

CONTEXTE

E, F, G sont normés et de dimensions finies sur $\mathbb{K}$ et parfois ils sont euclidiens. I, J désignent des intervalles de $\mathbb{R}$.

Soit $f : I \longrightarrow E, \mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ une base de E et $(f_i)_{1 \leq i \leq p}$ les applications coordonnées de f dans la base $\mathcal{B}$:

$$\forall t \in I, \quad f(t) = \sum_{i=1}^p f_i(t) e_i$$

DÉRIVATION

Définition: Dérivation

Soit $f : I \rightarrow E$ et $a \in I$.

- On dit que f admet une dérivée en a si

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ existe } \in E$$

Cette limite est noté $f'(a)$ on note aussi $\frac{df}{dx}(a)$.

- Lorsque f est dérivable en tout point de I on dit que f est dérivable sur I et la fonction de I vers E qui à x associe $f'(x)$ est appelée dérivée de f sur I , on la note f'

Définition: Dérivées successives

Soit $f \in \mathcal{F}(I, E)$. On définit les dérivées successives de f , si elles existent, au moyen d'une récurrence

- $f^{(0)} = f$
- Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons avoir défini $f^{(k)}$ sur I , si $f^{(k)}$ est dérivable sur I , on pose $f^{(k+1)} = (f^{(k)})'$

La fonction $f^{(k)}$, si elle existe, est appelée la dérivée $k^{\text{ème}}$ de la fonction f .

- L'ensemble des fonctions n -fois dérivable sur I se note $\mathcal{D}^n(I, E)$
- f est dite de $\mathcal{C}^n$ sur I si f est n -fois dérivable sur I et $f^{(n)}$ est continue sur I
- f est dite de $\mathcal{C}^\infty$ sur I ou f est lisse sur I si f est k -fois dérivable sur I pour tout $k \in \mathbb{N}$
- $\mathcal{C}^n(I, E)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I
- $\mathcal{C}^\infty(I, E)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I

Propriété: Fonctions coordonnées

Soit $f : I \longrightarrow E$ de fonctions coordonnées $f_1, \cdots, f_p$ dans une base de E . On a équivalence entre:

- $f \in \mathcal{D}^n(I, E)$
- $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, f_i \in \mathcal{D}^n(I, E)$

$$\text{Auquel cas } f^{(n)} = \sum_{i=1}^p f_i^{(n)} . e_i$$

Mêmes résultats si on remplace $\mathcal{D}^n$ par $\mathcal{C}^n$ ou par $\mathcal{C}^\infty$

OPÉRATIONS

Propriété: Somme et multiplication par un scalaire

Soit $n \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{K}$ et $f, g \in \mathcal{D}^n(I, E)$. Alors $\lambda f + g \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$ et

$$(\lambda f + g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + g^{(n)}$$

Propriété

Soit $f \in \mathcal{D}^n(I, E)$ et $L \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $L \circ f \in \mathcal{D}^n(I, F)$ et

$$(L \circ f)^{(n)} = L \circ f^{(n)}$$

Propriété: Formule de Leibniz

Soit $B : E \times F \longrightarrow G$ une application bilinéaire, $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{D}^n(I, E)$ et $g \in \mathcal{D}^n(I, F)$. Alors $B(f, g) \in \mathcal{D}^n(I, G)$ et

$$B(f, g)^{(n)} = \sum_{i=0}^n C_n^i B(f^{(i)}, g^{(n-i)})$$

Propriété: Dérivation et composition

Soit $f \in \mathcal{D}^n(I, E), \varphi \in \mathcal{D}^n(J, I)$. Alors $(f \circ \varphi) \in \mathcal{D}^n(J, E)$

Tous les résultats précédents restent vrais si on remplace $\mathcal{D}^n$ par $\mathcal{C}^n$

INTÉGRATION SUR UN SEGMENT

Définition

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}(I, E)$ et $a, b \in I$. On appelle intégrale de f de a à b le vecteur

$$\int_a^b f(t) dt := \sum_{i=1}^p \left(\int_a^b f_i(t) dt \right) e_i$$

S'il n'y a pas de confusion l'intégrale se note $\int_a^b f$

Propriété

Soit $f, g \in \mathcal{C}_{pm}(I, E), a, b, c \in I$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors:

- Linéarité:** $\int_a^b (\lambda f + g) = \lambda \int_a^b f + \int_a^b g$
- Relation de Chasles:** $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$
- Si $L \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $L \left(\int_a^b f \right) = \int_a^b L \circ f$

Propriété: Somme de Riemann

$$\text{Soit } f \in \mathcal{C}_{pm}([a, b], E), \text{ alors } \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \left(a + k \frac{b-a}{n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f$$

Propriété: Inégalité triangulaire

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}(I, E), a, b \in I$ tels que $a \leq b$ alors:

$$\left\| \int_a^b f \right\| \leq \int_a^b \|f\|$$

MÉTHODES DE CALCUL

Propriété: Intégration par parties

Soit $f : I \longrightarrow E$ et $g : I \longrightarrow F$ deux fonctions de $\mathcal{C}^1$ sur I et $B : E \times F \longrightarrow G$.

$$\forall a, b \in I, \quad \int_a^b B(f'(t), g(t)) dt = [B(f(t), g(t))]_a^b - \int_a^b B(f(t), g'(t)) dt.$$

Propriété: Changement de variable

Soit φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I à valeurs dans $J, f \in \mathcal{C}(J, E)$ et $a, b \in I$. Alors:

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt = \int_a^b \varphi'(t) f(\varphi(t)) dt$$

INÉGALITÉ DES ACCROISSEMENT FINIS

Théorème: des accroissements finis

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors

il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

En particulier si $f(a) = f(b)$ on retrouve le théorème de Rolle

Propriété: Inégalité des accroissements finis

Soit $f \in \mathcal{C}^1(I, E)$ telle que $\|f'\|$ soit bornée sur I i.e. il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall t \in I, \|f'(t)\| \leq M$, alors $\forall a, b \in I, \|f(b) - f(a)\| \leq M |b - a|$

Théorème: de prolongement par dérivabilité

Soit f une application de $[a, b]$ dans E et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que:

- f est continue sur $[a, b]$;
- f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $[a, b[$
- Pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket, f^{(k)}$ a une limite ℓ_k en b

Alors f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $[a, b]$ et $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, f^{(k)}(b) = \ell_k$

FORMULES DE TAYLOR

Propriété: Formules de Taylor et Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, E)$ et $a, b \in I$.

- $f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$
- $\left\| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[a,b]} \|f^{(n+1)}\|$

Théorème: Formule de Taylor-Young

Soit $f : I \rightarrow E$ une fonction de $\mathcal{C}^n$ sur I et $a \in I$, alors f admet un $DL_n(a)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x-a)^n)$$

CONTACT INFORMATION

Web: www.elamdaoui.com

Email: elamdaoui@gmail.com

Phone: 06 62 30 38 81