

PRODUIT SCALAIRE

E désigne un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel

Définition

On appelle produit scalaire sur E toute application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

- φ est bilinéaire
- φ est symétrique i.e. $\forall x, y \in E, \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$
- φ est positive i.e. $\forall x \in E, \varphi(x, x) \geq 0$
- φ est définie i.e. $\forall x \in E, \varphi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

E est dit espace préhilbertien

Propriété: Norme euclidienne

Soit E un espace préhilbertien. L'application $\| \cdot \| : x \in E \mapsto \sqrt{\langle x | x \rangle}$ est une norme sur E dite norme euclidienne

Propriété: Identités et inégalités classiques

Soit E un préhilbertien. Pour tout $x, y \in E$

- Inégalité de Cauchy-Schwarz:** $\forall x, y \in E, |\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.
Il y a égalité si, et seulement si, (x, y) est liée.
- Inégalité de Minkowski:** $\forall x, y \in E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
Il y a égalité ssi x et y sont positivement liés

ORTHOGONALITÉ

Définition

La famille $(x_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est dite

- orthogonale si $\forall i, j \in I, i \neq j \Rightarrow \langle x_i, x_j \rangle = 0$.
- orthonormale si $\forall i, j \in I, \langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij}$.

Propriété

- Une famille orthogonale sans vecteur nul est libre.
- Toute famille orthonormale est libre.
- Tout espace euclidien, non nul, admet une base orthonormale;
- Toute famille orthonormale d'un euclidien se complète en une base orthonormale.

Propriété: Calcul avec une base orthonormale

E euclidien et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une BON sur E et soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

Soit $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k, y = \sum_{k=1}^n y_k e_k$, alors:

- $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_k = \langle e_k, x \rangle$ et $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$.
- $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k$ et $\|x - y\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2}$
- $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = (\langle e_i, u(e_j) \rangle)_{1 \leq i, j \leq n}$

Propriété: Existence de supplémentaire orthogonal

Si F un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un préhilbertien E alors les espaces F et $F^\perp$ sont supplémentaires dans E .

PROJECTEURS ORTHOGONAUX

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un préhilbertien E .

Définition: Projection orthogonale

On appelle projection orthogonale sur F la projection vectorielle p_F sur F parallèlement à $F^\perp$.

Propriété

p_F est un endomorphisme de E vérifiant $p^2 = p, \text{Imp} = F$ et $\text{Kerp} = F^\perp$. De plus $\text{id} - p$ projection orthogonale sur $F^\perp$

Propriété

Soit p un projecteur de E . Alors

$$\text{Kerp} \perp \text{Imp} \iff \text{Kerp} = (\text{Imp})^\perp \iff \text{Imp} = (\text{Kerp})^\perp$$

Tout projecteur vérifiant l'une des trois assertions est projecteur orthogonal

Propriété: caractéristique

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. On a équivalence entre :

- p est un projecteur orthogonal
- $\forall x, y \in E, \langle p(x) | y \rangle = \langle x | p(y) \rangle$.
- $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$

La matrice d'un projecteur orthogonal dans une base orthonormée est symétrique.

Propriété: Expression du projeté

Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormée de F alors

$$\forall x \in E, p_F(x) = \sum_{j=1}^p \langle e_j, x \rangle e_j$$

Exemple

Soit $D = \text{Vect}(a)$ et $H = \text{Vect}(a)^\perp$ avec $a \neq 0$. Alors

$$\forall x \in E, p_D(x) = \frac{\langle a | x \rangle}{\|a\|^2} a \text{ et } p_H(x) = x - \frac{\langle a | x \rangle}{\|a\|^2} a$$

Propriété: Minimisation de distance

Pour tout $y \in F, \|x - y\| \geq \|x - p_F(x)\|$ avec égalité ssi, $y = p_F(x)$.
Autrement-dit $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$

Propriété: Algorithme de Gram-Schmidt

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre de E . Il existe une et une seule famille orthonormée $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de E telle que : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$

- $\text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$.
- $\langle \varepsilon_k, e_k \rangle > 0$.

Cette famille est donnée par :

$$\varepsilon_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} \text{ et } \forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, \varepsilon_k = \frac{e_k - P_{k-1}(e_k)}{\|e_k - P_{k-1}(e_k)\|}$$

Avec P_i désigne le projecteur $\perp$ sur $\text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_i)$

SYMÉTRIE ORTHOGONALE

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un préhilbertien E .

Définition

On appelle symétrie orthogonale par rapport à F la symétrie vectorielle s_F par rapport à F parallèlement à $F^\perp$.
Si F est un hyperplan de E , on dit que s_F est la réflexion par rapport à F .

Propriété

Soient $a, b \in E$ tels que $\|a\| = \|b\|$ et $a \neq b$.
Il existe une réflexion et une seule qui échange a et b .

$$H = \text{Vect}(a - b)^\perp$$

Propriété

s_F est un endomorphisme de E vérifiant $s^2 = \text{id}, \text{Ker}(s - \text{id}) = F$ et $\text{Ker}(s + \text{id}) = F^\perp$. De plus $-s_F = s_{F^\perp}$ et $s_F = 2p_F - \text{id}$

Propriété: Expression du symétrique

Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormée de F alors

$$\forall x \in E, s_F(x) = 2 \sum_{j=1}^p \langle e_j, x \rangle e_j - x$$

Exemple

Soit $D = \text{Vect}(a)$ et $H = D^\perp$ avec $a \neq 0$. Alors

$$\forall x \in E, s_D(x) = 2 \frac{\langle x | a \rangle}{\|a\|^2} a - x$$

et

$$\forall x \in E, s_H(x) = x - 2 \frac{\langle x | a \rangle}{\|a\|^2} a$$

Propriété: caractéristique

Soit s une symétrie de E . On a équivalence entre:

- s est une symétrie orthogonale
- $\forall x, y \in E, (s(x) | y) = (x | s(y))$.
- $\forall x \in E, \|s(x)\| = \|x\|$

- La matrice d'une symétrie orthogonale dans une base orthonormée est symétrique.
- Les symétries $\perp$ conservent le produit scalaire

$$\forall x, y \in E, (s(x) | s(y)) = (x | y)$$

- En particulier, les symétries orthogonales conservent la norme

$$\forall x \in E, \|s(x)\| = \|x\|$$

CONTACT INFORMATION

Web: www.elamdaoui.com

Email: elamdaoui@gmail.com

Phone: 06 62 30 38 81

FAMILLE TOTALE

E un espace préhilbertien réel et $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de E

Propriété: Inégalité de Bessel

Si $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthonormale. Alors $\forall x \in E$ la famille $(\langle e_n | x \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ est de carré sommable et $\sum_{n \in \mathbb{N}} \langle e_n | x \rangle^2 \leq \|x\|^2$

Définition: Famille totale

La famille $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite totale si l'espace vectoriel qu'elle engendre est dense dans E . Autrement-dit $\overline{\text{Vect}((e_n)_{n \in \mathbb{N}})} = E$

Définition: Base hilbertienne

$(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite base hilbertienne si elle est à la fois orthonormale et totale

Propriété

Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ base hilbertienne de E et P_n le projecteur orthogonal de E sur $\text{Vect}(e_0, \dots, e_n)$, alors $\forall x \in E, P_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$

Propriété: Égalité de Parseval

Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne de E . Alors pour tout $x \in E$ la famille $(\langle e_i | x \rangle)_{i \in \mathbb{N}}$ est de carré sommable et $\sum_{n \in \mathbb{N}} \langle e_n | x \rangle^2 = \|x\|^2$.

ENDOMORPHISMES SYMÉTRIQUES

E un espace préhilbertien

Définition: Endomorphisme symétrique

$u \in \mathcal{L}(E)$ est dit symétrique si: $\forall x, y \in E, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$

$S(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes symétriques de E

Propriété: Stabilité- Image et noyau

Soit $u \in S(E)$ et F un sev de E stable par u . Alors $F^\perp$ est stable par u

Propriété: Cas euclidien

Soit E un espace euclidien et $u \in S(E)$, alors $\text{Im}(u) = (\text{Ker } u)^\perp$

Propriété: Propriété caractéristique

Soit E un espace euclidien, $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $u \in S(E) \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in S_n(\mathbb{R})$

Propriété: Endomorphismes involutifs, idempotents

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$.
1. u est un projecteur $\perp$ ssi $u \in S(E)$ et $u^2 = u$;
2. u est une symétrie $\perp$ ssi $u \in S(E)$ et $u^2 = \text{id}_E$.

Propriété: Théorème spectral

Tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E est diagonalisable dans une base orthonormale.

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$, alors il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que ${}^t P A P$ soit diagonale.

EXTRÊMUM SUR LA SPHÈRE

Propriété: Extrémum sur la sphère

Soit $u \in S(E)$. Posons $\lambda_{\min} = \min(\text{Sp}(u))$ et $\lambda_{\max} = \max(\text{Sp}(u))$. Alors

- $\forall x \in E: \lambda_{\min} \|x\|^2 \leq \langle u(x), x \rangle \leq \lambda_{\max} \|x\|^2$
- $\min \{ \langle u(x), x \rangle, \|x\| = 1 \} = \lambda_{\min}$
- $\max \{ \langle u(x), x \rangle, \|x\| = 1 \} = \lambda_{\max}$

ENDOMORPHISMES ORTHOGONAUX

E désigne un euclidien de dimension $n \geq 1$

Définition: Endomorphisme orthogonal

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est orthogonal si $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$.

$O(E)$, l'ensemble des automorphismes orthogonaux, est un groupe, appelé le groupe orthogonal de E .

Propriété

Si $u \in O(E)$, alors $\text{Sp}(u) \subset \{-1, 1\}$.

Propriété: Propriété caractéristique

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes:

- $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$;
- $\forall x, y \in E, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$;
- u transforme toute BON de E en une BON de E ;
- u transforme une BON de E en une BON de E .

Définition: Matrices orthogonales

Une matrice réelle $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si ${}^t A A = I_n$.

$O_n(\mathbb{R})$, l'ensemble de matrices orthogonales, est un groupe, appelé groupe orthogonal d'ordre n .

Propriété: Propriétés caractéristiques

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ de colonnes $C_1, \dots, C_n$ et de lignes $L_1, \dots, L_n$. Les ASSE

- la matrice A est orthogonale
- la famille $(C_1, \dots, C_n)$ est orthonormale
- la famille $(L_1, \dots, L_n)$ est orthonormale.
- A est la matrice de passage d'une BON à une BON

Propriété

- $A \in O_n(\mathbb{R})$, alors $\det A = \pm 1$.
- $O_n^+(\mathbb{R}) = \{M \in O_n(\mathbb{R}), \det M = 1\}$ est un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$
- $O_n^-(\mathbb{R}) = \{M \in O_n(\mathbb{R}), \det M = -1\}$ n'est pas un groupe

Propriété: Lien avec les matrices

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une BON de E . Alors

- $u \in O(E) \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in O_n(\mathbb{R})$
- $O_n(\mathbb{R})$ est isomorphe à $O(E)$;
- $O_n^+(\mathbb{R}) \simeq O^+(E) = \{u \in O(E); \det u = 1\}$;
- $O_n^-(\mathbb{R}) \simeq O^-(E) = \{u \in O(E); \det u = -1\}$.

APPLICATIONS AUX EXTREMA

Propriété: Applications aux extrema

Soit $U \subset E$ un ouvert non vide, $a \in U$ et $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.

$Hf(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ est la matrice Hessienne de f en a . On suppose que f admet un point critique en a , alors:

- Si $\text{Sp}(Hf(a)) \subset \mathbb{R}_+^*$, alors f admet un minimum local en a ;
- Si $\text{Sp}(Hf(a)) \subset \mathbb{R}_-^*$, alors f admet un maximum local en a ;
- Si $Hf(a)$ admet deux valeurs propres de signes opposés, alors a est un point col ou selle.

RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES $\perp$

E désigne un plan euclidien orienté,

Propriété: Réduction des endomorphismes $\perp$

Soit $u \in \mathcal{O}(E)$ avec $n \geq 2$. Il existe une BON $\mathcal{B}$ de E telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} I_p & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -I_q & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & R_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & R_r \end{pmatrix}$$

où pour tout $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, on note: $R_k = \begin{pmatrix} \cos \theta_k & -\sin \theta_k \\ \sin \theta_k & \cos \theta_k \end{pmatrix}$ avec $\theta_k \in]0, 2\pi[\setminus \{\pi\}$ et p, q, r sont des entiers naturels tels $p + q + 2r = n$ (si l'un de ces entiers est nul, les blocs de matrices correspondants n'existent pas).

Propriété: Isométries positives en dimension 3

Soit $f \in \mathcal{O}^+(E)$, alors il existe une BON directe $\mathcal{B} = (u, v, w)$ dans laquelle la matrice de f est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

f est dite la rotation d'axe dirigé et orienté par u et d'angle θ .

Méthode: Comment déterminer les éléments de f

- Pour déterminer une telle base on prend u normé qui engendre $\text{Ker}(f - \text{id})$, v unitaire et orthogonal à u et $w = u \wedge v$;
- Pour déterminer $\cos \theta$, on utilise la trace de f ;
- le signe de $\sin \theta$ est celui de $\text{Det}(u, x, f(x))$ où x est un vecteur non colinéaire à u

CONTACT INFORMATION

Web: www.elamdaoui.com

Email: elamdaoui@gmail.com

Phone: 06 62 30 38 81