [a, b] & \longrightarrow E \\ x & \longmapsto g(x) = \begin{cases} f'(x) & \text{si } x \in]a, b[\\ \ell & \text{si } x = b \end{cases} \end{cases}$$

L'application g est continue sur $[a, b]$, donc $G : x \mapsto \int_a^x g(t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. Par ailleurs, pour tout x de $[a, b]$, on a $G(x) = f(x) - f(a)$. Par continuité de f et G sur $[a, b]$, l'inégalité précédente est vraie pour $x = b$. Donc

$$\forall x \in [a, b], \quad f(x) = f(a) + G(x)$$

Ainsi $f \in \mathcal{C}^1([a, b], E)$

Exemple

Montrons que f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \cos \sqrt{x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$

Preuve:

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec :

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = -\frac{\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

Comme $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$, le théorème de composition des limites donne :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2}$$

ce qui prouve, puisque f est continue sur $\mathbb{R}_+$, que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $f'(0) = -\frac{1}{2}$

Corollaire 17

Soit f une application de $[a, b]$ dans E et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que

- f est continue sur $[a, b]$;
- f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $[a, b[$
- Pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $f^{(k)}$ a une limite ℓ_k en b

Alors f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $[a, b]$ et, pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $f^{(k)}(b) = \ell_k$

Preuve:

Par récurrence sur p

Corollaire 18

Soit f une application de $[a, b]$ dans E telle que

- f est continue sur $[a, b]$;
- Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, l'application f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $[a, b[$
- Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $f^{(p)}$ a une limite $\ell_p \in E$ en b

Alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a, b]$ et, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $f^{(p)}(b) = \ell_p$

Preuve:

Par récurrence sur p

Exemple: CCP 2013

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}$
2. Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et que, pour tout entier n , il existe un polynôme P_n tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right)$$

3. En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que : $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 0$

1. La continuité de f de $\mathbb{R}^*$ est immédiate. De plus, $\lim_{x \rightarrow 0} \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right) = 0$. Donc f est continue sur $\mathbb{R}$
2. La formule est vraie pour $n = 0$ en posant $P_0(x) = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right)$ où P_n est un polynôme. Alors

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{P_n(x)}{x^{3n}} \frac{2}{x^3} \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right) + \frac{P'_n(x)}{x^{3n}} \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right) + P_n(x) \frac{-3n}{x^{3n+1}} \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right) \\ &= \frac{2P_n(x) + x^3 P'_n(x) - 3nx^2 P_n(x)}{x^{3(n+1)}} \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

On pose alors :

$$P_{n+1}(x) = 2P_n(x) + x^3 P'_n(x) - 3nx^2 P_n(x)$$

Puisque P_n est un polynôme, P_{n+1} en est un aussi et la formule annoncée est démontrée par récurrence

3. On sait que $\frac{1}{x^{3n}} \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. Donc $f^{(n)}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. On en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(0) = 0$

V Formules de Taylor

V.1 Formules de Taylor avec reste intégral

Propriété 30: Formule de Taylor avec reste intégral

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, E)$. Alors pour tout $a, b \in I$

$$f(b) = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)}_{T_n(b)} + \underbrace{\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt}_{R_n(b)}$$

$T_n(b)$ est appelé la **partie régulière** de la formule de Taylor et $R_n(b)$ le **reste intégral**

Preuve:

Exemple

La fonction $f : x \rightarrow e^x$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = e^x$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt$$

Exemple

La fonction $f : x \rightarrow \ln(1+x)$ est de classe C^∞ sur $] -1, +\infty[$, et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in] -1, +\infty[, f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

Pour tout $x \in]-1, +\infty[$, on a :

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + (-1)^n \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt$$

V.2 Inégalité de Taylor-Lagrange

Corollaire 19 (Inégalité de Taylor-Lagrange)

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, E)$ telle que $\|f^{(n+1)}\|$ soit majorée sur I . Alors pour tout $a, b \in I$, on a :

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right\| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[a,b]} \|f^{(n+1)}\|$$

Preuve:

On suppose que $a \leq b$. Puisque f est de classe C^n et de classe C_{pm}^{n+1} sur I et alors $f^{(n+1)}$ est continue par morceaux sur le segment $[a, b]$, ainsi $\sup_{[a,b]} |f^{(n+1)}|$ est un réel. D'après la Formule de Taylor avec reste intégral, on a :

$$\begin{aligned} \left\| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right\| &= \left\| \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (b-t)^n dt \right\| \\ &\leq \sup_{[a,b]} \|f^{(n+1)}\| \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} dt \\ &\leq \sup_{[a,b]} \|f^{(n+1)}\| \left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_a^b \\ &\leq \sup_{[a,b]} \|f^{(n+1)}\| \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

Exemple

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = e^x$

en effet : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|}$

Exemple

Pour tout $x \in]-1, 1[$, on a :

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + (-1)^n \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt$$

La fonction homographique $\varphi : t \mapsto \frac{t-x}{1+t}$, dont la dérivée $\varphi'(t) = \frac{1+x}{(1+t)^2} > 0$, montre que pour tout t compris entre 0 et x , on a $|\varphi(t)| \leq |x|$, puis que

$$\forall x \in]-1, 1[, \left| \ln(1+x) - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}$$

V.3 Formule de Taylor-Young

Théorème 2: Formule de Taylor-Young

Soit $f : I \rightarrow E$ une fonction de $\mathcal{C}^n$ sur I et $a \in I$, alors f admet un $DL_n(a)$ donné par

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x-a)^n)$$

Cette relation est appelée développement limité de f à l'ordre n en a .

Preuve:

Il est clair qu'on peut supposer $n \geq 1$. D'après le théorème de Taylor avec reste intégral, on a, pour tout x de I

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt$$

On a :

$$\begin{aligned} \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt &= \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a) dt + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} (f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a)) dt \\ &= \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} (f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a)) dt \end{aligned}$$

Pour $\varepsilon > 0$; puisque la fonction $f^{(n)}$ est continue en a , il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in I$, on a :

$$|x-a| < \eta \implies \|f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a)\| < \varepsilon$$

On a alors, pour tout $x \in I$ tel que $|x-a| < \eta$:

$$\begin{aligned} \left\| \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} (f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a)) dt \right\| &\leq \left| \int_a^x \frac{|x-t|^{n-1}}{(n-1)!} \|f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a)\| dt \right| \\ &\leq \varepsilon \left| \int_a^x \frac{|x-t|^{n-1}}{(n-1)!} dt \right| = \varepsilon \frac{|x-a|^n}{n!} \end{aligned}$$

Ceci montre : $\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} (f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a)) dt = o((x-a)^n)$. Finalement pour tout $x \in I$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Corollaire 20

Si f est de $\mathcal{C}^\infty$ sur I , alors f admet un $DL_n(a)$ pour tout $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$, obtenu par la formule de Taylor-Young

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x-a)^n)$$

Exemple

Soit $n \geq 1$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{(n+1)x} - 1}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ n+1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Calculer le développement limité de f en 0 à l'ordre 3.

2. En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^n k^3$.

1. On commence par écrire que :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(n+1)x + \frac{(n+1)^2}{2}x^2 + \frac{(n+1)^3}{6}x^3 + \frac{(n+1)^4}{24}x^4 + o(x^4)}{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)} \\ &= \frac{(n+1) + \frac{(n+1)^2}{2}x + \frac{(n+1)^3}{6}x^2 + \frac{(n+1)^4}{24}x^3 + o(x^3)}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + o(x^3)}. \end{aligned}$$

Posons $u = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + o(x^3)$ et utilisant le DL de $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + o(u^3)$, on trouve

$$\frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + o(x^3)} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^3).$$

Il reste à réaliser le produit des deux développements limités. Après simplifications et factorisations, on trouve

$$f(x) = (n+1) + \frac{n(n+1)}{2}x + \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}x^2 + \frac{n^2(n+1)^2}{24}x^3 + o(x^3).$$

2. On va écrire f d'une autre façon en remarquant que f est somme d'une série géométrique. On a en effet

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \exp(kx).$$

On peut alors calculer le développement limité de f en utilisant cette formule, et on trouve

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n \left(1 + kx + \frac{k^2 x^2}{2} + \frac{k^3 x^3}{6} + o(x^3) \right) \\ &= n + 1 + \left(\sum_{k=1}^n k \right) x + \left(\sum_{k=1}^n k^2 \right) \frac{x^2}{2} + \left(\sum_{k=1}^n k^3 \right) \frac{x^3}{6} + o(x^3). \end{aligned}$$

Par unicité du développement limité, on peut identifier les termes devant x^3 . On trouve

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Cette méthode permet de calculer n'importe quelle somme $\sum_{k=1}^n k^p$ (à condition d'être assez courageux pour déterminer le développement limité jusqu'à l'ordre p).

VI Arcs paramétrés

VI.1 Définitions

Définition 8

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- ▶ On appelle *arc paramétré* de E de classe $\mathcal{C}^k$ tout couple $\Gamma := (I, f)$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de classe $\mathcal{C}^k$ de I dans E
- ▶ L'ensemble $\{(t, f(t)) \mid t \in I\}$ est appelé le *support* ou la *courbe* associée à l'arc $\Gamma = (I, f)$

Exemple

$t \mapsto (t, t)$, $t \in \mathbb{R}$, est un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^\infty$ dont le support est la première bissectrice

Exemple

$t \mapsto (\cos t, \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$, est un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^\infty$ dont le support est le cercle unité

Remarque :

[Interprétation géométrique] on considère le point mobile M tel que $M(t) = f(t)$

- ▶ $f(t)$ représente le vecteur position de M à l'instant t . C'est-à-dire $\overrightarrow{OM} = f(t)$;
- ▶ $f'(t)$ représente le vecteur vitesse de M à l'instant t ;
- ▶ $f''(t)$ représente le vecteur accélération de M à l'instant t

Définition 9: Points doubles

$M(t_0) = f(t_0)$ est dit

- ▶ *simple* si $\text{Card}\{M(t) = M(t_0), t \in I\} = 1$;
- ▶ *double* si $\text{Card}\{M(t) = M(t_0), t \in I\} = 2$;
- ▶ *multiple* si $\text{Card}\{M(t) = M(t_0), t \in I\} \geq 2$;

Remarque :

[Interprétation géométrique]

- ▶ $M(t_0)$ est simple si le mobile M passe une seule fois par $M(t_0)$;
- ▶ $M(t_0)$ est double si le mobile M passe deux fois par $M(t_0)$;
- ▶ $M(t_0)$ est multiple si le mobile M passe au moins deux fois par $M(t_0)$.

Définition 10

- On dit que $f(t_0)$ est un point régulier de la courbe (I, f) si $f'(t_0) \neq \vec{0}$.
Si $f(t_0)$ n'est pas régulier, on dit qu'il est stationnaire
- On dit que (I, f) est régulier si tous ses points sont réguliers.
- Un point $f(t_0)$ est dit birégulier lorsque $(f'(t_0), f''(t_0))$ est une famille libre.
Notamment tout point birégulier est régulier
- (I, f) est dite birégulière lorsque tous ses points sont biréguliers

Remarque :

Le développement limité à l'ordre 1 de φ en t_0 s'écrit :

$$\varphi(t_0 + h) = \varphi(t_0) + h\varphi'(t_0) + o(h)$$

$\varphi(t_0)$ est un point de $\mathbb{R}^2$ et $h\varphi'(t_0)$ la partie vectorielle de vecteur directeur $\varphi'(t_0)$.

Si $(t_0, M - t_0)$ est un point régulier, alors Γ admet une tangente en $(t_0, M(t_0))$ et celle-ci est dirigée par $\varphi'(t_0)$.

VI.2 Exemples**Exemple**

Tracer la courbe Γ de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x(t) = t \ln t \\ y(t) = \frac{\ln t}{t} \end{cases}$$

Γ est de $\mathcal{C}^\infty$ et pour tout $t \in]0, +\infty[$

$$x\left(\frac{1}{t}\right) = -y(t) \quad \text{et} \quad y\left(\frac{1}{t}\right) = -x(t)$$

donc Γ admet la 2^{ème} bissectrice pour axe de symétrie, et on peut restreindre l'étude à $t \in [1; +\infty[$.

- Les applications x, y sont dérivables sur $[1, +\infty[$, et :

$$\forall t \in [1, +\infty[, \quad \begin{cases} x'(t) = 1 + \ln t \\ y'(t) = \frac{1 - \ln t}{t^2} \end{cases}$$

d'où le tableau de variations :

t	1	e	$+\infty$
$x'(t)$	+		+
x	0	e	$+\infty$
y	0	$\frac{1}{e}$	0
$y'(t)$	+	0	-

Exemple: Cardioïde

Construire la cardioïde d'équation polaire est

$$r = 1 + \cos \theta$$

- ρ est 2π -périodique et paire ; on peut limiter l'étude sur $[0, \pi]$. La courbe obtenue sera complétée par la symétrie d'axe (Ox)

- ρ est dérivable sur $[0, \pi]$ et

$$\forall \theta \in [0, \pi], \quad \rho'(\theta) = -\sin(\theta) \leq 0$$

On obtient facilement le tableau de variation

θ	0	π
$\rho'(\theta)$	0	0
$\rho(\theta)$	2	0

- Etude en $M(0)$, $\rho(0) = 2$ et $\rho'(0) = 0$. Il y a une tangente orthoradiale.
- L'allure

