

---

# Les espaces préhilbertiens

---

**EL AMDAOUI Mustapha,**

Lycée IBN TIMIYA,  
site web: [www.elamdaoui.com](http://www.elamdaoui.com),  
email: [elamdaoui@gmail.com](mailto:elamdaoui@gmail.com)

---

Niveau: MP

## Table des matières

|                                                                        |           |
|------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>I Espace préhilbertien. Espace euclidien</b>                        | <b>2</b>  |
| I.1 Produit scalaire . . . . .                                         | 2         |
| I.2 Orthogonalité et base orthonormale . . . . .                       | 5         |
| I.3 Orthogonal d'une partie et supplémentaire orthogonal . . . . .     | 10        |
| <b>II Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie</b> | <b>12</b> |
| II.1 Projections orthogonales . . . . .                                | 12        |
| II.2 Suites totales, suites hilbertiennes . . . . .                    | 14        |
| II.3 Symétrie orthogonale . . . . .                                    | 16        |
| <b>III Endomorphismes orthogonaux d'un euclidien</b>                   | <b>18</b> |
| III.1 Matrices orthogonales . . . . .                                  | 18        |
| III.2 Groupe orthogonal d'un espace euclidien . . . . .                | 20        |
| III.3 Automorphismes orthogonaux du plan . . . . .                     | 21        |
| III.4 Réduction des endomorphismes orthogonaux . . . . .               | 23        |
| <b>IV Endomorphismes symétriques</b>                                   | <b>27</b> |
| IV.1 Endomorphisme symétrique . . . . .                                | 27        |
| IV.2 Cas euclidien . . . . .                                           | 28        |
| IV.3 Théorème spectral . . . . .                                       | 29        |
| IV.4 Extrémum sur la sphère . . . . .                                  | 30        |
| <b>V Formes linéaires d'un espace euclidien</b>                        | <b>30</b> |
| V.1 Formes linéaires d'un espace euclidien . . . . .                   | 30        |
| V.2 Adjoint d'un endomorphisme . . . . .                               | 31        |

$E$  désigne un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.  $n$  et  $p$  désignent des entiers naturels.

## I Espace préhilbertien. Espace euclidien

### I.1 Produit scalaire

#### Définition 1

On appelle *produit scalaire* sur  $E$  toute application  $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant

1.  $\varphi$  est bilinéaire
2.  $\varphi$  est symétrique i.e.  $\forall x, y \in E, \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$
3.  $\varphi$  est positive i.e.  $\forall x \in E, \varphi(x, x) \geq 0$
4.  $\varphi$  est définie i.e.  $\forall x \in E, \varphi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$ .

On dit qu'un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

#### Notation :

Le produit scalaire de deux vecteurs  $x$  et  $y$  est souvent noté  $\langle x, y \rangle$ .

#### Remarque :

$\varphi$  vérifie (3) et (4) si et seulement si  $\forall x \in E \setminus \{0\}, \varphi(x, x) > 0$ .

#### Propriété 1: Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$

$\varphi : (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \sum_{k=1}^n x_k y_k$  où  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et  $y = (y_1, \dots, y_n)$ , est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}^n$

#### Propriété 2: Produit scalaire canonique sur $M_{n,p}(\mathbb{R})$

L'application  $\varphi : (A, B) \mapsto \text{Tr}({}^tAB)$  est un produit scalaire sur  $M_{n,p}(\mathbb{R})$

#### Preuve:

$\varphi : M_{n,p}(\mathbb{R}) \times M_{n,p}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  est bien définie.

Soient  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  et  $A, B, C \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ .

- $\varphi(A, \lambda B + \mu C) = \text{Tr}({}^tA(\lambda B + \mu C)) = \lambda \text{Tr}({}^tAB) + \mu \text{Tr}({}^tAC)$ .
- $\varphi(A, B) = \text{Tr}({}^tAB) = \text{Tr}({}^tBA) = \varphi(B, A)$
- Si les  $a_{i,j}$  désignent les coefficients de  $A$ ,

$$\varphi(A, A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{i,j}^2 \geq 0$$

- Si  $\varphi(A, A) = 0$  alors  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{i,j}^2 = 0$ . Or la somme de quantités positives n'est nulle que si chacune des quantités est nulle et donc  $a_{i,j} = 0$  pour tous  $i, j$ . Ainsi  $A = 0$ .

Finalement  $\varphi$  est un produit scalaire sur le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$ .

Ce produit scalaire est appelé produit scalaire canonique sur  $M_{n,p}(\mathbb{R})$

#### Propriété 3: Produit scalaire sur $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$

Soit  $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$  l'espace des fonctions continues et  $2\pi$ -périodiques sur  $\mathbb{R}$ .

L'application  $\varphi : (f, g) \mapsto \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$  est un produit scalaire sur  $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$

#### Preuve:

$\varphi : \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}) \times \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  est bien définie.

Soient  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  et  $f, g, h \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ .

- $\varphi(f, \lambda g + \mu h) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\lambda g(t) + \mu h(t))dt = \lambda \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt + \mu \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)h(t)dt$ .
- $\varphi(f, g) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t)f(t)dt = \varphi(g, f)$
- $\varphi(f, f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)dt \geq 0$

► Si  $\varphi(f, f) = 0$  alors  $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt = 0$ . Or la fonction  $f^2$  est continue positive sur  $[-\pi, \pi]$  donc  $f$  est nulle sur  $[-\pi, \pi]$ , puis elle est nulle sur  $\mathbb{R}$  puisqu'elle est  $2\pi$ -périodique..  
 $\varphi$  est un produit scalaire sur le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ .

#### Propriété 4: Produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  d'intérieur non vide et soit  $\omega \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}_+^*)$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $t \mapsto t^n \omega(t)$  est intégrable. Alors l'application

$$\varphi : (P, Q) \mapsto \int_I P(t)Q(t)\omega(t) dt$$

est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$

#### Preuve:

$\varphi : \mathbb{R}[X]^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est bien définie.

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $P, Q, R \in \mathbb{R}[X]$ .

$$\text{► } \varphi(P, \lambda Q + R) = \int_I P(t)(\lambda Q(t) + R(t))\omega(t) dt = \lambda \int_I P(t)Q(t)\omega(t) dt + \int_I P(t)R(t)\omega(t) dt.$$

$$\text{► } \varphi(P, Q) = \int_I P(t)Q(t)\omega(t) dt = \int_I Q(t)P(t)\omega(t) dt = \varphi(Q, P)$$

$$\text{► } \varphi(f, f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt \geq 0$$

► Si  $\varphi(P, P) = 0$  alors  $\int_I P^2(t)\omega(t) dt = 0$ . Or la fonction  $P^2 \cdot \omega$  est continue positive et intégrable sur  $I$  d'intégrale nulle, donc  $P^2 \cdot \omega$  est nulle sur  $I$ , puisque  $\omega$  ne s'annule pas, alors  $P$  est nul sur  $I$ , puis il est nul sur  $\mathbb{R}$  car il admet une infinité de racines.

$\varphi$  est un produit scalaire sur le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{R}[X]$ .

#### Exemple

L'application  $(P, Q) \mapsto \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$  définit un produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$ .

#### Définition 2

Un  $\mathbb{R}$ -espace  $E$  muni d'un produit scalaire est dit préhilbertien et noté  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .

Si de plus  $E$  est de dimension finie, on parle d'espace euclidien

#### Définition 3: Norme euclidienne

On appelle norme euclidienne d'un vecteur  $x$  le réel  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

#### Propriété 5

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien,  $x \in E$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$

1.  $\|x\| \geq 0$
2.  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3.  $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$

#### Preuve:

2. Pour  $x \in E$ ,

$$\begin{aligned} \|x\| = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{\langle x, x \rangle} = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle x, x \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

3. Pour  $x \in E$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \|\alpha x\| &= \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x \rangle} \\ &= \sqrt{\alpha^2 \langle x, x \rangle} \\ &= |\alpha| \|x\| \end{aligned}$$

**Propriété 6: Identités remarquables**

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien et  $x, y \in E$

1.  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$
2.  $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$
3.  $\langle x + y | x - y \rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2$ .

**Propriété 7: Identité du parallélogramme**

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien et  $x, y \in E$ ,

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

**Preuve:**

Il suffit de sommer les deux premières identités remarquables précédentes

**Remarque :**

L'identité du parallélogramme signifie que, dans un parallélogramme donné, la somme des carrés des longueurs des diagonales est égale à la somme des carrés des longueurs des côtés.

**Propriété 8: Identités de polarisation**

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien et  $x, y \in E$ ,

**1. Première identité de polarisation :**

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$$

**2. Deuxième identité de polarisation :**

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

**Preuve:**

Il suffit de faire la différence des deux premières identités remarquables précédentes

**Remarque :**

Par l'identité de polarisation, on peut calculer un produit scalaire à partir de la norme euclidienne associée.

**Propriété 9: Inégalité de Cauchy-Schwarz**

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien et  $x, y \in E$

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

De plus, il y a égalité si, et seulement si,  $x$  et  $y$  sont colinéaires.

**Preuve:**

- Si  $x = 0$ , la propriété est immédiate avec égalité et colinéarité des vecteurs  $x$  et  $y$ .
- Si  $x \neq 0$ , considérons pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ , le produit scalaire  $\langle \lambda x + y, \lambda x + y \rangle$ .  
D'une part, par positivité,  $\langle \lambda x + y, \lambda x + y \rangle \geq 0$ .  
D'autre part, par bilinéarité et symétrie,

$$\langle \lambda x + y, \lambda x + y \rangle = \lambda^2 \langle x, x \rangle + 2\lambda \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle$$

En posant  $a = \langle x, x \rangle$  ( $a \neq 0$  car  $x \neq 0$ ),  $b = 2\langle x, y \rangle$  et  $c = \langle y, y \rangle$ , le trinôme  $a\lambda^2 + b\lambda + c$  est de signe constant donc de discriminant négatif. Ainsi  $b^2 - 4ac \leq 0$  ce qui donne

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$$

De plus, s'il y a égalité dans cette inégalité, le discriminant est nul et donc il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $\langle \lambda x + y, \lambda x + y \rangle = 0$  ce qui entraîne  $\lambda x + y = 0$ . La famille  $(x, y)$  est alors liée.

Inversement, supposons la famille  $(x, y)$  liée. Sachant  $x \neq 0$ , on peut écrire  $y = \lambda x$  et vérifier par bilinéarité du produit scalaire l'égalité  $\langle x, y \rangle^2 = \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$ .

**Exemple**

Pour  $E = \mathbb{R}^n$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire canonique, alors pour  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n), (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$ , d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz,

$$\left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n \beta_i^2 \right)$$

**Exemple**

Pour  $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$  muni de  $\langle f, g \rangle = \int_a^b f g$ ,

$$\left( \int_a^b f g \right)^2 \leq \int_a^b f^2 \int_a^b g^2$$

**Exemple**

Pour  $E = M_{n,p}(\mathbb{R})$  muni de  $\langle A, B \rangle = \text{Tr}({}^tAB)$ , alors  $\forall A, B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ ,

$$(\text{Tr}({}^tAB))^2 \leq \text{Tr}({}^tAA) \text{Tr}({}^tBB)$$

**Propriété 10: Inégalité de Minkowski**

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien, alors pour tous  $x, y \in E$ ,

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

De plus, il y a égalité si, et seulement si,  $x$  et  $y$  sont colinéaires et  $\langle x, y \rangle \geq 0$  (ce qui signifie que  $x$  et  $y$  ont même direction et même sens)

**Preuve:**

Soient  $x, y \in E$ .  $\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle$

Par bilinéarité et symétrie du produit scalaire

$$\|x + y\|^2 = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

et on en déduit l'inégalité triangulaire.

De plus, il y a égalité si, et seulement si,  $\langle x, y \rangle = \|x\| \cdot \|y\|$  ce qui signifie  $\langle x, y \rangle \geq 0$  et  $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \cdot \|y\|$  c'est-à-dire que les vecteurs  $x$  et  $y$  sont colinéaires et de même sens.

**Corollaire 1** (Inégalité triangulaire renversée)

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien, alors pour tous  $x, y \in E$ ,

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

**Preuve:**

Soient  $x, y \in E$ .

$$\|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$$

donc

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$$

De façon symétrique, on a aussi

$$\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| = \|x - y\|$$

**I.2 Orthogonalité et base orthonormale**

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace préhilbertien réel.

**Définition 4: Vecteurs orthogonaux**

Deux vecteurs  $x, y \in E$  sont dits orthogonaux si  $\langle x, y \rangle = 0$ . On note  $x \perp y$ .

**Définition 5**

Soit  $I$  un ensemble non vide. La famille  $(x_i)_{i \in I}$  de vecteurs de  $E$  est dite

► orthogonale si

$$\forall i, j \in I, \quad i \neq j \Rightarrow \langle x_i, x_j \rangle = 0$$

► orthonormale si

$$\forall i, j \in I, \quad \langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij} \quad \text{où } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

► base orthogonale si elle est à la fois base de  $E$  et famille orthogonale.

► base orthonormale ou BON si elle est à la fois base de  $E$  et famille orthonormale.

**Exemple**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on définit

$$c_n : x \mapsto \cos(nx) \text{ et } s_n : x \mapsto \sin(nx).$$

Alors

$$\text{► } \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) \cos(mt) dt = \begin{cases} \delta_{nm} & \text{si } n \neq 0 \text{ ou } m \neq 0 \\ 2 & \text{si } n = m = 0 \end{cases};$$

$$\text{► } \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) \sin(mt) dt = \begin{cases} \delta_{nm} & \text{si } n \neq 0 \text{ ou } m \neq 0 \\ 0 & \text{si } n = 0 \text{ ou } m = 0 \end{cases};$$

$$\text{► } \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) \sin(mt) dt = 0.$$

Donc la famille  $\{c_0, c_n, s_n, n \in \mathbb{N}^*\}$  est orthogonale et  $\left\{\frac{c_0}{\sqrt{2}}, c_n, s_n, n \in \mathbb{N}^*\right\}$  est orthonormale.

**Propriété 11: Théorème de Pythagore**

1. Deux vecteurs  $x$  et  $y$  de  $E$  sont orthogonaux si, et seulement si,

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

2. Si la famille  $(x_1, \dots, x_p)$  de vecteurs de  $E$  est orthogonale alors

$$\left\| \sum_{k=1}^p x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^p \|x_k\|^2.$$

**Preuve:**

1. Soit  $x, y \in E$ , on a

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

Donc  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$  si, et seulement si,  $\langle x, y \rangle = 0$

2. Soit  $(x_1, \dots, x_p)$  une famille de vecteurs orthogonaux, on a

$$\left\| \sum_{k=1}^p x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^p \|x_k\|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq p} \underbrace{\langle x_i, x_j \rangle}_{=0} = \sum_{k=1}^p \|x_k\|^2$$

**Propriété 12**

1. Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre ;

2. Toute famille orthonormale est libre

**Preuve:**

1. Soient  $J \subset I$  fini et  $(\lambda_i)_{i \in J}$  une famille de scalaires tels que  $\sum_{i \in J} \lambda_i x_i = 0$ . Par le théorème de Pythagore

$$\sum_{i \in J} \lambda_i^2 \|x_i\|^2 = \left\| \sum_{i \in J} \lambda_i x_i \right\|^2 = 0$$

Donc pour tout  $i \in J$ ,  $\lambda_i^2 \|x_i\|^2 = 0$ , avec  $x_i \neq 0$ , on tire  $\lambda_i = 0$ . Ceci montre que la famille  $(x_i)_{i \in I}$  est alors libre.

2. Une famille orthonormale est une famille orthogonale de vecteurs non nuls

**Propriété 13: Procédé de Gram-Schmidt**

Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une famille libre de  $E$ . Il existe une et une seule famille orthonormée  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  de  $E$  telle que :

1. Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ .
2. Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\langle \varepsilon_k, e_k \rangle > 0$ .

Cette famille est donnée par :

$$\begin{aligned} \bullet \quad \varepsilon_1 &= \frac{e_1}{\|e_1\|}. \\ \bullet \quad \forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, \varepsilon_k &= \frac{e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i}{\left\| e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i \right\|}. \end{aligned}$$

**Preuve:**

La famille  $(e_i)_{i \in I}$  est libre donc  $\forall i \in I$ ,  $e_i \neq 0$ .

**Existence:** Par récurrence, pour  $\varepsilon_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$  on a  $\varepsilon_1 \in \text{Vect}(e_1)$  et  $\langle \varepsilon_1, e_1 \rangle = 1 > 0$ .

Soit  $k \geq 2$  et  $k \in I$ . Supposons qu'on a construit les vecteurs  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-1}$  qui vérifient les deux conditions de la propriété.

On pose  $u_k = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i = e_k - p_{k-1}(e_k)$ .

Le vecteur  $u_k$  est non nul car sinon  $e_k = p_{k-1}(e_k) \in \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-1}) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{k-1})$  donc la famille  $(e_1, \dots, e_k)$  sera liée.

Par construction  $u_k \in \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-1})^\perp$  et on déduit que

$$\begin{aligned} \langle e_k, u_k \rangle &= \langle e_k - p_{k-1}(e_k), u_k \rangle \\ &= \langle u_k, u_k \rangle = \|u_k\|^2 > 0 \end{aligned}$$

On pose  $\varepsilon_k = \frac{u_k}{\|u_k\|}$  donc  $\varepsilon_k$  vérifie les conditions de la propriété.

On déduit l'existence d'une famille  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$

**Unicité:** Soit  $(\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_n)$  une famille orthonormale qui répond aux conditions de la propriété. On a  $\varepsilon'_1 \in \text{Vect}(e_1) = \text{Vect}(\varepsilon_1)$  donc  $\exists \alpha \in \mathbb{K}, \varepsilon'_1 = \alpha \varepsilon_1$ .

On a  $\alpha \langle \varepsilon'_1, e_1 \rangle = \alpha \langle \varepsilon_1, e_1 \rangle > 0$  et  $\langle \varepsilon'_1, e_1 \rangle > 0$  et  $\langle \varepsilon_1, e_1 \rangle > 0$  ? donc  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ . Or,  $1 = \|\varepsilon'_1\| = |\alpha| \|\varepsilon_1\| = |\alpha|$ , donc  $\alpha = 1$  d'où  $\varepsilon'_1 = \varepsilon_1$ .

Soit  $2 \leq k \leq n$ . On a  $\varepsilon'_k \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$  donc  $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$  tels que  $\varepsilon'_k = \alpha_1 \varepsilon_1 + \dots + \alpha_k \varepsilon_k$ .

D'autre part  $\varepsilon'_k \in \text{Vect}(\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_{k-1})^\perp$  et

$$\text{Vect}(\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_{k-1}) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{k-1}) = \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-1})$$

donc  $\varepsilon'_k = \alpha_k \varepsilon_k$ .

On a  $\alpha \langle \varepsilon'_k, e_k \rangle = \alpha \langle \varepsilon_k, e_k \rangle > 0$  et  $\langle \varepsilon'_k, e_k \rangle > 0$  et  $\langle \varepsilon_k, e_k \rangle > 0$ , alors  $\alpha_k > 0$ . Comme  $\|\varepsilon'_k\| = \|\varepsilon_k\| = 1$ , on obtient  $\alpha_k = 1$ .

D'où  $\varepsilon'_k = \varepsilon_k$ . D'où l'unicité.

**Méthode: Obtention d'une famille orthonormale**

Soit  $\mathcal{L} = (e_1, \dots, e_n)$ . Pour obtenir une famille orthonormale à partir de  $\mathcal{L}$  par le procédé de Gram-Schmidt on suit les étapes suivantes :

**Étape 1 :** On calcule  $\varepsilon_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$ .

**Étape  $k \geq 2$  :** On calcule  $u_k = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i$  et on calcule ensuite  $\varepsilon_k = \frac{u_k}{\|u_k\|}$ .

**Exemple**

$\mathbb{R}^3$  muni du produit scalaire usuel de  
Orthonormalisation la famille  $((1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1))$  :

On pose  $e_1 = (1, 1, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 1)$  et  $e_3 = (1, 0, 1)$ . On a la famille  $(e_1, e_2, e_3)$  est libre et soit  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  la famille orthonormale obtenue à partir de  $(e_1, e_2, e_3)$  par le procédé de Gram-Schmidt.

- On a  $\varepsilon_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$ .
- On pose  $u_2 = e_2 - \langle \varepsilon_1, e_2 \rangle \varepsilon_1$ . On a

$$u_2 = \frac{1}{2}(-1, 1, 2)$$

On déduit que  $\varepsilon_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 1, 2)$ .

- On pose  $u_3 = e_3 - \langle \varepsilon_1, e_3 \rangle \varepsilon_1 - \langle \varepsilon_2, e_3 \rangle \varepsilon_2$ . On a

$$u_3 = \frac{2}{3}(1, -1, 1)$$

On déduit que  $\varepsilon_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)$ .

**Exemple**

Orthonormalisation dans  $\mathbb{R}_3[X]$  muni du produit scalaire  $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$  de la base canonique  $(1, X, X^2, X^3)$

On pose  $\forall k \in \{0, 1, 2, 3\}, P_k = X^k$  et soit  $(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$  la famille orthonormale obtenue à partir de  $(P_0, P_1, P_2, P_3)$  par le procédé de Gram-Schmidt.

- On a  $\|P_0\|^2 = \langle P_0, P_0 \rangle = \int_0^1 P_0^2 = \int_0^1 dx = 1$  donc  $Q_0 = \frac{P_0}{\|P_0\|} = 1$ .
- On pose  $R_1 = P_1 - \langle Q_0, P_1 \rangle Q_0$ . On a

$$\langle Q_0, P_1 \rangle = \int_0^1 Q_0(x)P_1(x)dx = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$$

donc  $R_1 = X - \frac{1}{2}$ . Avec

$$\|R_1\|^2 = \langle R_1, R_1 \rangle = \int_0^1 R_1^2 = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

donc  $Q_1 = \frac{R_1}{\|R_1\|} = 2\sqrt{3}\left(X - \frac{1}{2}\right)$ .

- On pose  $R_2 = P_2 - \langle Q_0, P_2 \rangle Q_0 - \langle Q_1, P_2 \rangle Q_1$ . On a :

$$\langle Q_0, P_2 \rangle = \int_0^1 Q_0(x)P_2(x)dx = \int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}$$

et

$$\langle Q_1, P_2 \rangle = \int_0^1 Q_1(x)P_2(x)dx = 2\sqrt{3} \int_0^1 x^2 \left(x - \frac{1}{2}\right) dx = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Donc  $R_2 = X^2 - X + \frac{1}{6}$ . On a  $\|R_2\|^2 = \int_0^1 R_2^2 = \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)^2 dx = \frac{1}{180}$ .

On déduit que  $Q_2 = \frac{R_2}{\|R_2\|} = 6\sqrt{5}\left(X^2 - X + \frac{1}{6}\right)$ .

- On pose  $R_3 = P_3 - \langle Q_0, P_3 \rangle Q_0 - \langle Q_1, P_3 \rangle Q_1 - \langle Q_2, P_3 \rangle Q_2$ . On a

$$\langle Q_0, P_3 \rangle = \int_0^1 Q_0(x)P_3(x)dx = \int_0^1 x^3dx = \frac{1}{4}$$

$$\langle Q_1, P_3 \rangle = \int_0^1 Q_1(x)P_3(x)dx = 2\sqrt{3} \int_0^1 x^3 \left(x - \frac{1}{2}\right) dx = \frac{3\sqrt{3}}{20}$$

$$\langle Q_2, P_3 \rangle = \int_0^1 Q_2(x)P_3(x)dx = 6\sqrt{5} \int_0^1 x^3 \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) dx = \frac{\sqrt{5}}{20}$$

Donc  $R_3 = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{3}{5}X - \frac{1}{20}$ . Or

$$\|R_3\|^2 = \int_0^1 R_3^2 = \int_0^1 \left(X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{3}{5}X - \frac{1}{20}\right)^2 = \frac{1}{2800}$$

On déduit que  $Q_3 = \frac{R_3}{\|R_3\|} = 20\sqrt{7} \left(X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{3}{5}X - \frac{1}{20}\right)$ .

### Théorème 1

Tout espace euclidien, non nul, admet une base orthonormale.

#### Preuve:

Voir le procédé de Gram-Schmidt

### Propriété 14

Toute famille orthonormale d'un espace euclidien  $E$  se complète en une base orthonormale de  $E$ .

### Propriété 15: Calcul avec une base orthonormale

Soient  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace préhilbertien de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormale sur  $E$ . Alors :

$$1. x = \sum_{k=1}^n \langle e_k, x \rangle e_k \text{ et } \|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n \langle e_k, x \rangle^2}.$$

$$2. \text{ Soit } x = \sum_{k=1}^n x_k e_k, y = \sum_{k=1}^n y_k e_k, \text{ on a } \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k \text{ et}$$

$$\|x - y\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2}$$

$$3. \text{ Pour tout } u \in \mathcal{L}(E), \text{ on a } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = (\langle e_i, u(e_j) \rangle)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

$$\text{En particulier } \text{Tr}(u) = \sum_{k=1}^n \langle e_k, u(e_k) \rangle.$$

#### Preuve:

$$1. \text{ Soit } x = \sum_{k=1}^n x_k e_k. \text{ Soit } k \in \{1, \dots, n\}. \text{ On a}$$

$$\langle e_k, x \rangle = \langle e_k, \sum_{i=1}^n x_i e_i \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \langle e_k, e_i \rangle = x_k$$

$$\text{donc } x = \sum_{k=1}^n \langle e_k, x \rangle e_k \text{ et par suite}$$

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \langle x, x \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n x_k e_k, \sum_{\ell=1}^n x_\ell e_\ell \right\rangle \\ &= \sum_{k, \ell=1}^n x_k x_\ell \langle e_k, e_\ell \rangle = \sum_{k, \ell=1}^n x_k x_\ell \delta_{k, \ell} = \sum_{k=1}^n x_k^2 \end{aligned}$$

$$\text{donc } \|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$$

$$2. \text{ Soit } x = \sum_{k=1}^n x_k e_k \text{ et } y = \sum_{k=1}^n y_k e_k \text{ donc}$$

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^n x_k e_k, \sum_{\ell=1}^n y_\ell e_\ell \right\rangle = \sum_{k, \ell=1}^n x_k y_\ell \langle e_k, e_\ell \rangle \\ &= \sum_{k, \ell=1}^n x_k y_\ell \delta_{k, \ell} = \sum_{k=1}^n x_k y_k \end{aligned}$$

$$\text{On a } d(x, y) = \|x - y\| = \left\| \sum_{k=1}^n (x_k - y_k) e_k \right\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2}.$$

3. Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ ,  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $A$  la matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$ . Soit  $j \in \{1, \dots, n\}$  donc  $u(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$  d'où  $\langle e_i, u(e_j) \rangle = a_{ij}$ . On a  $\text{Tr}(u) = \sum_{k=1}^n a_{kk}$  donc
- $$\text{Tr}(u) = \sum_{k=1}^n \langle e_k, u(e_k) \rangle$$

### I.3 Orthogonal d'une partie et supplémentaire orthogonal

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien.

#### Définition 6

- Soit  $A \subset E$  non vide. On appelle orthogonal de  $A$  l'ensemble

$$\{x \in E, \forall a \in A, \langle x, a \rangle = 0\}$$

On le note  $A^\perp$  et par convention  $\emptyset^\perp = E$

- Deux parties  $A, B \subset E$  sont dites orthogonales si

$$\forall a \in A, \forall b \in B, \langle a, b \rangle = 0$$

On note  $A \perp B$ .

- Une famille  $(A_i)_{i \in I}$  de parties de  $E$  est dite orthogonale si les  $A_i$  sont deux à deux orthogonales.

#### Notation :

Le double orthogonal  $(A^\perp)^\perp$  est noté  $A^{\perp\perp}$

#### Propriété 16

Soit  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$  et  $F$  un sous-espace vectoriel

1.  $E^\perp = \{0\}$  et  $\{0\}^\perp = E$  ;
2.  $A^\perp$  est un sous-espace fermé de  $E$  ;
3.  $A \cap A^\perp \subset \{0\}$  et  $F \cap F^\perp = \{0\}$ . En particulier  $F + F^\perp$  est directe
4.  $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$  ;
5.  $A \subset A^{\perp\perp}$  ;
6.  $A^\perp = \text{Vect}(A)^\perp$ . En particulier si  $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ , alors

$$F^\perp = \{x \in E \text{ tel que } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \langle e_i, x \rangle = 0\}$$

#### Définition 7: Supplémentaires orthogonaux

Deux sous-espaces vectoriels  $F$  et  $G$  sont dits supplémentaires orthogonaux s'ils sont supplémentaires et orthogonaux. C'est-à-dire

$$E = F \oplus G \quad \text{et} \quad F \perp G$$

On écrit, alors

$$E = F \overset{\perp}{\oplus} G$$

#### Exemple

Dans  $M_n(\mathbb{R})$  muni du produit scalaire canonique les sous-espaces vectoriels  $S_n(\mathbb{R})$  et  $A_n(\mathbb{R})$  sont supplémentaires orthogonaux.

Soient  $A \in S_n(\mathbb{R})$  et  $B \in A_n(\mathbb{R})$ .

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}({}^tAB) = \text{Tr}(AB)$$

et

$$\langle A, B \rangle = \langle B, A \rangle = \text{Tr}({}^tBA) = -\text{Tr}(BA) = \text{Tr}(AB)$$

donc  $\langle A, B \rangle = 0$ . Ainsi  $S_n(\mathbb{R})$  et  $A_n(\mathbb{R})$  sont orthogonaux et donc en somme directe.

De plus, pour tout  $M \in M_n(\mathbb{R})$ , on peut écrire

$$M = \frac{1}{2}(M + {}^tM) + \frac{1}{2}(M - {}^tM)$$

avec  $\frac{1}{2}(M + {}^tM) \in S_n(\mathbb{R})$  et  $\frac{1}{2}(M - {}^tM) \in A_n(\mathbb{R})$ . Ainsi

$$M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$$

### Propriété 17

Soit  $F$  et  $G$  deux sous-espaces supplémentaires de  $E$ , alors

$$F \perp G \iff G = F^\perp \iff F = G^\perp$$

Si  $F$  admet un supplémentaire orthogonal, celui-ci est unique et c'est  $F^\perp$ . En outre  $F^{\perp\perp} = F$ .

#### Preuve:

►  $G = F^\perp \Rightarrow F \perp G$  et  $F = G^\perp \Rightarrow F \perp G$  sont évidentes

► Montrons  $F \perp G \Rightarrow G = F^\perp$ . On a  $G \subset F^\perp$

Inversement soit  $x \in F^\perp$ , puisque  $E = F \oplus G$ , il existe  $(x_F, x_G) \in F \times G$  tel que  $x = x_F + x_G$ . On a  $\langle x, x_F \rangle = 0$ , car  $x \in F^\perp$  et puisque  $G \perp F$ , alors  $\langle x_F, x_G \rangle = 0$ , donc

$$\|x_F\|^2 = \langle x_F, x_F \rangle = \langle x, x_F \rangle - \langle x_G, x_F \rangle = 0$$

puis  $x_F = 0$ , en conséquence  $x \in G$ , ce qui montre  $F^\perp \subset G$

►  $F$  et  $G$  jouent un rôle symétrique, donc  $F \perp G \Rightarrow F = G^\perp$

#### Attention

Soit  $E = \ell^2(\mathbb{R}) = \{(u_n) \in \mathbb{R}^\mathbb{N} \mid \sum u_n^2 \text{ converge}\}$  et  $F$  l'ensemble des suites à support fini.

$\langle u|v \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$  définit un produit scalaire sur  $E$ .

$F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  engendré par la famille  $(H_n)$  avec  $H_n = (\delta_{k,n})_{k \in \mathbb{N}}$ . Soit  $u = (u_n) \in E$ , on a

$$\begin{aligned} u \in F^\perp &\iff \forall n \in \mathbb{N}, \langle u|H_n \rangle = 0 \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0 \\ &\iff u = 0 \end{aligned}$$

Ainsi  $F^\perp = \{0\}$  et  $F \oplus F^\perp = F$ . Mais  $F \neq E$ , car la suite  $\left(\frac{1}{n+1}\right) \in \ell^2(\mathbb{R}) \setminus F$ .

Ce contre-exemple montre qu'il se peut que  $F$  et  $F^\perp$  ne soient pas supplémentaires.

### Propriété 18

Soit  $F$  un sous-espace de dimension finie d'un espace préhilbertien  $E$ , alors  $E = F \oplus F^\perp$

#### Preuve:

On a  $F \cap F^\perp = \{0\}$ , alors il suffit de montrer que  $E \subset F + F^\perp$

► Si  $F = \{0\}$ , alors  $E = F^\perp = F + F^\perp$ .

► Si  $F \neq \{0\}$ . On pose  $p = \dim F$  et soit  $(e_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$  une base orthonormale de  $F$ . Pour  $x \in E$ , on pose  $y = \sum_{i=1}^p \langle e_i, x \rangle e_i$ .

On voit bien que  $y \in F$  et pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , on a

$$\begin{aligned} \langle e_k, x - y \rangle &= \langle e_k, x \rangle - \sum_{i=1}^p \langle e_i, x \rangle \langle e_k, e_i \rangle \\ &= \langle e_k, x \rangle - \sum_{i=1}^p \langle e_i, x \rangle \delta_{k,i} = 0 \end{aligned}$$

On conclut  $x - y \in \{e_1, \dots, e_p\}^\perp = F^\perp$ , donc  $x = y + (x - y)$  se compose en somme de deux vecteurs  $y \in F$  et  $x - y \in F^\perp$ . On

en déduit donc  $E \subset F + F^\perp$

### Corollaire 2

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel d'un euclidien  $E$ , alors

1.  $E = F \oplus F^\perp$  ;
2.  $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$  ;
3.  $F^{\perp\perp} = F$

### Propriété 19

Si  $(F_i)_{i=1}^p$  une famille finie de sous-espaces vectoriels deux à deux orthogonaux, la somme  $\sum_{i=1}^p F_i$  est directe

$$\sum_{i=1}^p F_i = \bigoplus_{1 \leq i \leq p} F_i$$

On dit alors que les  $F_1, \dots, F_p$  sont en somme directe orthogonale.

Si la somme directe  $\bigoplus_{1 \leq i \leq p} F_i$  égale  $E$ , on dit que  $(F_i)_{i=1}^p$  est une famille de sous-espaces supplémentaires orthogonaux

#### Preuve:

Soit  $(x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \dots \times F_p$  tel que  $\sum_{i=1}^p x_i = 0$ . Pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , on a :

$$\|x_k\|^2 = \langle x_k, \sum_{i=1}^p x_i \rangle = \langle x_k, 0 \rangle = 0$$

### Propriété 20

Soit  $(F_i)_{i=1}^p$  est une famille de sous-espaces supplémentaires orthogonaux, on a :

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \sum_{\substack{j \in \llbracket 1, p \rrbracket \\ j \neq i}} F_j = F_i^\perp$$

#### Preuve:

Soit  $G = \sum_{\substack{j \in \llbracket 1, p \rrbracket \\ j \neq i}} F_j$ , on a  $G \subset F_i^\perp$  et  $E = G \oplus F_i$  donc  $G = F_i^\perp$

## II Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

Soit  $E$  un espace préhilbertien et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension finie.

### II.1 Projections orthogonales

#### Définition 8

On appelle projection orthogonale sur  $F$  la projection vectorielle  $p_F$  sur  $F$  parallèlement à  $F^\perp$ .

### Propriété 21

Soit  $p$  un projecteur de  $E$ . Les assertions suivantes sont équivalentes

1.  $\text{Ker } p$  et  $\text{Im } p$  sont orthogonaux ;
2.  $\text{Ker } p = \text{Im}(p)^\perp$  ;
3.  $\text{Im } p = \text{Ker}(p)^\perp$ .

Tout projecteur vérifiant l'une des trois assertions est projecteur orthogonal.

**Preuve:**

$p$  étant un projecteur, on sait alors que  $E = \text{Imp} \oplus \text{Kerp}$  et les équivalences des trois assertions deviennent évidentes

**Remarque :**

Si  $p$  est un projecteur orthogonal, alors  $Id_E - p$  l'est aussi

**Propriété 22: Caractérisation des projections orthogonales**

Soit  $p$  un projecteur de  $E$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $p$  est un projecteur orthogonal ;
2. Pour tous  $x, y \in E$ , on a  $\langle p(x), y \rangle = \langle x, p(y) \rangle$  ;
3.  $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$ .

**Preuve:**

1  $\Rightarrow$  2) Supposons que  $p$  est un projecteur orthogonal. Soit  $x, y \in E$ , on a

$$\langle p(x), y \rangle = \langle p(x), y - p(y) \rangle + \langle p(x), p(y) \rangle = \langle p(x), p(y) \rangle$$

De façon semblable  $\langle x, p(y) \rangle = \langle x, p(y) - p(x) \rangle + \langle x, p(x) \rangle = \langle x, p(x) \rangle$ .

2  $\Rightarrow$  3) On applique 2) avec  $y = p(x)$ , ce qui donne alors  $p(y) = p^2(x) = p(x)$ . Il vient  $\|p(x)\|^2 = \langle x, p(x) \rangle$ , donc, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :  $\|p(x)\|^2 \leq \|p(x)\| \cdot \|x\|$ , et pour  $p(x) \neq 0$ , par simplification par  $\|p(x)\|$ , on obtient  $\|p(x)\| \leq \|x\|$ . Enfin cette inégalité est vérifiée pour  $p(x) = 0$

3)  $\Rightarrow$  1) Si  $p$  n'est pas orthogonal, alors il existe  $x \in \text{Imp}$  et  $y \in \text{Kerp}$  tels que  $\langle x, y \rangle \neq 0$ , donc  $x \neq 0$  et  $y \neq 0$ .

Avec  $\lambda = -\frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2}$ , on obtient  $\langle y, x + \lambda y \rangle = 0$  et  $\lambda \neq 0$ , puis, d'après le théorème de Pythagore,

$$\|x\|^2 = \|x + \lambda y\|^2 + |\lambda|^2 \|y\|^2 > \|x + \lambda y\|^2$$

donc  $\|x\| > \|x + \lambda y\|$ . Avec  $z = x + \lambda y$ , on trouve  $p(z) = x$  et  $\|z\| < \|p(z)\|$ , ce qui est absurde

**Propriété 23**

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $E$ . Alors

1. La projection  $p_F$  orthogonale sur  $F$  (projection sur  $F$  parallèlement à  $F^\perp$ ) est 1-lipschitzienne.
2. **Expression dans une base orthonormale**  
Si  $B = (e_1, \dots, e_p)$  est une base orthonormée de  $F$  alors

$$\forall x \in E, \quad p_F(x) = \sum_{j=1}^p \langle e_j, x \rangle e_j$$

3. **Minimisation de distance :** Soit  $x \in E$ , alors pour tout  $y \in F$ ,

$$\|x - y\| \geq \|x - p_F(x)\|$$

avec égalité si, et seulement si,  $y = p_F(x)$ . En particulier

$$d(x, F) = \inf\{\|x - y\|, y \in F\} = \|x - p_F(x)\|$$

**Preuve:**

1. D'après la propriété 22.
2. D'après la propriété 18.
3. On écrit  $x - y = (x - p_F(x)) + (p_F(x) - y)$  avec  $x - p_F(x) \in F^\perp$  et  $p_F(x) - y \in F$ .  
Par Pythagore

$$\|x - y\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - y\|^2 \geq \|x - p_F(x)\|^2,$$

avec égalité si, et seulement, si  $y = p_F(x)$

**Corollaire 3**

Soit  $D = \text{Vect}(a)$  avec  $a \neq 0$  et  $H = \text{Vect}(a)^\perp$ . Alors

$$\forall x \in E, \quad p_D(x) = \frac{\langle a, x \rangle}{\|a\|^2} a \text{ et } p_H(x) = x - \frac{\langle a, x \rangle}{\|a\|^2} a$$

et

$$d(x, D) = \left\| x - \frac{\langle x, a \rangle}{\|a\|^2} a \right\| \text{ et } d(x, H) = \frac{|\langle x, a \rangle|}{\|a\|}$$

**Preuve:**

Par la formule précédente, on obtient alors

$$\forall x \in E, \quad p_D(x) = \frac{\langle a, x \rangle}{\|a\|^2} a$$

Puisque  $\text{id} - p_H$  est la projection orthogonale sur la droite  $D = \text{Vect}(a)$ , on obtient alors  $x - p_H(x) = \frac{\langle x, a \rangle}{\|a\|^2} a$  puis

$$p_H(x) = x - \frac{\langle x, a \rangle}{\|a\|^2} a$$

**Exemple**

Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien de dimension 3 muni d'une base orthonormée  $\mathcal{B} = (i, j, k)$ .

Soit  $P : x + y - z = 0$ ,  $D = \text{Vect}(a)$  avec  $a = i - k$  et  $u = i + 2j - k$ . Calculons  $d(u, D)$  et  $d(u, P)$ .

Soit  $v = (1, 1, -1)$ , on a  $P = \text{Vect}(v)^\perp$ . Par les formules précédentes

$$d(u, P) = \frac{|\langle u, v \rangle|}{\|v\|} = \frac{|1 + 2 + 1|}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}$$

et

$$d(u, D) = \left\| u - \frac{\langle u, a \rangle}{\|a\|^2} a \right\| = \left\| \frac{3}{2}i + 2j - \frac{1}{2} \right\| = \frac{\sqrt{26}}{2}$$

**Propriété 24: Inégalité de Bessel**

Soit  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une famille orthonormale de  $E$  et  $x \in E$ , alors la famille  $(\langle e_n, x \rangle^2)_{n \in \mathbb{N}}$  est sommable et

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle e_n, x \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

**Preuve:**

Pour tout partie finie  $J$  de  $\mathbb{N}$  on a :  $\sum_{i \in J} \langle e_i | x \rangle e_i$  est le projeté orthogonal de  $x$  sur  $\text{Vect}(e_i, i \in J)$

## II.2 Suites totales, suites hilbertiennes

$E$  un espace préhilbertien réel et  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $E$

**Définition 9: Famille totale, base hilbertienne**

Soit  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $E$ .

1.  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dite totale si l'espace vectoriel qu'elle engendre est dense dans  $E$ . Autrement-dit  $\overline{\text{Vect}(e_n, n \in \mathbb{N})} = E$
2.  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dite base hilbertienne si elle est à la fois orthonormale et totale

**Remarque :**

Soit  $x \in H = \text{Vect}(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , alors il existe  $J$  finie de  $\mathbb{N}$  et  $(\alpha_i)_{i \in J}$  tels que

$$x = \sum_{i \in J} \alpha_i e_i$$

**Propriété 25**

Soit  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une base hilbertienne  $E$  et  $x \in E$ .

1. En notant  $P_n$  le projecteur orthogonal de  $E$  sur  $\text{Vect}(e_0, \dots, e_n)$ , alors

$$\forall x \in E, \quad P_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$$

La série  $\sum_{n \geq 0} \langle e_n, x \rangle e_n$  converge de somme  $x$

2. La série  $\sum_{n \geq 0} \langle e_n, x \rangle^2$  converge de somme  $\|x\|^2$ , c'est-à-dire

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \langle e_n, x \rangle^2 = \|x\|^2 \quad (\text{Égalité de Parseval})$$

### Preuve:

On fixe  $x \in E$

1. Soit  $\varepsilon > 0$ . Par hypothèse la suite  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est totale, donc il existe  $y \in \text{Vect}(e_n, n \in \mathbb{N})$  tel que

$$\|x - y\| < \varepsilon$$

Soit  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $y \in \text{Vect}(e_0, \dots, e_N)$ . La suite  $(F_n)$  définie par  $F_n = \text{Vect}(e_0, \dots, e_n)$  est croissante au sens de l'inclusion, alors pour tout  $n \geq N$ , on a  $y \in F_n$  et

$$\|P_n(x) - x\| \leq \|y - x\| < \varepsilon$$

2. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $F_n = \text{Vect}(e_0, \dots, e_n)$ . On a

$$\|x - P_n(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=0}^n \langle e_k, x \rangle^2$$

Comme  $P_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , alors  $\sum_{k=0}^n \langle e_k, x \rangle^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \|x\|^2$

### Application 1: Séries de Fourier

Soit  $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ , on définit les coefficients de Fourier de  $f$  par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt;$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt$$

Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

Et

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

### Exemple

Soit  $f$  la fonction  $2\pi$ -périodique définie sur  $[-\pi, \pi]$  par  $f(x) = x^2$ .

1. Montrer que  $\forall x \in [-\pi, \pi], \quad x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$

2. Dédurre la somme  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

3. En utilisant l'égalité de Parseval, déduire  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$

1. La fonction  $f$  est paire donc  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = 0$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On a  $a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx) dx = \frac{4(-1)^n}{n^2}$ . On a  $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}$ . D'où

$$\forall x \in [-\pi, \pi], \quad x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

2. Pour  $x = \pi$ , on obtient  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

3. D'après la formule de Parseval on a

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{2\pi^4}{9} + 16 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} \quad \text{Puis} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

## II.3 Symétrie orthogonale

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension finie.

### Définition 10

On appelle symétrie orthogonale par rapport à  $F$  la symétrie vectorielle  $s_F$  par rapport à  $F$  parallèlement à  $F^\perp$ .

Si  $F$  est un hyperplan de  $E$ , on dit que  $s_F$  est la réflexion par rapport à  $F$ .

### Propriété 26

Soient  $a, b \in E$  tels que  $\|a\| = \|b\|$  et  $a \neq b$ .

Il existe une réflexion et une seule qui échange  $a$  et  $b$ .

#### Preuve:

► **Analyse** : Soit  $s$  une réflexion d'hyperplan  $H$  solution.

On a  $s(a) = b$  et  $s(b) = a$  donc  $s(b - a) = a - b = -(b - a)$ . Par suite  $b - a \in H^\perp$ . Or  $b - a \neq 0$  donc  $H = \text{Vect}(b - a)^\perp$ . Ceci détermine  $H$ , et donc  $s$ , de façon unique.

► **Synthèse** : Soit  $s$  la réflexion d'hyperplan  $H = \text{Vect}(b - a)^\perp$ . Puisque  $\|a\| = \|b\|$ , on a  $(a + b | a - b) = \|a\|^2 - \|b\|^2 = 0$  donc  $a + b \in H$ . Or  $a = \frac{1}{2}(a + b) + \frac{1}{2}(a - b)$  donc  $s(a) = \frac{1}{2}(a + b) - \frac{1}{2}(a - b) = b$  et  $s(b) = s^2(a) = a$ . Ainsi  $s$  est solution.

### Propriété 27

$s_F$  est un endomorphisme de  $E$  vérifiant  $s_F^2 = \text{id}$ ,  $\text{Ker}(s_F - \text{id}) = F$  et  $\text{Ker}(s_F + \text{id}) = F^\perp$ . De plus  $-s_F = s_{F^\perp}$  et  $s_F = 2p_F - \text{id}$ .

#### Preuve:

Puisque  $s_F$  est la symétrie par rapport à  $F$  et parallèlement à  $F^\perp$ ,  $s_F$  est un endomorphisme de  $E$  vérifiant  $s_F^2 = \text{Id}$ . Aussi  $\text{Ker}(s_F - \text{Id}) = F$  (espace par rapport auquel a lieu la symétrie) et  $\text{Ker}(s_F + \text{Id}) = F^\perp$  (espace parallèlement auquel a lieu la symétrie).

De plus  $-s_F$  est la symétrie complémentaire de  $s_F$  c'est-à-dire la symétrie par rapport à  $F^\perp$  parallèlement à  $F = F^{\perp\perp}$ , autrement dit la symétrie par rapport à  $F^\perp$ .

Enfin  $s_F = 2p_F - \text{Id}$  car  $p_F$  est la projection sur  $F$  parallèlement à  $F^\perp$ .

### Propriété 28

Si  $B = (e_1, \dots, e_p)$  est une base orthonormée de  $F$  alors

$$\forall x \in E, \quad s_F(x) = 2 \sum_{j=1}^p \langle x, e_j \rangle e_j - x$$

#### Preuve:

Pour tout  $x \in E$ ,  $p_F(x) = \sum_{j=1}^p \langle x, e_j \rangle e_j$

#### Exemple

[Symétrie par rapport à une droite vectorielle] Soit  $D = \text{Vect}(a)$  avec  $a \neq 0$ . Alors

$$\forall x \in E, \quad s_D(x) = 2 \frac{\langle x, a \rangle}{\|a\|^2} a - x$$

#### Exemple

[Réflexion] Soit  $H = \text{Vect}(a)^\perp$  avec  $a \neq 0$ . Alors

$$\forall x \in E, \quad s_H(x) = x - 2 \frac{\langle x, a \rangle}{\|a\|^2} a$$

#### Exemple

Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien de dimension 3 muni d'une base orthonormée  $B = (e_1, e_2, e_3)$ .

Soit  $s$  la réflexion par rapport au plan  $P : x + y - z = 0$ .

Formons la matrice  $A$  de  $s$  dans la base  $B$ .

Soit  $a = i + j - k$  un vecteur normal à  $P$ , alors pour tout  $x \in E$ , on a :

$$s(x) = x - 2 \frac{\langle x, a \rangle}{\|a\|^2} a$$

On en déduit

$$\begin{aligned} s(i) &= i - \frac{2}{3}(i + j - k) = \frac{1}{3}(i - 2j + 2k) \\ s(j) &= j - \frac{2}{3}(i + j - k) = \frac{1}{3}(-2i + j + 2k) \\ s(k) &= k + \frac{2}{3}(i + j - k) = \frac{1}{3}(2i + 2j + k) \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

### Propriété 29: Caractérisation des symétries orthogonales

Soit  $s \in \mathcal{L}(E)$  une symétrie. On a équivalence entre :

1.  $s$  est une symétrie orthogonale
2.  $\forall x, y \in E, (s(x)|y) = (x|s(y))$ .
3.  $\forall x \in E, \|s(x)\| = \|x\|$

**Preuve:**

1  $\Rightarrow$  2) Supposons que  $s$  est une symétrie orthogonale.

On sait déjà  $s^2 = id$ . Soit  $p = \frac{1}{2}(s + id)$  la projection associée à la symétrie  $s$ .

Pour tout  $x, y \in E$ . On a

$$(s(x)|y) = (2p(x) - x|y) = 2(p(x)|y) - \langle x, y \rangle$$

Or  $(p(x)|y) = (x|p(y))$  car la projection  $p$  est orthogonale donc

$$(s(x)|y) = 2(x|p(y)) - \langle x, y \rangle = (x|2p(y) - y) = (x|s(y))$$

2  $\Rightarrow$  1) Puisque  $s^2 = id$ , les espaces  $F = \text{Ker}(s - id)$  et  $G = \text{Ker}(s + Id)$  sont supplémentaires dans  $E$  et  $q$  est la symétrie par rapport à  $F$  et parallèlement à  $G$ . Pour conclure, il suffit de montrer que  $G = F^\perp$ .

Soient  $x \in F$  et  $y \in G$ .

$$\langle x, y \rangle = (s(x)|y) = (x|s(y)) = (x|-y) = -\langle x, y \rangle \quad \text{donc} \quad \langle x, y \rangle = 0$$

On en déduit que les espaces  $F$  et  $G$  sont orthogonaux. Ainsi  $G \subset F^\perp$ , or  $\dim G = \dim E - \dim F = \dim F^\perp$  donc  $G = F^\perp$ .

### Corollaire 4

La matrice d'une symétrie orthogonale dans une base orthonormée est symétrique.

**Preuve:**

Notons  $A = (a_{i,j})$  la matrice d'une symétrie orthogonale  $s$  dans une base orthonormée  $B = (e_1, \dots, e_n)$ .

Le coefficient d'indice  $(i, j)$  de  $A$  est la  $i$ ème composante dans  $B$  de l'image du  $j$ ème vecteur de base par  $p$ . Ainsi  $a_{i,j} = (e_i|s(e_j))$ .

Or  $p$  est une symétrie orthogonale donc  $a_{i,j} = (s(e_i)|e_j) = (e_i|s(e_j)) = a_{j,i}$ . Par suite la matrice  $A$  est symétrique.

### Corollaire 5

Les symétries orthogonales conservent le produit scalaire

$$\forall x, y \in E, (s(x)|s(y)) = \langle x, y \rangle$$

En particulier, les symétries orthogonales conservent la norme

$$\forall x \in E, \|s(x)\| = \|x\|$$

**Preuve:**

Soit  $x, y \in E$ , on a

$$(s(x)|s(y)) = (x|s^2(y)) = \langle x, y \rangle$$

### III Endomorphismes orthogonaux d'un euclidien

$E$  désigne un espace euclidien de dimension finie  $n \geq 1$

#### III.1 Matrices orthogonales

##### Définition 11

Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est dite orthogonale si  ${}^tAA = I_n$ .

On note  $O_n(\mathbb{R})$  l'ensemble de matrices orthogonales.

##### Exemple

$I_n \in O_n(\mathbb{R})$  et  $-I_n \in O_n(\mathbb{R})$

##### Propriété 30

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de colonnes  $C_1, \dots, C_n$  et de lignes  $L_1, \dots, L_n$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $A \in O_n(\mathbb{R})$  ;
2.  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  et  $A^{-1} = {}^tA$  ;
3.  $A^tA = I_n$  ;
4. la famille  $(C_1, \dots, C_n)$  est orthonormale pour le produit scalaire canonique de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  ;
5. la famille  $(L_1, \dots, L_n)$  est orthonormale pour le produit scalaire canonique de  $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$  ;
6.  $A$  est la matrice de passage d'une BON à une BON

**Preuve:**

Posons  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ .

Les trois assertions sont équivalentes.

$1 \iff 4$ . On a  ${}^tA = (a_{j,i})_{1 \leq i,j \leq n}$  et  ${}^tAA = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  avec

$$b_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{k,i} a_{k,j} = \langle C_i, C_j \rangle$$

donc

$${}^tAA = I_n \iff \forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \langle C_i, C_j \rangle = b_{i,j} = \delta_{i,j}$$

$3 \iff 5$ . Posons  $A^tA = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ , alors

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} a_{j,k} = \langle L_i, L_j \rangle$$

donc

$$A^tA = I_n \iff \forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \langle L_i, L_j \rangle = c_{i,j} = \delta_{i,j}$$

$4 \iff 6$ . Soit  $B = (e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $E$  et  $B' = (e'_1, \dots, e'_n)$  une famille de vecteurs de  $E$ . Notons  $p_{i,j}$  le coefficient général de la matrice  $P = \text{Mat}_B(e'_1, \dots, e'_n)$ .  $p_{i,j}$  est la  $i$ ème composante dans la base  $B$  du vecteur  $e'_j$ . Notons  $p'_{i,j}$  le coefficient général de la matrice  ${}^tP$ . On a  $p'_{i,j} = p_{j,i}$ . Enfin, notons  $a_{i,j}$  le coefficient général de la matrice  ${}^tPP$ . On a

$$a_{i,j} = \sum_{k=1}^n p'_{i,k} p_{k,j} = \sum_{k=1}^n p_{k,i} p_{k,j}$$

Or par calcul du produit scalaire de deux vecteurs par ses composantes dans une base orthonormée, on a aussi

$$(e'_i | e'_j) = \sum_{k=1}^n p_{k,i} p_{k,j}$$

Ainsi  $a_{i,j} = (e'_i | e'_j)$  et donc  ${}^tPP = I_n$  si, et seulement si, la famille  $B'$  est orthonormée et cette dernière est alors une base orthonormée de  $E$ .

**Exemple**

Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ . Montrons que  $A \in O_3(\mathbb{R})$

En notant  $C_1, C_2$  et  $C_3$  les colonnes de  $A$  on a

$$\langle C_1, C_2 \rangle = \langle C_2, C_3 \rangle = \langle C_1, C_3 \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \|C_1\| = \|C_2\| = \|C_3\| = 1$$

On en déduit  $A \in O_3(\mathbb{R})$ .

**Propriété 31**

1.  $O_n(\mathbb{R})$  est un sous-groupe compact de  $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$  appelé groupe orthogonal d'ordre  $n$ .
2.  $\det(O_n(\mathbb{R})) = \{-1, 1\}$ .
3.  $O_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}), \det(A) = 1\}$  un sous-groupe compact du groupe orthogonal d'ordre  $n$ , appelé groupe spécial orthogonal d'ordre  $n$  et noté aussi  $SO_n(\mathbb{R})$
4.  $O_n^-(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}), \det(A) = -1\}$  est un compact de  $O_n(\mathbb{R})$

**Preuve:**

1.  $\blacktriangleright O_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R}), I_n \in O_n(\mathbb{R})$ .

$\blacktriangleright$  Soient  $A, B \in O_n(\mathbb{R})$ .

$AB$  est inversible et  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = {}^tB {}^tA = {}^t(AB)$  donc  $AB \in O_n(\mathbb{R})$ .

$\blacktriangleright$  Soit  $A \in O_n(\mathbb{R})$ .

$A^{-1}$  est inversible et  $(A^{-1})^{-1} = ({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$  donc  $A^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$ .

Donc  $O_n(\mathbb{R})$  est un sous-groupe de  $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$ .

L'application  $f : A \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto {}^tAA$  est continue et  $\{I_n\}$  fermé, donc  $O_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{I_n\})$  est un fermé relatif à  $M_n(\mathbb{R})$  et c'est donc une partie fermée. Enfin, considérons  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique sur  $M_n(\mathbb{R})$ . Pour  $A \in O_n(\mathbb{R}), \|A\| = \sqrt{\text{Tr}({}^tAA)} = \sqrt{\text{Tr}(I_n)} = \sqrt{n}$ . Par suite  $O_n(\mathbb{R})$  est une partie bornée. Puisque  $M_n(\mathbb{R})$  est de dimension finie,  $O_n(\mathbb{R})$  est une partie compacte car fermée et bornée.

2. Soit  $A \in O_n(\mathbb{R})$ , on a

$$\det(A)^2 = \det({}^tAA) = 1$$

donc  $\det(A) \in \{-1, 1\}$ . Or  $\det(I_n) = 1$  et  $\det(\text{diag}(-1, 1, \dots, 1)) = -1$  et  $I_n, \text{diag}(-1, 1, \dots, 1) \in O_n(\mathbb{R})$ , donc  $\det(O_n(\mathbb{R})) = \{-1, 1\}$ .

3.  $O_n^+(\mathbb{R}) = O_n(\mathbb{R}) \cap \text{Ker}(\det)$  est un sous-groupe fermé d'un groupe compact.

4. Soit  $O \in O_n^-(\mathbb{R})$ , l'application  $\varphi : A \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto AO$  est continue et  $O_n^-(\mathbb{R}) = \varphi(O_n^+(\mathbb{R}))$

**Attention**

$O_n^-(\mathbb{R})$  n'est pas un sous-groupe de  $O_n(\mathbb{R})$  puisque le produit de deux matrices de  $O_n^-(\mathbb{R})$  appartient à  $O_n^+(\mathbb{R})$ .

**Propriété 32: Classification de  $O_2(\mathbb{R})$** 

Soit  $M \in M_2(\mathbb{R})$

1.  $M \in O_2^+(\mathbb{R})$  si, et seulement si, il existe un réel  $\theta$  unique à  $2\pi$  près vérifiant

$$M = R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$(O_2^+(\mathbb{R}), \times)$  est un groupe commutatif.

2.  $M \in O_2^-(\mathbb{R})$  si, et seulement si, il existe un réel  $\theta$  unique à  $2\pi$  près vérifiant

$$M = S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

En outre  $S(\theta)^2 = I_2$  et  $S(\theta) \stackrel{\perp}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

**Preuve:**

Soit  $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ .

1. ► Puisque  $a^2 + c^2 = 1$ , il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que  $a = \cos \theta$  et  $b = \sin \theta$ .  
On a  $\det(M) = ad - bc = 1$  et  $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1$  donc

$$(a-d)^2 + (b+c)^2 = a^2 + c^2 + a^2 + c^2 - 2(ad - bc) = 0$$

On en déduit  $a = d$  et  $c = -b$  puis  $M = R(\theta)$ .

- Par le calcul et en exploitant les formules de développement de  $\cos(\theta + \theta')$  et  $\sin(\theta + \theta')$ , on obtient

$$R(\theta) \times R(\theta') = R(\theta + \theta').$$

En particulier, les matrices de rotation commutent entre elles. En outre

$$R(\theta)^{-1} = {}^t R(\theta) = R(-\theta).$$

2. Comme  $a^2 + b^2 = 1$ , il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que  $a = \cos \theta$  et  $b = \sin \theta$ .  
On a  $\det M = ad - bc = -1$  et  $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1$  donc

$$(a+d)^2 + (b-c)^2 = a^2 + c^2 + a^2 + c^2 - 2(ad - bc) = 0$$

On en déduit  $a = -d$  et  $c = b$  puis  $M = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$

**III.2 Groupe orthogonal d'un espace euclidien****Définition 12**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On dit que  $u$  est orthogonal ou une isométrie si  $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$ .

$O(E)$  désigne l'ensemble des automorphismes orthogonaux.

**Remarque :**

$Id_E \in O(E)$

**Propriété 33**

Les seules valeurs propres réelles possibles d'un endomorphisme orthogonal sont  $-1$  et  $1$ . En particulier tout endomorphisme orthogonal est un isomorphisme

**Preuve:**

Si  $\lambda$  est une valeur propre réelle de  $u \in \mathcal{O}(E)$  et  $x \in E$  un vecteur propre associé unitaire, des égalités  $\|u(x)\| = \|x\|$  et  $u(x) = \lambda x$ , on déduit alors que  $|\lambda| = 1$ .

**Propriété 34: Propriétés caractéristiques**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $u \in O(E)$  ;
2.  $\forall x, y \in E, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$  ;
3.  $u$  transforme toute BON de  $E$  en une BON de  $E$  ;
4.  $u$  transforme au moins une BON de  $E$  en une BON de  $E$ .
5. Il existe une BON de  $E$  telle que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in O_n(\mathbb{R})$

**Preuve:**

$1 \Rightarrow 2)$  si l'endomorphisme  $u$  conserve la norme, alors d'après l'identité de polarisation, on a :

$$\begin{aligned} 4 \langle u(x), u(y) \rangle &= \|u(x) + u(y)\|^2 - \|u(x) - u(y)\|^2 \\ &= \|u(x+y)\|^2 - \|u(x-y)\|^2 \\ &= \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4 \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

$2 \Rightarrow 3)$  Soit  $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$  une base orthonormale de  $E$ , alors pour tout  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :

$$\langle u(e_i), u(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$$

Donc  $(u(e_i))_{1 \leq i \leq n}$  est une famille orthonormale de  $n$  éléments, c'est une BON

3  $\Rightarrow$  4) Évidente

4  $\Rightarrow$  5) Supposons l'endomorphisme  $u$  orthogonal. La famille  $(u(e_1), \dots, u(e_n))$  est orthonormale et c'est donc une base orthonormée. Puisque

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n))$$

$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in O_n(\mathbb{R})$  car matrice de passage entre deux bases orthonormales.

5  $\Rightarrow$  1) Supposons  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in O_n(\mathbb{R})$ .

Soit  $x$  un vecteur de  $E$  de matrice  $X$  dans la base  $\mathcal{B}$ . Puisque la base  $\mathcal{B}$  est orthonormale  $\|x\|^2 = {}^tXX$ . Puisque la matrice de  $u(x)$  dans  $\mathcal{B}$  est  $AX$ , alors

$$\|u(x)\|^2 = {}^t(AX)AX = {}^tX{}^tAAX = {}^tXX = \|x\|^2$$

Ainsi  $u$  conserve la norme et donc est une isométrie vectorielle.

### Exemple

Une symétrie orthogonale est un automorphisme orthogonal.

### Attention

Il est essentiel de vérifier que la base  $\mathcal{B}$  est orthonormale pour exploiter ce résultat.

### Théorème 2

1. Soit  $u \in O(E)$ , alors  $\text{Sp}(u) \subset \{-1, 1\}$ .  
En particulier tout endomorphisme orthogonal est un isomorphisme
2. L'ensemble  $O(E)$  des isométries vectorielles de  $E$  est un sous-groupe compact de  $(\text{GL}(E), \circ)$  appelé groupe orthogonal de  $E$  ;
3. Pour tout  $u \in O(E)$ ,  $|\det(u)| = 1$  ;
4.  $SO(E) = \{u \in O(E), \det(u) = 1\}$  est un sous-groupe compact de  $(O(E), \circ)$  appelé groupe spécial orthogonal de  $E$ .
5. Si  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $u$ , alors  $F^\perp$  est stable par  $u$  et l'application induite par  $u$  sur  $F$  ( resp sur  $F^\perp$  ) est un élément de  $O(F)$  ( resp sur  $O(F^\perp)$  )

### Preuve:

1. Si  $\lambda$  est une valeur propre réelle de  $u \in O(E)$  et  $x \in E$  un vecteur propre associé unitaire. Des égalités  $\|u(x)\| = \|x\|$  et  $u(x) = \lambda x$ , on déduit alors que  $|\lambda| = 1$ .
2. Considérons  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $E$  et

$$\Phi: \begin{cases} M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ M & \longmapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \end{cases}$$

On a  $\Phi(O_n(\mathbb{R})) = O(E)$  et  $\Phi$  est continue (linéaire au départ d'un espace de dimension finie) donc  $O(E)$  est compact.  $\Phi$  est un morphisme de groupe multiplicatif donc  $O(E)$  est un sous-groupe de  $(\text{GL}(E), \circ)$ .

3. Soit  $\mathcal{B}$  une base orthonormale de  $E$ , alors  $u \in O(E)$  si, et seulement si,  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in O_n(\mathbb{R})$
5. Si  $F$  est stable par  $u$ ,  $u(F) \subset F$ . Notons  $u_F$  l'application induite par  $u$  sur  $F$ ; alors  $u_F \in \mathcal{L}(F)$ . Comme  $F \subset E$ , on a :

$$\forall x \in F, \quad \|u_F(x)\| = \|u(x)\| = \|x\|$$

Donc  $u_F \in O(F)$ .

Soit  $y \in F^\perp$  et soit  $x \in F$ . Comme  $u_F \in O(F)$ , il existe  $x' \in F$  tel que  $x = u(x')$  et

$$\langle x, u(y) \rangle = \langle u(x'), u(y) \rangle = \langle x', y \rangle = 0$$

Donc  $F^\perp$  est stable par  $u$ . Par un raisonnement analogue au précédent appliqué à  $u$  et  $F^\perp$  on prouve que  $u_{F^\perp} \in O(F^\perp)$

## III.3 Automorphismes orthogonaux du plan

$E$  désigne un plan euclidien orienté.

**Propriété 35: Classification de  $\mathcal{O}_2^+(\mathbb{R})$** 

Pour toute matrice  $M \in \mathcal{O}_2^+(\mathbb{R})$  il existe un réel  $\theta$  unique à  $2\pi$  près vérifiant

$$M = R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ matrice de rotation d'angle } \theta$$

De plus, pour tout  $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ .

$$1. R(\theta) = R(\theta') \iff \theta \equiv \theta' \quad [2\pi]$$

$$2. R(\theta) \times R(\theta') = R(\theta + \theta').$$

En particulier, les matrices de rotation commutent entre elles.

$$3. R(\theta)^{-1} = {}^tR(\theta) = R(-\theta)$$

**Preuve:**

Soit  $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_2^+(\mathbb{R})$ .

Puisque  $a^2 + c^2 = 1$ , il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que  $a = \cos \theta$  et  $c = \sin \theta$ .

On a  $\det M = ad - bc = 1$  et  $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1$  donc  $(a-d)^2 + (b+c)^2 = a^2 + c^2 + b^2 + d^2 - 2(ad - bc) = 0$ . On en déduit  $a = d$  et  $c = -b$  puis  $M = R(\theta)$

1. Car

$$\begin{cases} \cos \theta = \cos \theta' \\ \sin \theta = \sin \theta' \end{cases} \iff \theta \equiv \theta' \quad [2\pi]$$

2. Par le calcul et en exploitant les formules de développement de  $\cos(\theta + \theta')$  et  $\sin(\theta + \theta')$ .

3. car  $R(\theta) \in \mathcal{O}_2^+(\mathbb{R})$

**Corollaire 6**

$(\mathcal{O}_2^+(\mathbb{R}), \times)$  est un groupe commutatif.

**Preuve:**

Car les matrices de rotation commutent entre elles.

**Propriété 36**

[Rotation du plan euclidien orienté] La matrice d'un endomorphisme  $r \in \mathcal{O}^+(E)$  est la même dans toute base orthonormée directe du plan  $E$ .

Plus précisément, il existe  $\theta \in \mathbb{R}$ , unique à  $2\pi$  près, tel que matrice de  $r$  dans toute base orthonormée directe du plan  $E$  est  $R(\theta)$

**Preuve:**

Soient  $B$  et  $B'$  deux bases orthonormées directes de  $E$  et  $P$  la matrice de passage de  $B$  à  $B'$ . Puisque  $B$  et  $B'$  sont orthonormées directes  $P \in \mathcal{O}_2^+(\mathbb{R})$ .

Notons  $A$  et  $A'$  les matrices de l'endomorphisme  $r$  dans les bases  $B$  et  $B'$ . Ces matrices appartiennent à  $\mathcal{O}_2^+(\mathbb{R})$ .

Par la formule de changement de base,  $A' = P^{-1}AP$ .

Or  $A, P \in \mathcal{O}_2^+(\mathbb{R})$  et le groupe  $(\mathcal{O}_2^+(\mathbb{R}), \times)$  est commutatif donc  $A' = P^{-1}PA = A$ .

Ainsi, la représentation de l'endomorphisme  $r$  est la même dans toute base orthonormée directe choisie et puisque celle-ci est une matrice de  $\mathcal{O}_2^+(\mathbb{R})$ , c'est une matrice  $R(\theta)$  avec  $\theta$  déterminé de façon unique à  $2\pi$  près.

**Définition 13**

L'automorphisme orthogonal positif représenté par la matrice  $R(\theta)$  dans les bases orthonormées directes du plan  $E$  est appelé rotation d'angle  $\theta$  et noté  $\text{Rot}_\theta$

**Exemple**

$$\text{Id}_E = \text{Rot}_0, -\text{Id}_E = \text{Rot}_\pi.$$

**Propriété 37**

Soit  $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ .

$$1. \text{Rot}_\theta = \text{Rot}_{\theta'} \iff \theta \equiv \theta' \quad [2\pi]$$

$$2. \operatorname{Rot}_\theta \circ \operatorname{Rot}_{\theta'} = \operatorname{Rot}_{\theta+\theta'} = \operatorname{Rot}_{\theta'} \circ \operatorname{Rot}_\theta$$

$$3. \operatorname{Rot}_\theta^{-1} = \operatorname{Rot}_{-\theta}$$

**Preuve:**

Il suffit de transposer matriciellement les énoncés.

**Corollaire 7**

$\mathcal{O}^+(E) = \{\operatorname{Rot}_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\}$  est un groupe abélien.

**Propriété 38: Classification de  $\mathcal{O}_2^-(\mathbb{R})$** 

Pour toute matrice  $M \in \mathcal{O}_2^-(\mathbb{R})$  il existe un réel  $\theta$  unique à  $2\pi$  près vérifiant

$$M = S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

Elles vérifient  $S(\theta)^2 = I_2$

**Preuve:**

$$\text{Soit } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Comme  $a^2 + b^2 = 1$ , il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que  $a = \cos \theta$  et  $b = \sin \theta$ .

On a  $\det M = ad - bc = -1$  et  $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1$  donc  $(a+d)^2 + (b-c)^2 = a^2 + c^2 + a^2 + c^2 - 2(ad - bc) = 0$ . On en déduit

$$a = -d \text{ et } c = b \text{ puis } M = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

**Propriété 39: Automorphismes orthogonaux négatifs du plan**

Soit  $B = (i, j)$  une base orthonormée de  $E$ .

Pour tout automorphisme orthogonal négatif  $s$  de  $E$ , il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que

$$\operatorname{Mat}_B(s) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

De plus  $s$  correspond alors à la réflexion par rapport à la droite vectorielle dirigée par le vecteur  $u = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)i + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)j$ .

Il existe une base  $\mathcal{B}'$  dans laquelle la symétrie est représentée par la matrice

$$S(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**Preuve:**

Considérons  $\sigma$  la réflexion par rapport à la droite vectorielle engendrée par le vecteur unitaire  $u = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)i + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)j$ . Pour tout vecteur  $x$  de  $E$ , on a  $\sigma(x) = 2\langle x, u \rangle u - x$  donc

$$\sigma(i) = \left(2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1\right)i + 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)j = \cos \theta i + \sin \theta j \text{ et}$$

$$\sigma(j) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)i - \left(2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1\right)j = \sin \theta i - \cos \theta j.$$

On en déduit que les applications linéaires  $\sigma$  et  $s$  prennent les mêmes valeurs sur  $i$  et  $j$  et sont donc égales.

**III.4 Réduction des endomorphismes orthogonaux****Lemme 1**

Soit  $u \in \mathcal{O}(E)$  et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $u$ , alors  $F^\perp$  est stable par  $u$

**Lemme 2**

Soit  $u \in \mathcal{O}(E)$ . Il existe des sous espaces vectoriels de  $E$ ,  $P_1, \dots, P_r$ , de dimension égale à 1 ou 2, deux à deux

orthogonaux, stables par  $u$  et tels que  $E = \bigoplus_{1 \leq j \leq r} P_j$

**Preuve:**

On procède par récurrence sur la dimension  $n = \dim E \geq 1$ .

- Pour  $n = 1$  ou  $2$ , le résultat est évident.
- Supposons le acquis pour tout endomorphisme orthogonal sur un espace vectoriel euclidien de dimension  $p$  comprise entre  $1$  et  $n-1$ , avec  $n \geq 3$ .

Si  $P_1$  est un sous espace vectoriel de  $E$  non réduit à  $\{0\}$  de dimension au plus égale à  $2$  stable par  $u \in \mathcal{O}(E)$  alors  $P_1^\perp$  est stable par  $u$ .

Comme  $1 \leq n-1 \leq \dim P_1^\perp \leq n-1$ , on peut trouver des sous espaces vectoriels de  $E$ ,  $P_2, \dots, P_r$ , de dimension au plus  $2$ , deux à deux orthogonaux et stables par la restriction de  $u$  à  $P_1^\perp$ , donc par  $u$ , tels que  $P_1^\perp = \bigoplus_{j=2}^r P_j$ . On a alors  $E = P_1 \oplus P_1^\perp$ .

Dans le cas où  $n = 2$ , la forme des matrices orthogonales est particulièrement simple : si  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ , il existe alors un unique réel  $\theta \in [0, 2\pi[$  tel que :

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

et dans le deuxième cas,  $A$  est orthogonalement semblable à  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , ce que l'on peut vérifier avec :

$$\begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) & -\sin(\frac{\theta}{2}) \\ \sin(\frac{\theta}{2}) & \cos(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) & \sin(\frac{\theta}{2}) \\ -\sin(\frac{\theta}{2}) & \cos(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

On peut aussi dire que  $A$  est symétrique et orthogonale, donc  $A^2 = A^t A = I_n$  et elle est diagonalisable puisque annihilée par  $X^2 - 1$  qui est scinde à racines simples dans  $\mathbb{R}$ . Comme  $A \neq \pm I_2$ , elle est orthogonalement semblable à  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

**Théorème 3**

Soit  $u \in \mathcal{O}(E)$  avec  $n \geq 2$ . Il existe une base orthonormée  $\mathcal{B}$  de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  s'écrit :

$$D = \begin{pmatrix} I_p & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -I_q & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & R_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & R_r \end{pmatrix}$$

où pour tout  $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$ , on a note :

$$R_k = \begin{pmatrix} \cos \theta_k & -\sin \theta_k \\ \sin \theta_k & \cos \theta_k \end{pmatrix}$$

avec  $\theta_k \in ]0, 2\pi[ \setminus \{\pi\}$  et  $p, q, r$  sont des entiers naturels tels  $p + q + 2r = n$  (si l'un de ces entiers est nul, les blocs de matrices correspondants n'existent pas).

**Preuve:**

On procède par récurrence sur la dimension  $n \geq 2$  de  $E$ .

- Pour  $n = 2$ , c'est fait avec le lemme précédent.
- Supposons le résultat acquis pour les endomorphismes orthogonaux sur les espaces euclidiens de dimension  $p$  comprise entre  $2$  et  $n-1$  et soit  $u \in \mathcal{O}(E)$  avec  $n = \dim(E) \geq 3$ .

△ Si  $u$  admet  $1$  ou  $-1$  comme valeur propre, pour tout vecteur propre unitaire  $e_1$  associé à cette valeur propre, le sous espace vectoriel  $H = \text{Vect}(x)^\perp$  est stable par  $u$  et il existe alors une base orthonormée  $\mathcal{B}_1$  de  $H$  dans laquelle la matrice de la restriction de  $u$  à  $H$  est de la forme :

$$A_1 = \begin{pmatrix} I_p & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -I_q & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & R_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & R_r \end{pmatrix}$$

Dans la base orthonormée  $\{e_1\} \cup \mathcal{B}_1$  la matrice de  $u$  est  $A = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$ , qui se ramène bien à la forme souhaitée en permutant au besoin  $e_1$  avec l'un des vecteurs de  $\mathcal{B}_1$ .

△ Si toutes les valeurs propres de  $u$  sont complexes non réelles, on a alors une décomposition  $E = \oplus_{i=1}^r P_k$  où les  $P_k$  sont de dimension 2 deux à deux orthogonaux et stables par  $u$ . L'étude du cas  $n = 2$  nous dit alors qu'il existe, pour tout  $k$  compris entre 1 et  $r$ , une base orthonormée  $\mathcal{B}_k$  de  $P_k$  dans laquelle la matrice de  $u$  est de la forme :

$$R_k = \begin{pmatrix} \cos \theta_k & -\sin \theta_k \\ \sin \theta_k & \cos \theta_k \end{pmatrix}$$

avec  $\theta_k \in ]0, 2\pi[ \setminus \{\pi\}$ . En réunissant toutes ces bases, on obtient une base orthonormée de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est :

$$A = \begin{pmatrix} R_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & R_r \end{pmatrix}$$

### Remarque :

On a  $p = \dim(\text{Ker}(u - Id))$  et  $q = \dim(\text{Ker}(u + Id))$  avec  $p + q + 2r = n$ . De plus  $u \in \mathcal{O}^+(E)$  [resp.  $u \in \mathcal{O}^-(E)$ ] si, et seulement, si  $q$  est pair [resp. impair].

### Corollaire 8

Soit  $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  avec  $n \geq 2$ . Il existe une matrice  $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  telle que :

$${}^t P A P = \begin{pmatrix} I_p & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -I_q & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & R_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & R_r \end{pmatrix}$$

### Preuve:

$A$  est la matrice dans la base canonique  $\mathbb{R}^n$  d'un endomorphisme orthogonal  $u$  et la matrice de passage  $P$  de la base canonique à une base orthonormée dans laquelle la matrice de  $u$  à la forme indiquée est orthogonale, donc telle que  $P^{-1} = {}^t P$ .

### Propriété 40: Isométries positives en dimension 3

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension 3 et  $f \in \mathcal{O}^+(E)$ , alors

1.  $1 \in \text{Sp}(f)$ ;
2. Il existe une base orthonormale directe  $\mathcal{B} = (u, v, w)$  dans laquelle la matrice de  $f$  est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{où } \theta \in [0, 2\pi]$$

$f$  est dite la rotation d'axe dirigé et orienté par  $u$  et d'angle  $\theta$ . On la note  $\text{Rot}_{u, \theta}$

### Preuve:

Soit  $A$  la matrice de  $u$  dans une BON de  $E$ .

1. On a

$$\det(A - I_3) = \det(A - {}^t A A) = \det(I_3 - {}^t A) = -\det(A - I_3)$$

Donc  $\det(A - I_3) = 0$ , puis  $1 \in \text{Sp}(f)$ .

2. On applique le théorème ?? à  $f \in \mathcal{O}^+(E)$ , avec  $p + q + 2r = 3$  et puisque  $q$  est pair, alors on a trois cas possibles  $p = 3$ ,  $(p, q, r) = (1, 2, 0)$  et  $(p, q, r) = (1, 0, 1)$  qui correspondent respectivement aux cas suivants

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{où } \theta \in ]0, 2\pi[ \setminus \{\pi\}$$

**Propriété 41**

Soit  $f$  la rotation d'axe  $D$  dirigé et orienté par un vecteur unitaire  $u$  et d'angle  $\theta$ .

1. Pour tout  $x$  vecteur de  $E$

$$f(x) = \cos(\theta).x + (1 - \cos(\theta))\langle x, u \rangle u + \sin(\theta).u \wedge x$$

En particulier si  $x$  est orthogonal à  $u$

$$f(x) = \cos(\theta).x + \sin(\theta).u \wedge x$$

2. Si  $x$  est un vecteur unitaire orthogonal à  $u$ , on a :

$$\cos(\theta) = \langle x, f(x) \rangle = \frac{\text{Tr}(f) - 1}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \text{Det}(u, x, f(x))$$

Si  $x$  un vecteur non colinéaire avec  $u$ , alors  $\text{sgn}(\sin \theta) = \text{sgn}(\text{Det}(u, x, f(x)))$

**Preuve:**

1. On commence par le cas où  $x$  est orthogonal à  $u$ .

► Cas  $x = 0$  : Ok

► Cas  $x \neq 0$  : Posons  $i = \frac{x}{\|x\|}$  et  $j = u \wedge i = \frac{u \wedge x}{\|u\|}$ .

La famille  $B = (i, j)$  est une base orthonormée directe du plan  $P = D^\perp$ .

Pour  $x \in P$ ,  $f(x) = \text{Rot}_\theta(x) = \|x\| \text{Rot}_\theta(i) = \|x\|(\cos \theta.i + \sin \theta.j) = \cos(\theta).x + \sin(\theta).u \wedge x$

Revenons au cas général. Soit  $x \in E$  et notons  $p$  la projection orthogonale sur  $D$  et  $q$  celle sur  $D^\perp$ . Alors

$$p(x) = \langle x, u \rangle u \quad \text{et} \quad q(x) = x - \langle x, u \rangle u$$

Puisque  $f(x) = f(p(x) + q(x)) = p(x) + f(q(x))$  avec  $q(x) \in D^\perp$ , la formule précédente donne

$$f(x) = p(x) + \cos(\theta).q(x) + \sin(\theta).u \wedge q(x)$$

puis

$$f(x) = \cos(\theta).x + (1 - \cos(\theta))\langle x, u \rangle u + \sin(\theta).u \wedge x$$

2. Si  $x$  est un vecteur unitaire orthogonal à  $u$ , on a :

$$\langle x, f(x) \rangle = \cos(\theta)\|x\|^2 + \sin(\theta)\langle x, u \wedge x \rangle = \cos(\theta)$$

$$\text{Det}(u, x, f(x)) = \langle u \wedge x, f(x) \rangle = \cos(\theta)\langle u \wedge x, x \rangle + \sin(\theta)\|u \wedge x\|^2 = \sin(\theta)$$

**Exemple**

Soient  $B = (i, j, k)$  une base orthonormée directe de  $E$  et  $f$  la rotation d'axe  $D$  dirigé et orienté par  $u = \frac{1}{\sqrt{3}}(i + j - k)$  et d'angle  $\theta = \frac{\pi}{3}$ .

Formons la matrice de  $f$  dans la base  $B$ .

On a  $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$  et  $\sin \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , donc par la formule

$$\forall x \in E, \quad f(x) = \cos \theta.x + (1 - \cos \theta)\langle x, u \rangle u + \sin \theta.u \wedge x$$

on obtient

$$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}\langle x, i + j - k \rangle.(i + j - k) + \frac{1}{2}.(i + j - k) \wedge x$$

On en déduit

$$\begin{cases} f(i) &= \frac{2}{3}i - \frac{1}{3}j - \frac{2}{3}k \\ f(j) &= \frac{2}{3}i + \frac{2}{3}j + \frac{1}{3}k \\ f(k) &= \frac{1}{3}i - \frac{2}{3}j + \frac{2}{3}k \end{cases}$$

puis, la matrice

$$\text{Mat}_B(f) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

**Exemple**

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $E$  dont la matrice dans une base orthonormée directe  $B = (i, j, k)$  est la matrice  $A$  suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que  $f$  est une rotation et déterminer ses éléments caractéristiques

Les colonnes de  $A$  sont unitaires et deux à deux orthogonales donc  $A \in O_3(\mathbb{R})$  puis  $f \in O(E)$ .

Soit  $u = xi + yj + zk \in E$ . Après résolution

$$f(u) = u \iff x = y = z$$

L'ensemble des vecteurs invariants par  $f$  est une droite dirigée par le vecteur  $u = \frac{\sqrt{3}}{3}(i + j + k)$ , on en déduit que  $f$  est une rotation autour de la droite  $D$ .

Orientons la droite  $D$  par le vecteur  $u$  et déterminons l'angle  $\theta$  de cette rotation. Puisque  $\text{Tr}(A) = 1 + 2\cos\theta$

et  $\text{Tr}(A) = 0$ , on obtient  $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ .

Déterminons le signe de  $\det u, i, f(i)$

$$\text{Det}(u, i, f(i)) = \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

On en déduit  $\sin\theta > 0$  puis  $\theta \equiv \frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}$ .

Finalement  $f$  est la rotation d'axe dirigé et orienté par  $u = \frac{\sqrt{3}}{3}(i + j + k)$  et d'angle  $\frac{2\pi}{3}$

## IV Endomorphismes symétriques

$E$  un préhilbertien réel.

### IV.1 Endomorphisme symétrique

#### Définition 14

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

On dit que  $u$  est symétrique si  $\forall x, y \in E, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$

**Exemple**

Les projecteurs orthogonaux sont des endomorphismes symétriques.

**Notation :**

$S(E)$  désigne l'ensemble des endomorphismes symétriques de  $E$

#### Propriété 42

Soit  $u \in S(E)$  et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $f$ . Alors  $F^\perp$  est aussi stable par  $u$

**Preuve:**

Soit  $y \in F^\perp$ , alors pour  $x \in F$ , on a  $u(x) \in F$  et outre

$$\langle x, u(y) \rangle = \langle u(x), y \rangle = 0$$

Ceci vrai pour tout  $x \in F$ , donc  $u(y) \in F^\perp$

## IV.2 Cas euclidien

## Propriété 43

Soit  $E$  un espace euclidien et  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme symétrique, alors

$$\text{Im}(u) = (\text{Ker } u)^\perp$$

**Preuve:**

Soit  $x \in \text{Ker } u$  et  $y \in \text{Im } u$ . On peut écrire  $y = u(a)$  avec  $a \in E$  et alors

$$\langle x, y \rangle = \langle x, u(a) \rangle = \langle u(x), a \rangle = \langle 0, a \rangle = 0$$

Ainsi, les espaces  $\text{Im } u$  et  $\text{Ker } u$  sont orthogonaux et donc  $\text{Im } u \subset (\text{Ker } u)^\perp$  puis l'égalité par les dimensions.

## Propriété 44

[Caractérisation des symétriques] Soit  $E$  un espace euclidien,  $\mathcal{B}$  une BON de  $E$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Alors

$$u \in S(E) \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in S_n(\mathbb{R})$$

**Preuve:**

$\Rightarrow$  Supposons  $u$  symétrique et étudions  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ .

On a  $a_{i,j} = \langle e_i, u(e_j) \rangle$  et donc par symétrie

$$a_{i,j} = \langle e_i, u(e_j) \rangle = \langle u(e_i), e_j \rangle = a_{j,i}$$

La matrice  $A$  est donc symétrique

$\Leftarrow$  Si la matrice  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$  est symétrique.

Soit  $x, y \in E$  de colonnes coordonnées  $X$  et  $Y$  dans la base orthonormée  $\mathcal{B}$ , on a

$$\langle u(x), y \rangle = {}^t(AX)Y = {}^tX^tAY$$

et

$$\langle x, u(y) \rangle = {}^tXAY$$

Or  ${}^tA = A$ , donc  $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$

**Attention**

Il est essentiel de vérifier que la base  $\mathcal{B}$  est orthonormale pour exploiter ce résultat.

## Propriété 45

[Caractérisation des endomorphismes involutifs, idempotents] Soit  $E$  un espace euclidien et  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

1.  $u$  est un projecteur orthogonal si, et seulement, si  $u$  est symétrique et  $u^2 = u$  ;
2.  $u$  est une symétrie orthogonale si, et seulement, si  $u$  est symétrique et  $u^2 = \text{id}_E$ .

**Preuve:**

1.  $\Rightarrow$   $u$  est un projecteur, donc  $u^2 = u$ .

Le projecteur  $u$  est orthogonal donc  $\forall x, y \in E$ ,

$$\langle x - u(x), u(y) \rangle = \langle x, y - u(y) \rangle = 0$$

donc

$$\langle x, u(y) \rangle = \langle u(x), u(y) \rangle = \langle u(x), y \rangle$$

d'où  $u$  est symétrique.

$\Leftarrow$  On a  $u^2 = u$  donc  $u$  est un projecteur et puisque  $u$  est symétrique donc  $\text{Ker } u = (\text{Im } u)^\perp$  d'où le projecteur  $u$  est orthogonal.

2.  $\Rightarrow$  On a  $u$  est une symétrie donc  $u^2 = \text{id}_E$ .

La symétrie  $u$  est orthogonale donc  $u \in O(E)$ .

$\Leftarrow$  On a  $u^2 = \text{id}_E$  donc  $u$  est une symétrie.

Soient  $x \in \text{Ker}(u - \text{id})$  et  $y \in \text{Ker}(u + \text{id})$ , on a

$$\langle x, y \rangle = \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle = -\langle x, y \rangle$$

donc  $\langle x, y \rangle = 0$  d'où  $\text{Ker}(u - \text{id}) \perp \text{Ker}(u + \text{id})$  d'où la symétrie  $u$  est orthogonale.

## IV.3 Théorème spectral

## Propriété 46

Soit  $u \in S(E)$ . Alors  $u$  admet une valeurs propre réelle

## Preuve:

Soit  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $E$  et  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ . On a  $u \in S(E)$  donc  $A$  est symétrique.

Soit  $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(u)$  donc  $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$  et par suite  $\exists X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}, AX = \lambda X$ . On a  $AX = \lambda X$  donc  $\overline{\lambda X} = \overline{AX} = \overline{AX} = \overline{AX}$  car  $\overline{A} = A$  puisque  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On a  ${}^t\overline{X}AX = \lambda {}^t\overline{X}X = \lambda \|X\|^2$  et  ${}^t\overline{X}AX = {}^t(A\overline{X})X = {}^t(A\overline{X})X = \overline{\lambda} {}^t\overline{X}X = \overline{\lambda} \|X\|^2$  donc  $\lambda \|X\|^2 = \overline{\lambda} \|X\|^2$ . Or  $X \neq 0$  donc  $\lambda = \overline{\lambda}$  d'où  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

## Propriété 47

Soit  $u \in S(E)$  et  $\lambda, \mu \in \text{Sp}(u)$  avec  $\lambda \neq \mu$ , alors  $E_{\lambda}(u)$  et  $E_{\mu}(u)$  sont orthogonaux.  
En particulier, les espaces propres de  $u$  sont en somme directe orthogonale.

## Preuve:

Soient  $\lambda, \mu \in \text{Sp}(u)$  tels que  $\lambda \neq \mu$ ,  $x \in E_{\lambda}(u)$  et  $y \in E_{\mu}(u)$ .

On a

$$\langle u(x), y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

et

$$\langle x, u(y) \rangle = \langle x, \mu y \rangle = \mu \langle x, y \rangle$$

donc  $(\lambda - \mu) \langle x, y \rangle = 0$ . Or  $\lambda \neq \mu$  donc  $\langle x, y \rangle = 0$  et par suite  $E_{\lambda}(u) \perp E_{\mu}(u)$ .

## Théorème 4

Spectral Tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien  $E$  est diagonalisable dans une base orthogonale.

## Preuve:

Soit  $u \in S(E)$ , on pose  $F = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_{\lambda}(u)$ .

Le sous-espace vectoriel  $F$  est stable par  $u$  donc  $F^{\perp}$  aussi.

Par l'absurde, supposons  $F^{\perp} \neq \{0_E\}$ . L'endomorphisme induit par  $u$  sur  $F^{\perp}$  est symétrique, il possède donc au moins un vecteur propre. Or celui-ci est aussi vecteur propre de  $u$  et donc élément de  $F$ . C'est absurde car  $F \cap F^{\perp} = \{0_E\}$ . Ainsi,  $E$  est la somme directe des sous-espaces propres de  $u$  et puisque ceux-ci sont deux à deux orthogonaux, on peut former une base orthonormale adaptée à cette décomposition, base qui diagonalise  $u$ .

## Théorème 5

[spectral :Version matricielle] Soit  $A \in S_n(\mathbb{R})$ , il existe  $P \in O_n(\mathbb{R})$  telle que  $P^{-1}AP = {}^tPAP$  soit diagonale.

## Preuve:

Soit  $A \in S_n(\mathbb{R})$ .

Munissons  $E = \mathbb{R}^n$  du produit scalaire canonique et considérons  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  représenté par  $A$  dans la base canonique.

Puisque  $A$  est symétrique et  $\mathcal{B}$  orthonormée, l'endomorphisme  $u$  est symétrique. Il existe donc une base orthonormée  $\mathcal{B}'$  diagonalisant  $u$ . Par changement de base, on a alors  $A = PDP^{-1}$  avec  $D$  diagonale et  $P$  orthogonale car c'est une matrice de passage entre deux bases orthonormées.

## Corollaire 9

Pour  $A \in M_n(\mathbb{R})$ ,  ${}^tAA$  est diagonalisable

## Preuve:

${}^tAA$  est symétrique réelle.

## Remarque :

Le résultat est faux pour les matrices symétriques non réelles. En effet, la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$  n'est pas diagonalisable car elle est non nulle et nilpotente ( $A^2 = 0$ ) et la seule matrice nilpotente diagonalisable est la matrice nulle.

## IV.4 Extrémum sur la sphère

### Propriété 48: Extrémum sur la sphère

Soit  $u$  un endomorphisme symétrique. Posons  $\lambda_{\min} = \min(\text{Sp}(u))$  et  $\lambda_{\max} = \max(\text{Sp}(u))$ . Alors

$$\forall x \in E, \quad \lambda_{\min} \|x\|^2 \leq \langle u(x), x \rangle \leq \lambda_{\max} \|x\|^2$$

En particulier  $x \mapsto \langle u(x), x \rangle$  est bornée sur la sphère unité et atteint ses bornes et

$$\min_{\|x\|=1} \langle u(x), x \rangle = \lambda_{\min} \quad \text{et} \quad \max_{\|x\|=1} \langle u(x), x \rangle = \lambda_{\max}$$

#### Preuve:

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormale diagonalisant  $u$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  les valeurs propres de  $u$  avec  $u(e_i) = \lambda_i e_i$ .

Pour  $x \in E$ , on peut écrire  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$  et on a alors  $u(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i e_i$ .

Puisque la base  $\mathcal{B}$  est orthonormale,

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad \text{et} \quad \langle u(x), x \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$$

Or, pour tout  $1 \leq i \leq n$ , on a  $\lambda_{\min} \leq \lambda_i \leq \lambda_{\max}$ , donc

$$\lambda_{\min} \|x\|^2 \leq \langle u(x), x \rangle \leq \lambda_{\max} \|x\|^2$$

### Corollaire 10 (Extrémum sur la sphère)

Soit  $A \in S_n(\mathbb{R})$  une matrice symétrique. Posons  $\lambda_{\min} = \min(\text{Sp}(A))$  et  $\lambda_{\max} = \max(\text{Sp}(A))$ . Alors

$$\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \lambda_{\min} \|X\|^2 \leq {}^t X A X \leq \lambda_{\max} \|X\|^2$$

En particulier  $X \mapsto {}^t X A X$  est bornée sur la sphère unité et atteint ses bornes et

$$\min_{\|X\|=1} ({}^t X A X) = \lambda_{\min} \quad \text{et} \quad \max_{\|X\|=1} ({}^t X A X) = \lambda_{\max}$$

## V Formes linéaires d'un espace euclidien

$E$  un espace euclidien de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ .

### V.1 Formes linéaires d'un espace euclidien

#### Notation :

Soit  $a \in E$  on considère la forme linéaire  $f_a$  définie par  $f_a : x \mapsto \langle x, a \rangle$

### Propriété 49

L'application  $f : E \rightarrow E^*, a \mapsto f_a$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels appelé l'isomorphisme canonique de  $E$  sur  $E^*$ .

#### Preuve:

- ▶  $f$  est linéaire ;
- ▶  $f$  est injective car  $\langle x, a \rangle = 0$ , pour tout  $x \in E$ , donne  $a = 0$  ;
- ▶ la conclusion résulte donc de  $\dim E = \dim E^*$

### Corollaire 11

En particulier,  $\forall \varphi \in E^*, \exists ! a \in E, \forall x \in E, \varphi(x) = \langle a, x \rangle$ .

#### Attention

Le résultat est faux si  $E$  est un espace préhilbertien de dimension infinie.

## V.2 Adjoint d'un endomorphisme

### Propriété 50

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  alors il existe un unique  $v \in \mathcal{L}(E)$  tel que

$$\forall x, y \in E, \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, v(y) \rangle$$

$v$  s'appelle l'adjoint de  $u$  et on le note  $u^*$ .

#### Preuve:

**Existence:** Soit  $y \in E$ , l'application  $x \mapsto \langle u(x), y \rangle$  est une forme linéaire sur  $E$ . Donc, il existe un unique  $z \in E$  tel que

$$\forall x \in E, \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, z \rangle.$$

On définit l'application de  $E$  dans  $E$  par  $v(y) = z$

**Linéarité de  $v$  :** Soit  $x, y \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $z \in E$  et par linéarité du produit scalaire, on obtient :

$$\langle v(\lambda x + y) - \lambda v(x) - v(y), z \rangle = \langle v(\lambda x + y), z \rangle - \lambda \langle v(x), z \rangle - \langle v(y), z \rangle$$

Il s'ensuit par définition de  $v$  et par linéarité du produit scalaire :

$$\begin{aligned} \langle v(\lambda x + y) - \lambda v(x) - v(y), z \rangle &= \langle \lambda x + y, u(z) \rangle - \lambda \langle x, u(z) \rangle - \langle y, u(z) \rangle \\ &= \langle 0, u(z) \rangle = 0 \end{aligned}$$

Le vecteur  $v(\lambda x + y) - \lambda v(x) - v(y)$  appartient à  $E^\perp = \{0\}$ , donc

$$v(\lambda x + y) - \lambda v(x) - v(y) = 0$$

Ce qui montre que  $v$  est linéaire

**Unicité:** Si  $w$  une application de  $E$  dans  $E$  telle que

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, w(y) \rangle.$$

Pour  $(x, y) \in E^2$ , on a  $\langle x, v(y) \rangle = \langle x, w(y) \rangle$ , soit  $\langle x, v(y) - w(y) \rangle = 0$ , d'où  $v(y) = w(y)$  pour tout  $y \in E$  et  $v = w$

#### Exemple

$$\text{Id}_E^* = \text{Id}_E$$

#### Exemple

Soit  $a, b \in E$  et  $u : x \mapsto \langle a, x \rangle b$ . Déterminons  $u^*$ .

Soit  $x, y \in E$ , on a

$$\begin{aligned} \langle u(x), y \rangle &= \langle \langle x, a \rangle b, y \rangle \\ &= \langle x, a \rangle \cdot \langle b, y \rangle \\ &= \langle x, \langle \langle b, y \rangle, a \rangle \rangle \end{aligned}$$

Donc  $u^* : x \mapsto \langle b, x \rangle a$

#### Exemple

Soit  $E = M_n(\mathbb{R})$ , muni du produit scalaire  $\langle A|B \rangle = \text{Tr}({}^tAB)$ .

Soit  $A \in E$ , posons  $u : X \in E \mapsto AX$ . Trouvons  $u^*$ .

Soit  $X, Y \in M_n(\mathbb{R})$ , on a

$$\begin{aligned} \langle u(X), Y \rangle &= \langle AX, Y \rangle \\ &= \text{Tr}({}^t(AX)Y) \\ &= \text{Tr}({}^tX{}^tAY) \\ &= \langle X, {}^tAY \rangle \end{aligned}$$

Donc

### Propriété 51

Soient  $u, v \in \mathcal{L}(E)$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Alors :

1.  $(\alpha u + v)^* = \alpha u^* + v^*$  ;
2.  $(u^*)^* = u$  ;
3.  $u \mapsto u^*$  est un automorphisme d'espaces vectoriels sur  $\mathcal{L}(E)$ .
4.  $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$  ;
5. Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $(u^k)^* = (u^*)^k$  ;
6. Pour tout  $P \in \mathbb{R}[X]$ , on a  $P(u^*) = (P(u))^*$  ;
7. si  $u \in \text{GL}(E)$ , alors  $u^* \in \text{GL}(E)$  et  $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$ .

**Preuve:**

1. Soit  $x, y \in E$ . Par définition de l'adjoint, on a :

$$\begin{aligned} \langle (\alpha u + v)^*(x), y \rangle &= \langle x | (\alpha u + v)(y) \rangle = \langle x, \alpha u(y) + v(y) \rangle \\ &= \alpha \langle x, u(y) \rangle + \langle x, v(y) \rangle \\ &= \alpha \langle u^*(x), y \rangle + \langle v^*(x), y \rangle \\ &= \langle \alpha u^*(x) + v^*(x), y \rangle = \langle (\alpha u^* + v^*)(x), y \rangle \end{aligned}$$

Donc

$$\forall x \in E, (\alpha u + v)^*(x) = (\alpha u^* + v^*)(x)$$

$$\text{Puis } (\alpha u + v)^* = \alpha u^* + v^*$$

2. La proposition  $\forall (x, y) \in E^2, \langle u^*(x), y \rangle = \langle x | u^*(y) \rangle = \langle x, u(y) \rangle$  donne  $(u^*)^* = u$ .
3.  $T : u \mapsto u^*$  est un endomorphisme d'espaces vectoriels sur  $\mathcal{L}(E)$  tel que  $T^2 = \text{Id}_{\mathcal{L}(E)}$ , donc c'est un automorphisme de  $\mathcal{L}(E)$
4. Soit  $x, y \in E$ . Par définition de l'adjoint, on a :

$$\begin{aligned} \langle (u \circ v)(x), y \rangle &= \langle u(v(x)), y \rangle = \langle v(x), u^*(y) \rangle \\ &= \langle x, v^*(u^*(y)) \rangle = \langle x, (v^* \circ u^*)(y) \rangle \end{aligned}$$

$$\text{Donc l'égalité } (u \circ v)^* = v^* \circ u^*$$

5. Par récurrence sur  $k$
6. D'après l'assertion précédente.
7. On a

$$\text{Id}_E = \text{Id}_E^* = (u \circ u^{-1})^* = (u^{-1})^* \circ u^*,$$

$$\text{donc } u^* \text{ est un automorphisme et } (u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$$

### Propriété 52

Soit  $\mathcal{B}$  une base orthonormale de  $E$ ,  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ . Alors

1.  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u^*) = {}^t A$  ;
2.  $\text{rg}(u^*) = \text{rg}(u)$  ;
3.  $\text{tr}(u^*) = \text{tr}(u)$  ;
4.  $\det u^* = \det u$  ;
5.  $\chi_{u^*} = \chi_u$  et  $\pi_{u^*} = \pi_u$ .

**Preuve:**

Soit  $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$  une BON de  $E$

1. Soit  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ , on a

$$\langle e_i, u(e_j) \rangle = \langle u^*(e_i), e_j \rangle = \langle e_j, u^*(e_i) \rangle$$

$$\text{D'où la conclusion car } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = (\langle e_i, u(e_j) \rangle)_{1 \leq i, j \leq n} \text{ pour } u \in \mathcal{L}(E)$$

2.  $\text{rg}(A) = \text{rg}({}^t A)$ .

- 3.  $\text{Tr}(A) = \text{Tr}({}^t A)$
- 4.  $\det(A) = \det({}^t A)$
- 5.  $\chi_A = \chi_{{}^t A}$  et  $\pi_A = \pi_{{}^t A}$