
Équations différentielles linéaires

EL AMDAOUI Mustapha,

Lycée IBN TIMIYA,
site web: www.elamdaoui.com,
email: elamdaoui@gmail.com

Niveau: MP

Table des matières

I	Rappels de sup	2
I.1	Équations linéaires scalaires d'ordre 1	2
I.2	Problème de raccordement	10
II	Équations linéaires vectorielles d'ordre 1	14
II.1	Équations linéaires vectorielles d'ordre 1	14
II.2	Théorème de Cauchy-lipschitz linéaire	15
II.3	Wronskien	16
II.4	Variation des constantes	18
III	Équations linéaires à coefficients constants	20
III.1	Étude théorique	20
III.2	Utilisation de valeurs propres	22
III.3	Utilisation de changement de bases	24
IV	Équations linéaires (scalaires) d'ordre n	28
IV.1	Equations scalaires d'ordre n	28
IV.2	Système différentiel d'ordre un associé	29
IV.3	Wronskien	31
IV.4	Méthode de Lagrange ou méthode d'abaissement du degré	34
IV.5	Équations différentielles linéaires constantes	34
IV.6	Application classique des séries entières	40

Dans ce chapitre

- ▶ $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$;
- ▶ I est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide ;
- ▶ E désigne un espace vectoriel normé de dimension finie $n \geq 1$;
- ▶ $\mathcal{D}(I, E)$ désigne l'ensemble des fonctions dérivables sur I à valeurs dans E ;
- ▶ $\mathcal{L}(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E ;
- ▶ $\mathcal{B} = (e_j)_{1 \leq j \leq n}$ une base de E ;
- ▶ Si $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$, on note $u.x$ plutôt que $u(x)$;
- ▶ Comme $B : \begin{cases} \mathcal{L}(E) \times E \longrightarrow E \\ (u, x) \longmapsto u.x \end{cases}$ est bilinéaire, si $a \in \mathcal{D}(I, \mathcal{L}(E))$ et si $\varphi \in \mathcal{D}(I, E)$, en notant

$$a.\varphi : \begin{cases} I \rightarrow E \\ t \mapsto a(t).\varphi(t) \end{cases},$$

alors $a.\varphi \in \mathcal{D}(I, E)$ et

$$(a.\varphi)' = a'.\varphi + a.\varphi'$$

I Rappels de sup

I.1 Équations linéaires scalaires d'ordre 1

Rappel :

On appelle équation différentielle (scalaire) linéaire d'ordre 1 définie sur I toute équation de la forme

$$(L): \quad x' = a.x + b$$

d'inconnue $x : I \rightarrow \mathbb{K}$, où $a, b : I \rightarrow \mathbb{K}$ deux fonctions continues.

- ▶ l'équation $(H): \quad x' = ax$ est dite homogène ou sans second membre (associée à (L)).
- ▶ Résoudre, ou intégrer, une équation différentielle, c'est trouver toutes les fonctions $x : I \rightarrow \mathbb{K}$ dérivables telles que $\forall t \in I, \quad x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$

Exemple

Pour $a \in \mathbb{C}$, la solution générale de l'équation $x' = ax$ est $x : t \mapsto \lambda e^{at}$ où $\lambda \in \mathbb{C}$

Propriété 1: Régularité des solutions

Si φ est solution de $(L): x' = a(t).x + b(t)$ (où a et b sont continues sur I), alors $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$.

Prolongement : si a et b sont de classe $\mathcal{C}^k$ alors φ sera de classe $\mathcal{C}^{k+1}$.

Preuve:

Soit x une solution de (L) . La fonction x est dérivable, donc elle est continue sur I et on a :

$$\forall t \in I, \quad x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$$

La fonction x' est continue sur I et donc x est de classe $\mathcal{C}^1$

Théorème 1: Cauchy-Lipschitz

Soit $a, b : I \rightarrow \mathbb{K}$ deux fonctions continues. Le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x' = a.x + b \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \text{où } t_0 \in I \text{ et } x_0 \in \mathbb{K}$$

admet une et une seule solution. Une telle solution est donnée par

$$x(t) = e^{A(t)} \left(x_0 + \int_{t_0}^t b(s) e^{-A(s)} ds \right)$$

Où A est la primitive de a sur I qui s'annule en t_0

Preuve:

Introduisons A la primitive s'annulant en t_0 de la fonction continue $a : I \rightarrow \mathbb{K}$

► **Unicité :** Si x est solution alors

$$(x(t)e^{-A(t)})' = (x'(t) - a(t)x(t))e^{-A(t)} = b(t)e^{-A(t)}$$

donc $t \mapsto x(t)e^{-A(t)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$x(t)e^{-A(t)} = x(t_0) + \int_{t_0}^t b(s)e^{-A(s)} ds$$

Puis

$$x(t) = e^{A(t)} \left(x_0 + \int_{t_0}^t b(s)e^{-A(s)} ds \right)$$

► **Existence :** La fonction définie par

$$x : t \mapsto e^{A(t)} \left(x_0 + \int_{t_0}^t b(s)e^{-A(s)} ds \right)$$

est bien solution.

Exemple

Soit $a, b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues avec a impaire et b paire. Montrer que l'équation différentielle

$$(E) \quad y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$$

admet une unique solution impaire.

Il y a deux clés pour résoudre cet exercice :

- toute fonction impaire vaut 0 en 0 ;
- L'équation différentielle (E) admet une unique solution y_0 vérifiant $y_0(0) = 0$.

Ceci montre déjà l'unicité : s'il y a une fonction y impaire solution de (E), elle vérifie $y(0) = 0$ et doit donc être égale à y_0 . Réciproquement, on doit prouver que y_0 est impaire. On va poser $z(t) = -y_0(-t)$. z est solution de (E). En effet,

$$z'(t) + a(t)z(t) = y_0'(-t) - a(t)y_0(-t) = y_0'(-t) + a(-t)y_0(-t) = b(-t) = b(t),$$

car y_0 est solution de (E), a est impaire et b est paire. z est donc solution de (E), et satisfait de plus $z(0) = 0$. Ainsi, par unicité au problème de Cauchy, z est égale à y_0 , et donc y_0 est impaire.

Propriété 2: Structure de l'ensemble de solution

Notons S_L et S_H les ensembles de solutions respectifs de (L) et (H)

1. S_H est une droite vectorielle de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ engendrée par

$$t \mapsto e^{A(t)}$$

où A désigne une primitive de la fonction continue a .

2. S_L est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ de direction S_H

Preuve:

1. On sait déjà que S_H est un espace vectoriel. L'application $S_H \rightarrow \mathbb{K}$, $\varphi \mapsto \varphi(t_0)$ est visiblement linéaire et le théorème de Cauchy Lipschitz assure que cette application est bijective (puisque pour tout $x_0 \in \mathbb{K}$, il existe une unique solution définie sur I vérifiant $\varphi(t_0) = y_0$). L'application en question est donc un isomorphisme d'espaces vectoriels et les deux espaces vectoriels ont donc même dimension.
2. Par le théorème de Cauchy-Lipchitz linéaire $S_L \neq \emptyset$, et considérons $x_p \in S_L$. Alors $x \in S_L \iff (x - x_p) \in S_H$. On a en

effet : $x'_p = a(t)x_p + b$ Donc

$$x \in S_L \iff (x - x_p)' = a \cdot (x - x_p)$$

Donc $S_L = x_p + S_H$

Exemple

Prouver que toute solution de l'équation différentielle $y' + e^{x^2}y = 0$ admet une limite nulle en $+\infty$.

On sait que toute solution s'écrit sous la forme

$$y(x) = ke^{A(x)} \text{ avec } A(x) = -\int_0^x e^{t^2} dt.$$

Or, pour $t \geq 0$, on a $e^{t^2} \geq 1$ d'où l'on déduit que pour $x \geq 0$,

$$\int_0^x e^{t^2} dt \geq \int_0^x 1 dt = x.$$

On en déduit que $A(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ et donc par composition et produit que $y(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

Exemple: S

it a un réel non nul. Soit f continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période $T \neq 0$. Montrer que l'équation différentielle $y' + ay = f$ admet une et une seule solution périodique sur $\mathbb{R}$, de période T .

On sait que les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation proposée sont les fonctions de la forme :

$$g : x \mapsto \lambda e^{-ax} + e^{-ax} \int_0^x e^{at} f(t) dt, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Dans ce cas, pour $x \in \mathbb{R}$, $g(x+T) = \lambda e^{-a(x+T)} + e^{-a(x+T)} \int_0^{x+T} e^{at} f(t) dt$. Or,

$$\begin{aligned} \int_0^{x+T} e^{at} f(t) dt &= \int_0^x e^{at} f(t) dt + \int_x^{x+T} e^{at} f(t) dt = \int_0^x e^{at} f(t) dt + \int_0^T e^{a(u+T)} f(u+T) du \\ &= \int_0^x e^{at} f(t) dt + e^{aT} \int_0^T e^{au} f(u) du. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} g(x+T) &= \lambda e^{-a(x+T)} + e^{-a(x+T)} \int_0^x e^{at} f(t) dt + e^{-ax} \int_0^T e^{au} f(u) du \\ &= \lambda e^{-a(x+T)} + e^{-a(x+T)} \int_0^T e^{at} f(t) dt + g(x) - \lambda e^{-ax}. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} g \text{ est } T\text{-périodique} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda e^{-a(x+T)} + e^{-a(x+T)} \int_0^T e^{at} f(t) dt - \lambda e^{-ax} = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda(1 - e^{-aT}) = e^{-aT} \int_0^T e^{at} f(t) dt \Leftrightarrow \lambda = \frac{e^{-aT}}{1 - e^{-aT}} \int_0^T e^{at} f(t) dt \end{aligned}$$

($e^{-aT} \neq 1$ car $a \neq 0$ et $T \neq 0$). D'où l'existence et l'unicité d'une solution T -périodique :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{e^{-aT}}{1 - e^{-aT}} \int_0^T e^{at} f(t) dt e^{-ax} + e^{-ax} \int_0^x e^{at} f(t) dt.$$

Propriété 3: Principe de superposition

Soit $a : I \rightarrow \mathbb{K}$ continue et soit $(b_i)_{i=1}^m$ une famille des applications continues de $\mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ et x_i une solution

de l'équation

$$(L_i): x' = a_i x + b_i$$

Alors $\sum_{i=1}^m x_i$ est une solution particulière de $x' = a x + b$ avec $b = \sum_{i=1}^m b_i$

Preuve:

$x = \sum_{i=1}^m x_i$ est de $\mathcal{C}^1$ sur I comme somme de fonctions de $\mathcal{C}^1$ sur I et

$$\begin{aligned} x' &= \sum_{k=1}^m x'_k = \sum_{k=1}^m (a_k x_k + b_k) \\ &= a \sum_{k=1}^m x_k + \sum_{k=1}^m b_k \\ &= a x + b \end{aligned}$$

Théorème 2: Variation de la constante

Soit $\lambda \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$, alors $x: t \mapsto \lambda(t)e^{A(t)}$ est une solution de l'équation (L) si, et seulement si,

$$\lambda'(t) = b(t)e^{-A(t)}$$

Preuve:

$x: t \mapsto \lambda(t)e^{A(t)}$ est de $\mathcal{C}^1$ sur I et

$$x'(t) = \lambda'(t)e^{A(t)} + a(t)\lambda(t)e^{A(t)} = a(t)x(t) + \lambda'(t)e^{A(t)}$$

Donc x est solution de (L) si, et seulement si, $\lambda'(t)e^{A(t)} = b(t)$ si, et seulement si, $\lambda'(t) = b(t)e^{-A(t)}$

Exemple

Réolvons sur $\mathbb{R}$, l'équation

$$(L): (1+t^2)y' + 2ty = 1$$

Puisque $\forall t \in \mathbb{R}$, on a $1+t^2 \neq 0$, alors

$$(L): (1+t^2)y' + 2ty = 1 \iff y' = -\frac{2t}{1+t^2}y + \frac{1}{1+t^2}$$

(L) est équivalente à une équation différentielle linéaire d'ordre 1 définie sur $\mathbb{R}$.

► **Solution de l'équation homogène :** $y' = -\frac{2t}{1+t^2}y$.

On a

$$\int -\frac{2t}{1+t^2} dt = -\ln(1+t^2) + \text{cte}$$

Donc les solutions de l'équation homogène sont de la forme

$$y_0: t \mapsto \lambda e^{-\ln(1+t^2)} = \frac{\lambda}{1+t^2}, \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

► **Solution de l'équation complète :** Par la variation de la constante $y: t \mapsto \lambda e^{-\ln(1+t^2)} = \frac{\lambda}{1+t^2}$, avec $\lambda \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, est solution de l'équation complète si, et seulement si,

$$\lambda'(t) = \frac{1}{1+t^2} \cdot e^{\ln(1+t^2)} = 1 \iff \lambda(t) = t + \alpha$$

Donc les solutions de l'équation complète sont de la forme

$$y: t \mapsto \lambda e^{-\ln(1+t^2)} = \frac{t+\alpha}{1+t^2}, \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}$$

Exemple

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que : $f(x) + f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Montrer que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

On pose $g = f + f'$. Alors f est solution de l'équation différentielle $f + f' = g$. On résout cette équation. L'équation homogène est $f' + f = 0$ dont la solution générale est donnée par λe^{-x} . On résout l'équation avec second membre par la méthode de variation de la constante : en posant $f(x) = \lambda(x)e^{-x}$, on trouve

$$\lambda'(x)e^{-x} = g(x),$$

et une solution particulière est donnée par

$$f_0(x) = e^{-x} \int_0^x g(t)e^t dt.$$

Finalement, toute fonction f vérifiant $f + f' = g$ s'écrit

$$f(x) = \lambda e^{-x} + e^{-x} \int_0^x g(t)e^t dt.$$

Pour montrer que f tend vers 0 en $+\infty$, il suffit de prouver que $e^{-x} \int_0^x g(t)e^t dt$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. Pour cela, on va utiliser que g tend vers 0 en $+\infty$, et on va couper l'intégrale en 2. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A > 0$ tel que, pour $t > A$, on a $|g(t)| \leq \varepsilon$. Soit $M = \int_0^A |g(t)e^{-t}| dt$ et soit $B \geq A$ tel que, pour $x \geq B$, on a $e^{-x}M \leq \varepsilon$. Alors, pour tout $x \geq b$, il vient

$$\begin{aligned} \left| e^{-x} \int_0^x g(t)e^{-t} dt \right| &\leq e^{-x} \int_0^A |g(t)e^{-t}| dt + e^{-x} \int_A^x |g(t)|e^{-t} dt \\ &\leq e^{-x}M + e^{-x} \int_A^x \varepsilon e^{-t} dt \\ &\leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

On a bien prouvé que $\lim_{+\infty} f = 0$.

Exemple: R

soudre les équations différentielles suivantes en trouvant une solution particulière par la méthode de variation de la constante :

1. $y' - (2x - \frac{1}{x})y = 1$ sur $]0; +\infty[$
2. $y' - y = x^k \exp(x)$ sur $\mathbb{R}$, avec $k \in \mathbb{N}$
3. $x(1 + \ln^2(x))y' + 2\ln(x)y = 1$ sur $]0; +\infty[$

1. $y' - (2x - \frac{1}{x})y = 1$ sur $]0; +\infty[$

a) **Résolution de l'équation homogène** $y' - (2x - \frac{1}{x})y = 0$.

Une primitive de $a(x) = 2x - \frac{1}{x}$ est $A(x) = x^2 - \ln x$, donc les solutions de l'équation homogène sont les $y(x) = \lambda \exp(x^2 - \ln x) = \lambda \frac{1}{x} \exp(x^2)$, pour λ une constante réelle quelconque.

b) **Recherche d'une solution particulière.**

Nous allons utiliser la méthode de variation de la constante pour trouver une solution particulière à l'équation $y' - (2x - \frac{1}{x})y = 1$. On cherche une telle solution sous la forme $y_0(x) = \lambda(x) \frac{1}{x} \exp(x^2)$ où $x \mapsto \lambda(x)$ est maintenant une fonction.

On calcule d'abord

$$y_0'(x) = \lambda'(x) \frac{1}{x} \exp(x^2) + \lambda(x) \left(-\frac{1}{x^2} + 2 \right) \exp(x^2)$$

Maintenant :

$$\begin{aligned} y_0 &\text{ est solution de } y' - (2x + \frac{1}{x})y = 1 \\ \Leftrightarrow y_0' - (2x - \frac{1}{x})y_0 &= 1 \\ \Leftrightarrow \lambda'(x)x \exp(x^2) + \lambda(x) \left(-\frac{1}{x^2} + 2 \right) \exp(x^2) - (2x - \frac{1}{x})\lambda(x) \frac{1}{x} \exp(x^2) &= 1 \\ \Leftrightarrow \lambda'(x) \frac{1}{x} \exp(x^2) &= 1 \quad \text{cela doit se simplifier !} \\ \Leftrightarrow \lambda'(x) &= x \exp(-x^2) \end{aligned}$$

Ainsi on peut prendre $\lambda(x) = -\frac{1}{2} \exp(x^2)$, ce qui fournit la solution particulière :

$$y_0(x) = \lambda(x) \frac{1}{x} \exp(x^2) = -\frac{1}{2} \exp(-x^2) \frac{1}{x} \exp(x^2) = -\frac{1}{2x}$$

Pour se rassurer, on n'oublie pas de vérifier que c'est bien une solution !

c) **Solution générale.**

L'ensemble des solutions s'obtient par la somme de la solution particulière avec les solutions de l'équation homogène. Autrement dit, les solutions sont les :

$$y(x) = -\frac{1}{2x} + \lambda \frac{1}{x} \exp(x^2) \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

2. $y' - y = x^k \exp(x)$ sur $\mathbb{R}$, avec $k \in \mathbb{N}$

a) **Résolution de l'équation homogène** $y' - y = 0$.

Les solutions de l'équation homogène sont les $y(x) = \lambda \exp(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) **Recherche d'une solution particulière.**

On cherche une solution particulière sous la forme $y_0(x) = \lambda(x) \exp(x)$ où $x \mapsto \lambda(x)$ est maintenant une fonction.

Comme $y'_0(x) = \lambda'(x) \exp(x) + \lambda(x) \exp(x)$ alors

$$\begin{aligned} y_0 & \text{ est solution de } y' - y = x^k \exp(x) \\ \Leftrightarrow \lambda'(x) \exp(x) + \lambda(x) \exp(x) - \lambda(x) \exp(x) &= x^k \exp(x) \\ \Leftrightarrow \lambda'(x) \exp(x) &= x^k \exp(x) \\ \Leftrightarrow \lambda'(x) &= x^k \end{aligned}$$

On fixe $\lambda(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1}$, ce qui conduit à la solution particulière :

$$y_0(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1} \exp(x)$$

c) **Solution générale.**

L'ensemble des solutions est formé des

$$y(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1} \exp(x) + \lambda \exp(x) \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

3. $x(1 + \ln^2(x))y' + 2\ln(x)y = 1$ sur $]0; +\infty[$

Le coefficient de y' ne s'annule pas sur $]0; +\infty[$, l'équation peut donc se mettre sous la forme

$$y' + \frac{2\ln x}{x(1 + \ln^2(x))} y = \frac{1}{x(1 + \ln^2(x))}$$

a) Les solutions de l'équation homogène associée sont les $y(x) = \lambda e^{A(x)}$, où A est une primitive de $a(x) = -\frac{2\ln x}{x(1 + \ln^2(x))}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On peut donc choisir $A(x) = -\ln(u(x))$ avec $u(x) = 1 + \ln^2(x)$. Les solutions

de l'équation sont les $y(x) = \lambda e^{-\ln(1 + \ln^2(x))} = \frac{\lambda}{1 + \ln^2(x)}$.

b) Utilisons la méthode de variation de la constante pour trouver une solution particulière de l'équation avec second membre. On cherche $y_0(x) = \frac{\lambda(x)}{1 + \ln^2(x)}$, avec λ une fonction dérivable. Or $z(x) = \frac{1}{1 + \ln^2(x)}$ est solution de l'équation homogène et $y_0(x) = \lambda(x)z(x)$:

$$\begin{aligned} y_0 & \text{ est solution} \\ \Leftrightarrow y'_0 + \frac{2\ln x}{x(1 + \ln^2(x))} y_0 &= \frac{1}{x(1 + \ln^2(x))} \\ \Leftrightarrow \lambda'(x)z(x) + \lambda(x) \underbrace{\left[z'(x) + \frac{2\ln x}{x(1 + \ln^2(x))} z(x) \right]}_{=0} &= \frac{1}{x(1 + \ln^2(x))} \\ \Leftrightarrow \frac{\lambda'(x)}{1 + \ln^2(x)} &= \frac{1}{x(1 + \ln^2(x))} \\ \Leftrightarrow \lambda'(x) &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

On peut donc choisir $\lambda(x) = \ln x$, ce qui donne la solution particulière $y_0(x) = \frac{\ln x}{1 + \ln^2(x)}$.

- c) Les solutions sont obtenues en faisant la somme de cette solution particulière et des solutions de l'équation homogène : ce sont les

$$y(x) = \frac{\ln x + \lambda}{1 + \ln^2(x)} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Propriété 4: Reste Polynôme-Exponentielle

On se place dans le cas $a \in \mathbb{K}$ et le second membre est exponentielle-polynôme $b : t \mapsto P(t)e^{at}$ où P est une fonction polynomiale et $a \in \mathbb{K}$. Alors l'équation

$$x' = ax + P(t)e^{at}$$

admet une solution particulière de la forme $x_p(t) = Q(t)e^{at}$ où Q est une fonction polynomiale.

- Si $a = \alpha$, alors $\deg Q = \deg(P) + 1$ (Plus précisément Q est une primitive de P)
- Si $a \neq \alpha$, alors $\deg Q = \deg P$

Exemple

Réolvons sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' + 2y = 2xe^x + e^{-2x}$ qui s'annule en 0

- Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène $y' + 2y = 0$ sont toutes les fonctions $x \mapsto \lambda e^{-2x}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$).
- Cherchons une solution particulière de $y' + 2y = xe^x$ (E_1).
Vu que $1 \neq -2$ est le coefficient de x dans e^x , on cherche une solution particulière sous la forme $y_1 : x \mapsto (ax + b)e^x$, où $a, b \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$y_1' + 2y_1 = ((3a - 1)x + (a + 3b))e^x$$

Pour que y_1 soit solution de (E_1), il suffit que : $\begin{cases} 3a - 1 = 1 \\ a + 3b = 0 \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{9} \end{cases}$

Ainsi, $y_1 : x \mapsto \frac{3x-1}{9}e^x$ est une solution particulière de (E_1).

- Cherchons une solution particulière de $y' + 2y = e^{-2x}$ (E_2).
Vu le coefficient de x dans e^{-2x} , on cherche une solution particulière sous la forme $y_2 : x \mapsto (ax + b)e^{-2x}$, où $a, b \in \mathbb{R}$. On a donc :

$$y_2' + 2y_2 = ae^{-2x}$$

Pour que y_2 soit solution de (E_2), il suffit que $a = 1$.

Ainsi, $y_2 : x \mapsto xe^{-2x}$ est une solution particulière de (E_2).

Via le principe de superposition, la solution générale de l'équation est

$$x \mapsto (x + \lambda)e^{-2x} + \frac{3x-1}{9}e^x, \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

L'unique solution nulle en 0 est obtenue pour $\lambda = \frac{1}{9}$

Exemple: Équations de Bernoulli et de Riccati

1. Équation de Bernoulli

- a) Montrer que l'équation de Bernoulli

$$y' + a(x)y + b(x)y^n = 0 \quad n \in \mathbb{Z} \quad n \neq 0, n \neq 1$$

se ramène à une équation linéaire par le changement de fonction $z(x) = 1/y(x)^{n-1}$.

- b) Trouver les solutions de l'équation $xy' + y - xy^3 = 0$.

2. Équation de Riccati

- a) Montrer que si y_0 est une solution particulière de l'équation de Riccati

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)$$

alors la fonction définie par $u(x) = y(x) - y_0(x)$ vérifie une équation de Bernoulli (avec $n = 2$).

b) Résoudre $x^2(y' + y^2) = xy - 1$ en vérifiant d'abord que $y_0(x) = \frac{1}{x}$ est une solution.

1. Équation de Bernoulli

a) On suppose qu'une solution y ne s'annule pas. On divise l'équation $y' + a(x)y + b(x)y^n = 0$ par y^n , ce qui donne

$$\frac{y'}{y^n} + a(x)\frac{1}{y^{n-1}} + b(x) = 0.$$

On pose $z(x) = \frac{1}{y^{n-1}}$ et donc $z'(x) = (1-n)\frac{y'}{y^n}$. L'équation de Bernoulli devient une équation différentielle linéaire :

$$\frac{1}{1-n}z' + a(x)z + b(x) = 0$$

b) Équation $xy' + y - xy^3 = 0$.

Cherchons les solutions y qui ne s'annulent pas. On peut alors diviser par y^3 pour obtenir :

$$x\frac{y'}{y^3} + \frac{1}{y^2} - x = 0$$

On pose $z(x) = \frac{1}{y^2(x)}$, et donc $z'(x) = -2\frac{y'(x)}{y^3(x)}$. L'équation différentielle s'exprime alors $\frac{1}{2}xz' + z - x = 0$, c'est-à-dire :

$$xz' - 2z = -2x.$$

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de cette dernière équation sont les

$$z(x) = \begin{cases} \lambda_+ x^2 + 2x & \text{si } x \geq 0 \\ \lambda_- x^2 + 2x & \text{si } x < 0 \end{cases}, \quad \lambda_+, \lambda_- \in \mathbb{R}$$

Comme on a posé $z(x) = \frac{1}{y^2(x)}$, on se restreint à un intervalle I sur lequel $z(x) > 0$: nécessairement $0 \notin I$, donc on considère $z(x) = \lambda x^2 + 2x$, qui est strictement positif sur I_λ où

$$I_\lambda = \begin{cases}]0; +\infty[& \text{si } \lambda = 0 \\]0; -\frac{2}{\lambda}[& \text{si } \lambda < 0 \\]-\infty; -\frac{2}{\lambda}[\text{ ou }]0; +\infty[& \text{si } \lambda > 0 \end{cases}$$

On a $(y(x))^2 = \frac{1}{z(x)}$ pour tout $x \in I_\lambda$ et donc $y(x) = \varepsilon(x)\frac{1}{\sqrt{z(x)}}$, où $\varepsilon(x) = \pm 1$. Or y est continue sur l'intervalle I_λ , et ne s'annule pas par hypothèse : d'après le théorème des valeurs intermédiaires, y ne peut pas prendre à la fois des valeurs strictement positives et des valeurs strictement négatives, donc $\varepsilon(x)$ est soit constant égal à 1, soit constant égal à -1. Ainsi les solutions cherchées sont les :

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda x^2 + 2x}} \text{ ou } y(x) = \frac{-1}{\sqrt{\lambda x^2 + 2x}} \quad \text{sur } I_\lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Noter que la solution nulle est aussi solution.

2. Équation de Riccati

a) Soit y_0 une solution de $y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)$. Posons $u(x) = y(x) - y_0(x)$, donc $y = u + y_0$. L'équation devient :

$$u' + y_0' + a(x)(u + y_0) + b(x)(u^2 + 2uy_0 + y_0^2) = c(x)$$

Comme y_0 est une solution particulière alors

$$y_0' + a(x)y_0 + b(x)y_0^2 = c(x)$$

Et donc l'équation se simplifie en :

$$u' + (a(x) + 2y_0(x)b(x))u + b(x)u^2 = 0$$

qui est une équation du type Bernoulli.

b) Équation $x^2(y' + y^2) = xy - 1$.

► Après division par x^2 c'est bien une équation de Riccati sur $I =]-\infty; 0[$ ou $I =]0; +\infty[$.

► $y_0 = \frac{1}{x}$ est bien une solution particulière.

- On a $u(x) = y(x) - y_0(x)$ et donc $y = u + \frac{1}{x}$. L'équation $x^2(y' + y^2) = xy - 1$ devient

$$x^2 \left(u' - \frac{1}{x^2} + u^2 + 2\frac{u}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = x \left(u + \frac{1}{x} \right) - 1$$

qui se simplifie en

$$x^2 \left(u' + u^2 + 2\frac{u}{x} \right) = xu$$

ce qui correspond à l'équation de Bernoulli :

$$u' + \frac{1}{x}u + u^2 = 0.$$

- Si u ne s'annule pas, en divisant par u^2 , cette équation devient $\frac{u'}{u^2} + \frac{1}{x}\frac{1}{u} + 1 = 0$. On pose $z(x) = \frac{1}{u}$, l'équation devient $-z' + \frac{1}{x}z + 1 = 0$. Ses solutions sur I sont les $z(x) = \lambda x + x \ln|x|$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Ainsi $u(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{1}{\lambda x + x \ln|x|}$ mais il y a aussi la solution nulle $u(x) = 0$.
- Conclusion. Comme $y = u + \frac{1}{x}$, on obtient alors des solutions de l'équation de départ sur $] -\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$:

$$y(x) = \frac{1}{x} \quad \text{ou} \quad y(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\lambda x + x \ln|x|} \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

I.2 Problème de raccordement

Propriété 5: Prolongement par dérivabilité

Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{t_0\}$

- Si $\lim_{t \rightarrow t_0} f'(t) = \ell \in \mathbb{R}$, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f'(t_0) = \ell$
- Si $\lim_{t \rightarrow t_0} f'(t) = +\infty$ (ou $-\infty$), alors f n'est pas dérivable en t_0 , mais y présente une tangente verticale

Preuve:

Supposons que $\lim_{t \rightarrow t_0} f'(t) = \ell \in \mathbb{R}$. On étudie le taux de variation $\frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h}$.

► Cas t_0 est intérieur à I :

- Pour $h > 0$ tel que $t_0 + h \in I$, en appliquant le théorème des accroissements finis entre t_0 et $t_0 + h$, il existe c_h compris strictement entre t_0 et $t_0 + h$ tel que

$$\frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h} = f'(c_h)$$

Donc

$$\frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h} = f'(c_h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \ell$$

car $c_h \rightarrow 0$ par encadrement. On en déduit que $f'_d(t_0) = \ell$

- L'étude est analogue lorsque $h < 0$.

► Cas t_0 est extrémité de I : Une seule des deux études précédentes suffit pour conclure.

Problème de raccordement :

Soit $a, b, c : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues. On étudie l'équation différentielle

$$(E): \quad ax' + bx = c$$

- Si a ne s'annule pas sur I , alors l'équation (E) équivaut $x' = ax + \beta$ où $\alpha = -\frac{b}{a}$ et $\beta = \frac{c}{a}$
- Si a s'annule sur I

- On commence par résoudre (E) sur les plus grands intervalles $J \subset I$ sur lesquels a ne s'annule pas ;
- on procède ensuite au raccord des solutions aux points où a s'annule

Pour raccorder les solutions en un point t_0 où a s'annule :

- on exprime les solutions à gauche et à droite de t_0 ;
- on étudie s'il est possible de construire une solution prolongeable par continuité en t_0 ;
- on étudie si ce prolongement est dérivable et t_0 ;
- on vérifie que l'équation différentielle est satisfaite en t_0 .

Exemple

Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle suivante :

$$(1-t)y' - y = t$$

On résout l'équation sur chacun des intervalles $]1, +\infty[$ et $]-\infty, 1[$.

- Les solutions de l'équation homogène associée, sur $]1, +\infty[$, sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto \frac{\lambda}{1-t}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

On résout ensuite l'équation générale par la méthode de variation de la constante. En posant $y(t) = \frac{\lambda(t)}{1-t}$, on trouve

$$\lambda'(t) = t \iff \lambda(t) = \frac{t^2}{2} + \alpha$$

On a donc prouvé qu'une fonction y est solution sur $]1, +\infty[$ de l'équation si et seulement s'il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $y(t) = \frac{\lambda + t^2}{2(1-t)}$.

- On résout de même l'équation sur $]-\infty, 1[$.

Considérons maintenant y une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation. Alors il existe deux constantes λ et μ telles que

$$y(t) = \begin{cases} \frac{\lambda + t^2}{2(1-t)} & \text{si } t > 1 \\ \frac{\mu + t^2}{2(1-t)} & \text{si } t < 1. \end{cases}$$

- Pour que y soit continue en 1, puisque $1-t \rightarrow 0$ lorsque t tend vers 1, il est nécessaire que $\lambda + t^2 \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow 1$, soit $\lambda = -1$. De même, on doit avoir $\mu = -1$. Ainsi, si y est solution sur $\mathbb{R}$, pour $t \neq 1$, elle s'écrit

$$y(t) = \frac{t^2 - 1}{2(1-t)} = -\frac{1}{2}(1+t).$$

Cette fonction se prolonge par continuité en 1, et on vérifie aisément qu'elle est solution de l'équation. Dans ce cas, l'ensemble des solutions est un espace affine de dimension 0.

Exemple: R

soudre l'équation différentielle $(1-x^2)y' - 2xy = x^2$ sur chacun des intervalles I suivants : $I =]1, +\infty[$, $I =]-1, 1[$, $I =]-1, +\infty[$, $I = \mathbb{R}$.

L'équation différentielle à résoudre dans cet exercice est linéaire du premier ordre. On note (E) l'équation différentielle proposée et (E_H) l'équation homogène associée.

- Soit I l'un des deux intervalles $]-1, 1[$ ou $]1, +\infty[$. Les fonctions $x \mapsto \frac{-2x}{1-x^2}$ et $x \mapsto \frac{x^2}{1-x^2}$ sont continues sur I et on sait que les solutions de (E) sur I sont de la forme $f_0 + \lambda f_1$ où f_0 est une solution particulière de (E) et f_1 est une solution particulière non nulle de (E_H) .

Résolution de (E) sur I . Soit f une fonction dérivable sur I .

$$f \text{ solution de } (E) \text{ sur } I \iff \forall x \in I, (1-x^2)f'(x) - 2xf(x) = x^2$$

$$\iff \forall x \in I, ((1-x^2)f'(x) = x^2 \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall x \in I, (1-x^2)f(x) = \frac{x^3}{3} + \lambda$$

$$\iff \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall x \in I, f(x) = \frac{x^3 + \lambda}{3(1-x^2)},$$

(en renommant λ la constante 3λ).

- Si $I =]-1, +\infty[$.

Soit f une éventuelle solution de (E) sur I . Les restrictions de f à $]-1, 1[$ et $]1, +\infty[$ sont encore solution de (E) et donc de la forme précédente. Par suite, nécessairement, il existe deux constantes λ_1 et λ_2 telles que, pour $-1 < x < 1$, $f(x) = \frac{x^3 + \lambda_1}{3(1-x^2)}$ et pour $x > 1$, $f(x) = \frac{x^3 + \lambda_2}{3(1-x^2)}$. Enfin, l'équation impose $f(1) = -\frac{1}{2}$. En résumé, une éventuelle solution de (E) sur I est nécessairement de la forme :

$$\forall x > -1, f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + \lambda_1}{3(1-x^2)} & \text{si } -1 < x < 1 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x = 1 \\ \frac{x^3 + \lambda_2}{3(1-x^2)} & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

Réciproquement, f ainsi définie, est dérivable sur $] -1, 1[$ et solution de (E) sur $] -1, 1[$, dérivable sur $]1, +\infty[$ et solution de (E) sur $]1, +\infty[$ et, si f est dérivable en 1, f vérifie encore (E) pour $x = 1$. Donc, f est solution de (E) sur $] -1, +\infty[$ si et seulement si f est dérivable en 1.

Pour $-1 < x < 1$,

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\frac{x^3 + \lambda_1}{3(1-x^2)} + \frac{1}{2}}{x - 1} = \frac{2x^3 + 2\lambda_1 + 3(1-x^2)}{6(1-x^2)(x-1)}$$

Quand x tend vers 1 par valeurs inférieures, le dénominateur de la fraction tend vers 0 et le numérateur tend vers $2(1 + \lambda_1)$. Donc, si $\lambda_1 \neq -1$, f n'est pas dérivable à gauche en 1. De même, si λ_2 n'est pas -1 , f n'est pas dérivable à droite en -1 . Ainsi, si f est solution de (E) sur I , nécessairement $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Dans ce cas, pour $x \in] -1, +\infty[\setminus \{1\}$,

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{3(1-x^2)} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{3(1-x)(1+x)} = -\frac{x^2+x+1}{3(x+1)},$$

ce qui reste vrai pour $x = 1$. Ainsi, si f est une solution de (E) sur $] -1, +\infty[$, nécessairement pour $x > -1$, $f(x) = -\frac{x^2+x+1}{3(x+1)}$. Réciproquement, f ainsi définie est dérivable sur $] -1, +\infty[$ et en particulier en 1. f est donc solution de (E) sur $] -1, +\infty[$.

Sur $] -1, +\infty[$, (E) admet une et une seule solution à savoir la fonction $x \mapsto -\frac{x^2+x+1}{3(x+1)}$.

- Si $I = \mathbb{R}$, soit f une éventuelle solution de (E) sur $\mathbb{R}$. La restriction de f à $] -1, +\infty[$ est nécessairement la fonction précédente. Mais cette fonction tend vers $-\infty$ quand x tend vers -1 par valeurs supérieures. Donc f ne peut être continue sur $\mathbb{R}$ et (E) n'a pas de solution sur $\mathbb{R}$.

Exemple: P

ur les équations différentielles suivantes, trouver les solutions définies sur $\mathbb{R}$ tout entier :

1. $x^2 y' - y = 0$ (E_1)
2. $xy' + y - 1 = 0$ (E_2)

1. $x^2 y' - y = 0$ (E_1)

Pour se ramener à l'étude d'une équation différentielle de la forme $y' + ay = b$, on résout d'abord sur les intervalles où le coefficient de y' ne s'annule pas : on se place donc sur $] -\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$.

- a) **Résolution sur $] -\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$.**

Sur chacun de ces intervalles, l'équation différentielle se réécrit

$$y' - \frac{1}{x^2} y = 0$$

qui est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 à coefficients non constants. Ses solutions sont de la forme $y(x) = \lambda e^{-1/x}$ (en effet, sur $] -\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$, une primitive de $\frac{1}{x^2}$ est $-\frac{1}{x}$).

- b) **Recollement en 0.**

Une solution y de (E_1) sur $\mathbb{R}$ doit être solution sur $] -\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$, il existe donc $\lambda_+, \lambda_- \in \mathbb{R}$ tels que

$$y(x) = \begin{cases} \lambda_+ e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ \lambda_- e^{-1/x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Il reste à voir si l'on peut recoller les deux expressions pour obtenir une solution sur $\mathbb{R}$: autrement dit, pour quels choix de λ_+, λ_- la fonction y se prolonge-t-elle en 0 en une fonction dérivable vérifiant (E_1) ?

- $e^{-1/x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} +\infty$ et $e^{-1/x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$, donc y est prolongeable par continuité en 0 si et seulement si

$\lambda_- = 0$. On peut alors poser $y(0) = 0$, quel que soit le choix de λ_+ .

- Pour voir si la fonction ainsi prolongée est dérivable en 0, on étudie son taux d'accroissement :

$$\begin{cases} \text{pour } x > 0, \frac{y(x)-y(0)}{x-0} = \frac{\lambda_+ e^{-1/x}}{x} = -\lambda_+ \left(\frac{-1}{x}\right) e^{-1/x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0 \\ \text{pour } x < 0, \frac{y(x)-y(0)}{x-0} = 0 \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 0 \end{cases}$$

Ainsi la fonction y est dérivable en 0 et $y'(0) = 0$.

- Par construction, l'équation différentielle (E_1) est satisfaite sur $\mathbb{R}^*$. Vérifions qu'elle est également satisfaite au point $x = 0$: $0^2 \cdot y'(0) - y(0) = -y(0) = 0$.

c) Conclusion.

Finalement, les solutions sur $\mathbb{R}$ sont exactement les fonctions suivantes :

$$y(x) = \begin{cases} \lambda e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

2. $xy' + y - 1 = 0$ (E_2)

Pour se ramener à l'étude d'une équation différentielle de la forme $y' + ay = b$, on résout d'abord sur les intervalles où le coefficient de y' ne s'annule pas : on se place donc sur $I =]-\infty; 0[$ ou $I =]0; +\infty[$.

a) Résolution sur I .

Sur l'intervalle I , l'équation différentielle se réécrit

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x}$$

qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients non constants.

- Pour l'équation homogène $y' + \frac{1}{x}y = 0$ une primitive de $-\frac{1}{x}$ sur I , est $-\ln|x|$. Les solutions de l'équation homogène sont donc les $\lambda e^{-\ln|x|} = \lambda \frac{1}{|x|}$. Quitte à changer λ en $-\lambda$ si $I =]-\infty; 0[$, on peut écrire les solutions de l'équation homogène sous la forme $y(x) = \lambda \frac{1}{x}$.
- Pour trouver les solutions de l'équation avec second membre, on applique la méthode de variation de la constante en cherchant $y(x) = \lambda(x) \frac{1}{x}$: en remplaçant, on voit que y est solution sur I si et seulement si $\lambda'(x) = 1$. En intégrant, on obtient $\lambda(x) = x$. Une solution particulière est donc $y_0(x) = 1$.
- Sur I les solutions de (E_2) sont les $y(x) = 1 + \frac{\lambda}{x}$ où λ est un paramètre réel.

b) Recollement en 0.

Une solution y de (E_2) sur $\mathbb{R}$ doit être solution sur $] -\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$, il existe donc $\lambda_+, \lambda_- \in \mathbb{R}$ tels que

$$y(x) = \begin{cases} 1 + \frac{\lambda_+}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 + \frac{\lambda_-}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Il reste à voir si l'on peut recoller les deux expressions pour obtenir une solution sur $\mathbb{R}$. On voit tout de suite que y a une limite (finie) en 0 si et seulement si $\lambda_+ = \lambda_- = 0$. Dans ce cas, on peut alors poser $y(0) = 1$ et y est la fonction constante égale à 1, qui est bien sûr dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, (E_2) est bien satisfaite au point $x = 0$.

c) Conclusion.

Finalement, (E_2) admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution, qui est la fonction constante égale à 1.

II Équations linéaires vectorielles d'ordre 1

II.1 Équations linéaires vectorielles d'ordre 1

Définition 1: Équation différentielle linéaire du premier ordre

On appelle *équation différentielle linéaire du premier ordre*, définie sur I et à valeurs dans E , toute équation du type :

$$(L): \quad x' = a \cdot x + b$$

où $a \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(E))$ et $b \in \mathcal{C}(I, E)$ d'inconnue $x : t \in I \mapsto x(t) \in E$ fonction dérivable sur I .

On appelle *équation homogène associée à (L)* l'équation différentielle :

$$(H) : x' = a \cdot x$$

Remarque :

Les endomorphismes de $\mathbb{K}$ sont les applications $x \mapsto ax$ ou $a \in \mathbb{K}$

Définition 2: Système différentiel linéaire

Aux applications a et b sont associées les applications $A : I \mapsto M_n(\mathbb{K})$ et $B : I \mapsto M_{n,1}(\mathbb{K})$, où, pour tout $t \in I$, $A(t)$ et $B(t)$ sont les matrices de $a(t)$ et $b(t)$ dans la base $\mathcal{B}$.

► L'équation (L) équivaut à l'équation matricielle

$$X' = AX + B$$

dont les inconnues X sont à valeurs dans $M_{n,1}(\mathbb{K})$.

► En notant $a_{i,j}(t)$ les coefficients de la matrice $A(t)$, $b_i(t)$ ceux de la colonne $B(t)$ et $x_i(t)$ ceux de la colonne $X(t)$, l'équation (L) équivaut au système différentiel

$$\begin{cases} x'_1 &= \sum_{j=1}^n a_{1,j}(t)x_j(t) + \cdots + a_{1,n}(t)x_n & + b_1(t) \\ &\vdots \\ x'_n &= a_{n,1}(t)x_1 + \cdots + a_{n,n}(t)x_n & + b_n(t) \end{cases}$$

Remarque :

En pratique, c'est fréquemment sous la forme d'un système différentiel que sont présentés les équations linéaires vectorielles.

Définition 3: Solution de l'équation différentielle linéaire

Une solution de l'équation différentielle linéaire (L) est une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(I, E)$ telle que :

$$\forall t \in I, \quad \varphi'(t) = a(t) \cdot \varphi(t) + b(t)$$

Propriété 6: Régularité des solutions

Si φ est solution de $(L) : x' = a(t) \cdot x + b(t)$ (où a et b sont continues sur I), alors $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, E)$.

Prolongement : si a et b sont de classe $\mathcal{C}^k$ alors φ sera de classe $\mathcal{C}^{k+1}$.

Preuve:

Soit φ une solution de (L). La fonction φ est dérivable et

$$\forall t \in I, \quad \varphi'(t) = a(t) \cdot \varphi(t) + b(t)$$

L'application $\Psi : \begin{cases} \mathcal{L}(E) \times E & \longrightarrow E \\ (a, x) & \longmapsto a(x) \end{cases}$ est bilinéaire donc continue car $\dim E$ est finie. Puisque

$$\varphi' = \Psi(a, \varphi) + b,$$

la fonction φ' est continue sur I et donc φ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Notation :

On note respectivement S_L et S_H l'ensemble des solutions sur I de (L) et (H) .

Propriété 7: Principe de superposition

Soit $(b_i)_{i=1}^m$ une famille des applications continues de $\mathcal{C}(I, E)$ et x_i une solution de l'équation

$$(L_i) : x' = a.x + b_i$$

Alors $\sum_{i=1}^m x_i$ est une solution particulière de $x' = a.x + b$ avec $b = \sum_{i=1}^m b_i$

II.2 Théorème de Cauchy-lipschitz linéaire**Définition 4: Problème de Cauchy**

On appelle problème de Cauchy tout problème du type :

$$\begin{cases} x' = a.x + b \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \text{où } t_0 \in I, x_0 \in E$$

où $a \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(E))$, $b \in \mathcal{C}(I, E)$.

Résoudre le problème de Cauchy, c'est trouver toutes les solutions $x : I \rightarrow E$ de (L) telles que $x(t_0) = x_0$

Propriété 8: Équation intégrale associée à un problème de Cauchy

Soit $a \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(E))$, $b \in \mathcal{C}(I, E)$ et soit $x : I \rightarrow E$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. x est de classe $\mathcal{C}^1$ et est solution du problème de Cauchy

$$(PC) \begin{cases} x' = a.x + b \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \text{où } t_0 \in I, x_0 \in E$$

2. x est continue et $\forall t \in I, \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t (a(s)x(s) + b(s)) \, ds$

Preuve:

1 $\Rightarrow$ 2) Si x est solution de (PC), on a pour tout $t \in I$,

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t x'(s) \, ds = x_0 + \int_{t_0}^t (a(s)x(s) + b(s)) \, ds$$

2 $\Rightarrow$ 1) Si x est solution continue de l'équation intégrale, alors $s \mapsto a(s)x(s) + b(s)$ est continue. Donc $t \mapsto \int_{t_0}^t (a(s)x(s) + b(s)) \, ds$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Donc x est de classe $\mathcal{C}^1$, et en dérivant par rapport à t , on retrouve (L) . Finalement en prenant $t = t_0$, on aura $x(t_0) = x_0$.

Théorème 3: Théorème de Cauchy-Lipschitz-linéaire

Soit $a \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(E))$, $b \in \mathcal{C}(I, E)$ avec E un espace vectoriel normé de dimension finie. Le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x' = a.x + b \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \text{où } t_0 \in I, x_0 \in E$$

admet une et une seule solution.

Preuve:

Admis

Propriété 9: Structure de l'ensemble de solutions

Notons S_L et S_H les ensembles de solutions respectifs de (L) et (H)

1. S_H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, E)$ isomorphe à E .
En particulier $\dim S_H = \dim E = n$
2. S_L est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(I, E)$ de direction S_H

Preuve:

1. On sait déjà que S_H est un espace vectoriel. L'application

$$\theta_{t_0} : \begin{cases} S_H & \longrightarrow E \\ \varphi & \longmapsto \varphi(t_0) \end{cases}$$

est visiblement linéaire et le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire assure que cette application est bijective (puisque pour tout $x_0 \in E$, il existe une unique solution définie sur I vérifiant $\varphi(t_0) = x_0$). L'application en question est donc un isomorphisme d'espaces vectoriels et les deux espaces vectoriels ont donc même dimension.

2. Par le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire $S_L \neq \emptyset$, et considérons $x_p \in S_L$. Alors

$$x \in S_L \iff (x - x_p) \in S_H.$$

On a en effet : $x_p' = a(t)x_p + b$. Donc

$$x \in S_L \iff (x - x_p)' = a \cdot (x - x_p)$$

Donc $S_L = x_p + S_H$

II.3 Wronskien**Définition 5: Matrice Wronskienne et Wronskien**

Soient $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une famille de fonction de I à valeurs dans E .

1. Pour tout $t \in I$ la matrice

$$W_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n), \mathcal{B}}(t) = \underset{\mathcal{B}}{\text{Mat}}(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$$

est appelée **matrice Wronskienne** en t du système $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ par rapport à la base $\mathcal{B}$.

2. Le déterminant $w_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n), \mathcal{B}}(t) = \det(W(t))$ est appelé le **Wronskien** en t du système $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ par rapport à la base $\mathcal{B}$

Propriété 10: Base de S_H

Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une famille de S_H espace solution de (H) où $a \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(E))$. Alors

1. Pour tout $t \in I$, $\mathbf{rg}(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = \mathbf{rg}(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$
2. Les trois affirmations suivantes sont équivalentes :
 - a) $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de S_H ;
 - b) $\exists t_0 \in I$ tel que $(\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_n(t_0))$ est une base de E ;
 - c) $\exists t_0 \in I$ tel que $W_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n), \mathcal{B}}(t_0) \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$;
 - d) $\exists t_0 \in I$ tel que $w_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n), \mathcal{B}}(t_0) \neq 0$;
 - e) $\forall t \in I$, $(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ est une base de E ;
 - f) $\forall t \in I$, $W_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n), \mathcal{B}}(t) \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$;
 - g) $\forall t \in I$, $w_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n), \mathcal{B}}(t) \neq 0$.

Une base de S_H est appelée aussi un système fondamental de l'équation (H)

Preuve:

1. Pour $t \in I$, l'application

$$\theta_t : \begin{cases} S_H & \longrightarrow E \\ \varphi & \longmapsto \varphi(t) \end{cases}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels, donc il conserve le rang, ainsi

$$\mathbf{rg}(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = \mathbf{rg}(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$$

2. Les équivalences sont triviales vu l'isomorphisme θ

Exemple

Soit $X' = AX + B$, avec $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B : t \mapsto \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$.

Montrons que $X_1 : t \mapsto \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$ et $X_2 : t \mapsto \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$ forment un système fondamental de solution de $X' = AX$

X_1 et X_2 sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et par un calcul matriciel, on trouve

$$AX_1(t) = X_1(t) \text{ et } AX_2(t) = 2X_2(t)$$

En outre, par un calcul des dérivées, on a

$$X_1'(t) = X_1(t) \text{ et } X_2'(t) = 2X_2(t),$$

donc X_1 et X_2 sont solutions de l'équation homogène. De plus $X_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_2(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une famille libre dans l'espace $M_{2,1}(\mathbb{R})$ qui est de dimension 2, donc (X_1, X_2) est un système fondamental de solution de (H)

Exemple

1. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n , et $u \in \mathcal{L}(E)$, $(v_1, \dots, v_n) \in E^n$ et $\mathcal{B}$ une base de E . Montrer que

$$\sum_{j=1}^n \det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_{j-1}, u(v_j), v_{j+1}, \dots, v_n) = \text{Tr}(u) \cdot \det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n)$$

2. Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des solutions de $x' = ax$. Déterminer une équation différentielle vérifiée par le wronskien, puis déduire qu'il existe $k \in \mathbb{K}$ tel que :

$$\forall t \in I, \quad w_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \mathcal{B}}(t) = k \cdot \exp\left(\int \text{Tr}(a(t)) dt\right)$$

1. Posons

$$\varphi : (v_1, \dots, v_n) \in E^n \mapsto \sum_{i=1}^n \det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_{i-1}, u(v_i), v_{i+1}, \dots, v_n)$$

► φ est n -linéaire, car $\det_{\mathcal{B}} : E^n \rightarrow \mathbb{K}$ est n linéaire ;

► φ est alternée : On suppose que $v_k = v_\ell$ pour $1 \leq k < \ell \leq n$. Puisque $\det_{\mathcal{B}}$ est alternée, il reste

$$\varphi(v_1, \dots, v_n) = \det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_{k-1}, u(v_k), v_{k+1}, \dots, v_n) + \det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_{\ell-1}, u(v_\ell), v_{\ell+1}, \dots, v_n) = 0$$

Mais l'ensemble des formes n -linéaires alternées sur E^n est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 1 engendré par $\det_{\mathcal{B}}$, donc il existe $k \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi = k \det_{\mathcal{B}}$, avec $k = \varphi(\mathcal{B})$.

On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. Alors $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $u(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i$ et

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_{j-1}, u(e_j), e_{j+1}, \dots, e_n) &= \det_{\mathcal{B}}\left(e_1, \dots, e_{j-1}, \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i, e_{j+1}, \dots, e_n\right) \\ &= \sum_{i=1}^n a_{i,j} \det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_{j-1}, e_i, e_{j+1}, \dots, e_n) \\ &= a_{j,j} \det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_{j-1}, e_j, e_{j+1}, \dots, e_n) \\ &= a_{j,j} \end{aligned}$$

Donc

$$\varphi(e_1, \dots, e_n) = \sum_{j=1}^n a_{j,j} = \text{Tr}(A) = \text{Tr}(u),$$

Bref

$$\sum_{j=1}^n \det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_{j-1}, u(v_j), v_{j+1}, \dots, v_n) = \text{Tr}(u) \cdot \det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n)$$

2. Comme les $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont de classe $\mathcal{C}^1$, $w_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \mathcal{B}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\forall t \in I$,

$$\begin{aligned} w'_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \mathcal{B}}(t) &= \sum_{j=1}^n \det_{\mathcal{B}}(\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, \alpha'_j(t), \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_n(t)) \\ &= \sum_{j=1}^n \det_{\mathcal{B}}(\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, a(t)\alpha_j(t), \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_n(t)) \\ &= \text{Tr}(a(t)) \cdot \det_{\mathcal{B}}(\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, \alpha_j(t), \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_n(t)) \\ &= \text{Tr}(a(t)) \cdot w_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \mathcal{B}}(t) \end{aligned}$$

Donc il est solution de l'équation différentielle $y' = \text{Tr}(a) \cdot y$, d'où son expression.

II.4 Variation des constantes

Lemme 1

Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ un système fondamental de solutions de $(H) : x' = a(t)x$. Alors :

1. Pour tout $f \in \mathcal{C}(I, E)$, il existe une famille $(\lambda_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ de $\mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ telle que $f = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i$.
2. En outre, si $f \in \mathcal{C}^1(I, E)$, alors $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_i \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$.

Preuve:

1. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et W la wronskienne de l'équation (H) par rapport à $\mathcal{B}$. D'après la propriété II.3, pour tout $t \in I$, $(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ est une base de E , et $W(t)$, matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$, est inversible. On dispose ainsi d'applications de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans $\text{GL}_n(\mathbb{K})$:

$$W : t \mapsto W(t) \quad \text{et} \quad W : t \mapsto [W(t)]^{-1}$$

Introduisons les applications coordonnées $f_1, \dots, f_n$ de E dans la base $\mathcal{B}$:

$$\forall t \in I, f(t) = \sum_{j=1}^n f_j(t) e_j \quad \text{où} \quad \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, f_j \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$$

Pour tout $t \in I$ fixé, l'existence et l'unicité de $(\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t))$ correspond à un changement de coordonnées, dont l'écriture matricielle est :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1(t) \\ \vdots \\ \lambda_n(t) \end{pmatrix} = [W(t)]^{-1} \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

Les applications $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont continues sur I .

2. Lorsque f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors les fonctions coordonnées $f_1, \dots, f_n$ sont de $\mathcal{C}^1$ sur I et puisque $t \mapsto [W(t)]^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , alors les applications numériques $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .

Théorème 4: Variation des constantes

Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ un système fondamental de solutions de (H) , $x \in \mathcal{C}^1(I, E)$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ telles que $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i$. Alors

$$x \text{ est solution de } (L) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \lambda'_i \varphi_i = b$$

C'est-à-dire si, et seulement si,

$$\forall t \in I \quad \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \lambda'_j(t) = \frac{\det_{\mathcal{B}}(\varphi_1(t), \dots, \varphi_{j-1}(t), b(t), \varphi_{j+1}(t), \dots, \varphi_n(t))}{w_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n), \mathcal{B}}(t)}$$

Preuve:

La dérivée de x s'écrit

$$\begin{aligned}
 x' &= \sum_{i=1}^n \lambda'_i \cdot \varphi_i + \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \varphi'_i \\
 &= \sum_{i=1}^n \lambda'_i \cdot \varphi_i + \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot a \cdot \varphi_i \quad (\varphi_i \text{ solution de } (H)) \\
 &= \sum_{i=1}^n \lambda'_i \cdot \varphi_i + a \cdot \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i \\
 &= \sum_{i=1}^n \lambda'_i \cdot \varphi_i + a \cdot x
 \end{aligned}$$

Donc

$$x' = a \cdot x + b \iff \sum_{i=1}^n \lambda'_i \cdot \varphi_i = b$$

Exemple

Résoudre sur $\mathbb{R}$ le système différentiel $X' = AX + B$, avec $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B : t \mapsto \begin{pmatrix} e^t \\ e^{2t} \end{pmatrix}$.

(X_1, X_2) est un système fondamental de solution de H avec $X_1 : t \mapsto \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$ et $X_2 : t \mapsto \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$.

Par la méthode de la variation des constantes déterminons les solutions de l'équation complète. Soit

$$X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$$

avec $\lambda_1, \lambda_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de $\mathcal{C}^1$. Alors X est solution de l'équation complète si, et seulement si, λ_1 et λ_2 vérifient le système

$$\lambda'_1 X_1 + \lambda'_2 X_2 = B$$

Soit

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} \lambda'_1(t)e^t + 2\lambda'_2(t)e^{2t} = e^t \\ \lambda'_1(t)e^t + \lambda'_2(t)e^{2t} = e^{2t} \end{cases}$$

La résolution donne $\lambda'_1 = 1$ et $\lambda'_2 = 0$, puis $\lambda_1 = t + \alpha$ et $\lambda_2 = \beta$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Puis les solutions de l'équation complète sont

$$X : t \mapsto (t + \alpha)X_1(t) + \beta X_2(t) \text{ où } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

III Équations linéaires à coefficients constants

Rappel :

Soit $\mathbb{A}$ une algèbre normée de dimension finie. Pour $x \in \mathbb{A}$, la série $\sum_{m \geq 0} \frac{x^m}{m!}$ converge absolument donc converge. On pose

$$\exp(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{x^m}{m!}.$$

Pour $u, v \in \mathbb{A}$, on a :

1. $\exp(0_{\mathbb{A}}) = 1_{\mathbb{A}}$.

2. Si u et v commutent, alors

$$\exp(u + v) = \exp(u) \times \exp(v).$$

3. $\exp(u)$ est inversible et $[\exp(u)]^{-1} = \exp(-u)$.

4. Si v est inversible, alors

$$\exp(v^{-1}uv) = v^{-1}\exp(u)v.$$

5. u et $\exp(tu)$ commutent pour tout $t \in \mathbb{R}$.

6. L'application $\varphi_u : t \mapsto \exp(tu)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et de dérivée

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'_u(t) = \exp(tu)u = u \exp(tu)$$

Rappel :

- ▶ Si $\Delta = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\exp(\Delta) = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$.
- ▶ Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable, $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A = P \cdot \Delta \cdot P^{-1}$ avec Δ diagonale. Alors

$$\exp(A) = P \exp(\Delta) P^{-1}$$

- ▶ Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ est nilpotente, alors

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{A^k}{k!}$$

III.1 Étude théorique**Propriété 11: Étude de $(H) : x' = a \cdot x$**

Soit $a \in \mathcal{L}(E)$.

1. Les solutions de (H) sont exactement les applications $t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(ta) \cdot x_0$ où x_0 un vecteur de E
2. L'unique solution au problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = ax \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \quad t_0 \in \mathbb{R}, \quad x_0 \in E$$

est l'application

$$x : t \in \mathbb{R} \mapsto \exp((t - t_0)a)x_0$$

Preuve:

Cette application convient évidemment puisque

$$\frac{d}{dt}(\exp((t - t_0)a)x_0) = a \exp((t - t_0)a)x_0$$

et $x(t_0) = x_0$

Exemple

Soit A la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A .
2. En déduire la valeur de $\exp(tA)$.
3. Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x'_1(t) &= 2x_1(t) + x_3(t) \\ x'_2(t) &= x_1(t) - x_2(t) - x_3(t) \\ x'_3(t) &= -x_1(t) + 2x_2(t) + 2x_3(t) \end{cases}$$

1. Un calcul sans difficultés montre que $\chi_A(X) = (X - 1)^3$.
2. Posons $N = A - I_3$. Alors, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $N^3 = 0$, et donc N est nilpotent d'indice 3. Ceci facilite grandement le calcul de l'exponentielle de N . En effet, on a

$$\exp(tN) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n N^n}{n!} = I_3 + tN + \frac{t^2}{2} N^2.$$

D'autre part, puisque $tA = tI_3 + tN$ et que tI_3 et tN commutent, on a

$$\exp(tA) = \exp(tI_3) \exp(tN) = e^t \left(I_3 + tN + \frac{t^2}{2} N^2 \right).$$

On en déduit

$$\exp(tA) = e^t \begin{pmatrix} t+1 & t^2 & t^2+t \\ t & t^2-2t+1 & t^2-t \\ -t & -t^2+2t & -t^2+t+1 \end{pmatrix}.$$

3. Soit $X(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$. Alors $X(t) = \exp(tA)X(0)$. En notant $X(0) = (a, b, c)$, on trouve

$$\begin{cases} x_1(t) &= a(t+1)e^t + bt^2e^t + c(t^2+t)e^t \\ x_2(t) &= ate^t + b(t^2-2t+1)e^t + c(t^2-t)e^t \\ x_3(t) &= -ate^t + b(-t^2+2t)e^t + c(-t^2+t+1)e^t. \end{cases}$$

Propriété 12: Expression intégrale de la solution

Soit $a \in \mathcal{L}(E)$ et $b : I \rightarrow E$ continue.

1. Les solutions de $(L) : x' = ax + b$ sont exactement les applications

$$t \in I \mapsto \exp(ta).x_0 + \int_{t_0}^t \exp((t-s)a)b(s)ds \text{ où } x_0 \text{ un vecteur de } E$$

2. Pour tout $(t_0, x_0) \in I \times E$, l'unique solution au problème de Cauchy en ce point est

$$t \mapsto \exp((t-t_0)a).x_0 + \int_{t_0}^t \exp((t-s)a)b(s)ds$$

Preuve:

2. Soit x la solution au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x' = ax + b \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \quad t_0 \in I, \quad x_0 \in E$$

Soit $t \in I$, par composition par $\exp(-sa)$, alors

$$\exp(-sa)x'(s) - a \exp(-sa).x(s) = \exp(-sa).b(s)$$

Mais $(\exp(-sa)x(s))' = \exp(-sa)x'(s) - a \exp(-sa).x(s)$, donc

$$(\exp(-sa)x(s))' = \exp(-sa).b(s).$$

Par intégration entre t_0 et t , on obtient

$$\exp(-ta)x(t) - \exp(-t_0a)x(t_0) = \int_{t_0}^t \exp(-sa)b(s)ds,$$

soit

$$\exp(-ta)x(t) = \exp(-t_0a)x(t_0) + \int_{t_0}^t \exp(-sa)b(s)ds.$$

On compose après par $\exp(ta)$ et on remplace $x(t_0)$ par x_0 , alors

$$\begin{aligned} x(t) &= \exp((t-t_0)a)x_0 + \exp(ta) \left(\int_{t_0}^t \exp(-sa)b(s)ds \right) \\ &= \exp((t-t_0)a)x_0 + \int_{t_0}^t \exp((t-s)a)b(s)ds \end{aligned}$$

Remarque :

Il est conseillé d'avoir une méthode d'obtention de la solution au problème de Cauchy, car il est difficile de se rappeler de la formule d'une telle solution

III.2 Utilisation de valeurs propres

On résout ici

$$X' = A \cdot X + B \text{ où } A \in M_n(\mathbb{K}), B \in \mathcal{C}(I, M_{n,1}(\mathbb{K}))$$

L'étude théorique nous invite à calculer l'exponentielle de la matrice tA pour tout $t \in \mathbb{R}$, mais on préfère utiliser des méthodes pratiques et rapides

Propriété 13: Cas où A est diagonalisable

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ diagonalisable et on considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle homogène

$$(H): \quad X' = AX$$

Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une base de vecteurs propres de A associés aux valeurs propres $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. On pose

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \varphi_k : t \mapsto e^{\lambda_k t} u_k$$

Le système d'applications $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ forme un système fondamental de solutions de (H) . Ainsi

$$S_H = \left\{ t \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{k=1}^n \alpha_k e^{\lambda_k t} u_k \quad \text{où} \quad \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} \right\}$$

Preuve:

Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $t \in \mathbb{R}$, $\varphi'_k(t) = \lambda_k e^{\lambda_k t} u_k = A \varphi_k(t)$ car u_k est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_k . On considère la base $\mathcal{C} = (u_1, \dots, u_n)$ de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ et le Wronskien $w(t) = \det_{\mathcal{B}}(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$.

On a

$$w(0) = \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) \neq 0$$

donc le système d'applications $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est un système fondamental de solutions de (H) .

Exemple

Résoudre l'équation $X' = AX$, avec $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ d'inconnue $X : \mathbb{R} \rightarrow M_{2,1}(\mathbb{R})$ dérivable

$\chi_A = X^2 - 3X + 2 = (X - 1)(X - 2)$, $E_1(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $E_2(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc

$$X(t) = \lambda_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{où } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Donc $X_1 : t \mapsto e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_2 : t \mapsto e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment un système fondamental de solution de H

Exemple: MINES MP

Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x \\ z' = x + y + z \end{cases}$$

C'est un système différentiel linéaire d'ordre 1 homogène d'équation matricielle $X' = AX$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Par les opérations $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$, $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ et $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$, on obtient

$$\det(XI_3 - A) = \begin{vmatrix} X-2 & 0 & 0 \\ -1 & X+1 & 1 \\ -1 & 0 & X \end{vmatrix} = X(X+1)(X-2)$$

Donc A est diagonalisable, avec

$$E_{-1}(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, E_2(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } E_0(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

donc

$$X' = AX \iff \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, X(t) = \alpha \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \\ 3e^{2t} \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ainsi les solutions de notre système sont

$$\begin{cases} x(t) &= -\alpha e^{-t} + 2\beta e^{2t} \\ y(t) &= \alpha e^{-t} + \beta e^{2t} + \gamma, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}. \\ z(t) &= 3\beta e^{2t} - \gamma \end{cases}$$

Exemple: R

soudre les systèmes différentiels suivants :

$$1. \begin{cases} x' &= x + 2y - z \\ y' &= 2x + 4y - 2z \\ z' &= -x - 2y + z \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x' &= y + z \\ y' &= -x + 2y + z \\ z' &= x + z \end{cases}$$

1. Introduisons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

de sorte que le système s'écrit $X' = AX$ avec $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique de A est

$X^2(X - 6)$. 0 est valeur propre double, mais A est de rang 1 et donc $\text{Ker}(A)$ est de dimension 2. Une base de $\text{Ker}(A)$ est donnée par les vecteurs $u_1 = (1, 0, 1)$ et $u_2 = (2, -1, 0)$. D'autre part, une base de $\text{Ker}(A - 6I)$ est donné par $u_3 = (1, 2, -1)$. Les solutions sont donc données par les triplets s'écrivant

$$X(t) = \lambda u_1 + \mu u_2 + \gamma e^{6t} u_3.$$

2. Introduisons cette fois la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

de sorte que le système s'écrit $X' = AX$ avec $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique est $X(X -$

$1)(X - 2)$, de sorte que ses valeurs propres sont 0, 1, 2, de vecteurs propres respectifs associés $u_0 = (1, 1, -1)$, $u_1 = (0, -1, 1)$, et $u_2 = (1, 1, 1)$. Ainsi, les solutions sont données par les triplets

$$X(t) = \lambda u_0 + \mu e^t u_1 + \gamma e^{2t} u_2.$$

III.3 Utilisation de changement de bases

Propriété 14

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $T = P^{-1}AP$. Alors

$$X \text{ est solution de } X' = AX + B \iff (Y = P^{-1}X \text{ solution de } Y' = TY + P^{-1}B)$$

Preuve:

$\Rightarrow$) Supposons que X solution de $X' = AX + B$, alors $Y = P^{-1}X$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$Y' = P^{-1}X' = P^{-1}AX + P^{-1}B = TP^{-1}X + P^{-1}B = TY + P^{-1}B$$

$\Leftarrow$) Supposons que Y solution de $Y' = TY + P^{-1}B$, alors $X = PY$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$X' = PY' = PTY + B = PTP^{-1}X + B = AX + B$$

Remarque :

Ce résultat permet la résolution d'un système au cas où A est trigonalisable

Méthode: A est trigonalisable

i le polynôme caractéristique de la matrice A est scindé (ce qui est le cas en considérant A dans $M_n(\mathbb{K})$), il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP = T$ où T matrice triangulaire supérieure. On effectue alors le changement de fonction inconnue définie par :

$$Z = P^{-1}X \iff X = PZ$$

qui aboutit aux nouvelles équations différentielles matricielles :

$$(L_2) : Z' = TZ + P^{-1}B$$

$$(H_2) : Z' = TZ$$

Si on pose $T = (t_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, alors l'équation (L_2) équivaut au système

$$\begin{cases} z_1' &= t_{11}z_1 + \dots + t_{1,n}z_n + c_1 \\ &\vdots \\ z_{n-1}' &= t_{n-1,n-1}z_{n-1} + t_{n-1,n}z_n + c_{n-1} \\ z_n' &= t_{nn}z_n + c_n \end{cases}$$

La dernière ligne de ce système est une équation différentielle linéaire du premier ordre

$$z_n' = \lambda_n z_n + c_n(t)$$

Une fois fixée une solution de cette équation, la ligne précédente devient une équation différentielle de fonction inconnue z_{n-1} . De proche en proche, chaque ligne apparaît comme une équation différentielle du premier ordre (une seule fonction inconnue pour chacune). On obtient ainsi la solution générale du système (L_2) (éventuellement l'unique solution au problème de Cauchy en un point arbitraire $(t_0, z_0) \in I \times M_{n,1}(\mathbb{K})$).

Remarque :

Dans le cas d'une équation homogène, il est inutile de calculer P^{-1}

Exemple

Résoudre l'équation différentielle $X' = AX$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et déduire $\exp(tA)$

► **Le polynôme caractéristique :** Par les opérations $C_2 \leftarrow C_2 + C_3$, et $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, on trouve

$$\chi_A(X) = (X-1)(X-2)^2$$

La matrice $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est du rang 2, donc A n'est pas diagonalisable mais elle est trigonalisable.

► **Les sous-espaces propres :** $E_1(A) = \text{Vect}(u_1)$ et $E_2 = \text{Vect}(u_2)$ avec $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

► **Complétion en une base :** Posons $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, alors la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ et

$$Au_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -u_2 + 2u_3$$

► Posons $P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, alors $P^{-1}AP = T$

► **Changement d'inconnue** Soit $Y = P^{-1}X$, alors $X' = AX$ est équivalente à $Y' = TY$. Posons $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, alors

$$Y' = TY \iff \begin{cases} y_1' = y_1 \\ y_2' = 2y_2 - y_3 \\ y_3' = 2y_3 \end{cases}$$

La troisième équation donne $y_3(t) = \gamma e^{2t}$. On la remplace dans la seconde, on obtient $y_2' = 2y_2 - \gamma e^{2t}$ qui est une équation linéaire scalaire d'ordre 1 avec reste polynôme exponentiel, on trouve $y_2(t) = \beta e^{2t} - \gamma t e^{2t}$. Finalement la première équation donne $y_1(t) = \alpha e^t$. Soit $Y(t) = \begin{pmatrix} \alpha e^t \\ \beta e^{2t} - \gamma t e^{2t} \\ \gamma e^{2t} \end{pmatrix}$, puis de $X = PY$, on obtient alors

$$X(t) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha e^t \\ \beta e^{2t} - \gamma t e^{2t} \\ \gamma e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha e^t + 2\beta e^{2t} - 2\gamma t e^{2t} + \gamma e^{2t} \\ \beta e^{2t} - \gamma t e^{2t} \\ \alpha e^t + \beta e^{2t} - \gamma t e^{2t} \end{pmatrix} \text{ où } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

► **Calcul de $\exp(tA)$:** D'une part, on a

$$X(t) = \begin{pmatrix} 2e^t & 2e^{2t} & (1-2t)e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & -te^{2t} \\ e^t & e^{2t} & -te^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

D'autre part $X(t) = \exp(tA)X(0) = \exp(tA)P^t(\alpha, \beta, \gamma)$, où α, β et γ sont quelconques, donc

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} 2e^t & 2e^{2t} & (1-2t)e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & -te^{2t} \\ e^t & e^{2t} & -te^{2t} \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$$

Par la méthode de Gauss, on trouve $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et, par suite,

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} (1-2t)e^{2t} & 2e^{2t} - 2e^t & 2e^t + (4t-2)e^{2t} \\ -te^{2t} & e^{2t} & 2te^{2t} \\ -te^{2t} & e^{2t} - e^t & e^t + 2te^{2t} \end{pmatrix}$$

Remarque :

On peut utiliser le changement d'inconnue lorsque A n'est pas constante

Exemple: Coefficients on constants

Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x_1' &= (2-t)x_1 + (t-1)x_2 \\ x_2' &= 2(1-t)x_1 + (2t-1)x_2. \end{cases}$$

Posons

$$A(t) = \begin{pmatrix} 2-t & t-1 \\ 2(1-t) & 2t-1 \end{pmatrix} \text{ et } X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

On doit résoudre le système $X'(t) = A(t)X(t)$. On va procéder comme pour une matrice à coefficients constants, en diagonalisant pour chaque t la matrice $A(t)$. Son polynôme caractéristique est $\chi_{A(t)}(X) = X^2 - (t+1)X + t$, dont les racines sont t et 1 . Le miracle est que les vecteurs propres ne dépendent pas de t . En effet, si on pose $u_1 = (1, 1)$ et $u_2 = (1, 2)$, alors $A(t)u_1 = u_1$ tandis que $A(t)u_2 = tu_2$. Autrement dit, en posant

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } D(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix},$$

on a $A(t) = P(t)DP(t)^{-1}$. On peut donc résoudre le système exactement comme s'il était à coefficients constants. Plus précisément, en posant $Y(t) = P^{-1}X(t)$, alors Y est solution de $Y'(t) = D(t)Y(t)$, soit

$$\begin{cases} y_1' &= y_1 \\ y_2' &= ty_2. \end{cases}$$

Il vient $y_1(t) = Ce^t$, et $y_2(t) = De^{t^2/2}$, avec $C, D \in \mathbb{R}$. On revient à X par la relation $Y = PX$, et on trouve que les solutions de l'équation sont les fonctions

$$\begin{cases} x_1(t) &= Ce^t + De^{t^2/2} \\ x_2(t) &= Ce^t + 2De^{t^2/2}, \end{cases}$$

Remarque :

Si A n'est pas trigonalisable, dans ce cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors on résout le système différentiel avec le corps de base $\mathbb{C}$ puis on cherche les solutions réelles

Exemple

Résolution du système d'équations différentielles $\mathcal{H} : \begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y \end{cases}$.

Système différentiel de taille 2 linéaire homogène à coefficients constants.

On a $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ donc $\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 \\ -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 + 1 = (\lambda-i\sqrt{3})(\lambda+i\sqrt{3})$ d'où A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

► **Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:** On a $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{1+i, 1-i\}$, $E_A(1+i) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}\right)$ et $E_A(1-i) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}\right)$. Donc $X_1 : t \mapsto$

$e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ et $X_2 = \overline{X_1} : t \mapsto e^{(1-i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ forment un système fondamental de solutions

► **Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:** $X_1 : t \mapsto e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ est une solution complexe de l'équation $X' = AX$, or la matrice A est réelle donc

$$\varphi_1 t \mapsto \text{Re}(X_1(t)) = e^t \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \varphi_2 t \mapsto \text{Im}(X_1(t)) = e^t \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix}$$

sont des solutions réelles de l'équation $X' = AX$. Celles-ci sont clairement indépendantes et donc forment un système fondamental de solutions.

Solution générale

$$X : t \mapsto \alpha e^t \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + \beta e^t \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Exemple

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $X' = AX$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- **Le polynôme caractéristique :** Par les opérations $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$, $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, on trouve

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-2 & -1 & 0 \\ 0 & X-1 & -1 \\ 0 & 1 & X-1 \end{vmatrix} = (X-2)((X-1)^2 + 1)$$

n'est pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$, donc A n'est pas trigonalisable

- **Cherchons les solutions complexes :** On a $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{2, 1+i, 1-i\}$ et $E_2(A) = \text{Vect}(u_1)$, $E_{(1+i)} = \text{Vect}(u_2)$ et $E_{(1-i)} = \text{Vect}(u_3)$ avec $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -i \end{pmatrix}$ et $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ i \end{pmatrix}$. A est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$, donc

$$X' = AX \iff \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}, \quad X(t) = \alpha e^{2t} u_1 + \beta e^{(1+i)t} u_2 + \gamma e^{(1-i)t} u_3$$

Notons $v_1 : t \mapsto e^{2t} u_1$, $v_2 : t \mapsto e^{(1+i)t} u_2$ et $v_3 = \bar{v}_2 : t \mapsto e^{(1-i)t} u_3$, alors (v_1, v_2, v_3) est une base de $S_{\mathbb{C}}$. Une autre base de $S_{\mathbb{C}}$ est $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$:

$$\omega_1 = u_1, \omega_2 = \Re e(u_2) : t \mapsto e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ \sin t \end{pmatrix} \text{ et } \omega_3 = \Im m(u_2) : t \mapsto \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

- **Cherchons les solutions réelles :** $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ est une base du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $S_{\mathbb{R}}$. La solution générale de l'équation est donc :

$$X : t \mapsto \alpha e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ \sin t \end{pmatrix} + \gamma e^t \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

Exemple: D

trouver les solutions réelles du système différentiel $X' = AX$ lorsque

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice sont 1, i et $-i$. Un vecteur propre associé à 1 est $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$. Un vecteur

propre associé à i est $V_i = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Bien entendu, la matrice étant réelle, un vecteur propre associé à $-i$

est $\bar{V}_i$. Pour obtenir des solutions réelles, on peut considérer (toujours parce que la matrice A est réelle) $\Re e(e^{it} V_i)$ et $\Im m(e^{it} V_i)$. On trouve alors les solutions (indépendantes)

$$\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 2\cos t \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 2\sin t \end{pmatrix}.$$

La solution générale du système dans $\mathbb{R}$ est donc

$$\begin{pmatrix} \lambda e^t - \mu \sin t + \nu \cos t \\ -3\lambda e^t + \mu \cos t + \nu \sin t \\ -4\lambda e^t + 2\mu \cos t + 2\nu \sin t \end{pmatrix}.$$

IV Équations linéaires (scalaires) d'ordre n

IV.1 Equations scalaires d'ordre n

Définition 6

► On appelle *équation différentielle scalaire linéaire d'ordre n définie sur I* toute équation de la forme

$$(L_n) : x^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{(k)} = b$$

avec $a_0, \dots, a_{n-1} : I \rightarrow \mathbb{K}$ et $b : I \rightarrow \mathbb{K}$ continues, et d'inconnue $x : I \rightarrow \mathbb{K}$ fonction n -fois dérivable.

► L'équation homogène associée est

$$(H_n) : x^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{(k)} = 0$$

► On appelle *solution de (L_n)* toute application n -fois dérivable $x : I \rightarrow \mathbb{K}$ telle que

$$\forall t \in I, \quad x^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) x^{(k)}(t) = b(t)$$

Notation :

On note S_{L_n} et S_{H_n} l'ensemble des solutions sur I de (L_n) et (H_n) respectivement

Propriété 15

1. Les solutions d'une telle équation sont de classe $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$.
2. S_{H_n} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$

IV.2 Système différentiel d'ordre un associé

Soit $a_0, \dots, a_{n-1} : I \rightarrow \mathbb{K}$ et $b : I \rightarrow \mathbb{K}$ continues. On considère les deux applications

$$A : \begin{cases} I \rightarrow M_n(\mathbb{K}) \\ t \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0(t) & \cdots & \cdots & \cdots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{et } B : \begin{cases} I \rightarrow M_{n,1}(\mathbb{K}) \\ t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix} \end{cases}$$

et les deux équations

$$(L) : X' = AX + B \quad \text{et} \quad (H) : X' = AX$$

d'inconnue $X : I \rightarrow M_{n,1}(\mathbb{K})$ de classe $\mathcal{C}^1$

Théorème 5

L'application

$$\theta : \begin{cases} S_{H_n} \rightarrow S_H \\ x \mapsto \begin{pmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix} \end{cases}$$

est un isomorphisme d'espace vectoriel

Preuve:► **θ est bien définie ?**

Soit $x \in S_{H_n}$, alors x est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$, donc $X = \theta(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I à valeurs dans $M_{n,1}(\mathbb{K})$. Soit $t \in I$, on a

$$\begin{aligned} X' &= \begin{pmatrix} x' \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \\ x^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \\ -\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{(k)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdots & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix} \\ &= AX \end{aligned}$$

► **θ est linéaire ?** Évident.► **θ est injective ?** Si $x \in \text{Ker} \theta$, alors $x = 0$, ainsi l'injectivité de θ .► **θ est surjective ?**

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ une solution de H , alors elle est de classe $\mathcal{C}^1$, donc ses fonctions coordonnées $x_i : I \rightarrow \mathbb{K}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$. L'équation $X' = AX$ équivaut au système

$$\begin{cases} \forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, & x_{i+1} = x'_i \\ x'_n = -\sum_{i=1}^n a_{i-1} x_i \end{cases}$$

Les $n-1$ premières équations montrent que x_1 est de classe $\mathcal{C}^n$ et $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_i = x_1^{(i-1)}$ et la dernière équation dévient

$$x_1^{(n)} = -\sum_{i=1}^n a_{i-1} x_1^{(i-1)} = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i x_1^{(i)}$$

Ainsi $x_1 \in S_{H_n}$ et $X = \theta(x_1)$

Théorème 6

$$\text{L'application } \theta : \begin{cases} S_{L_n} \longrightarrow S_L \\ x \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix} \end{cases} \text{ est une bijection}$$

Propriété 16: Structure des solutions de S_{L_n} et de S_{H_n}

1. L'ensemble S_{H_n} des solutions de (H_n) est un sous-espace vectoriel de dimension n du $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$
2. L'ensemble S_{L_n} des solutions de (L_n) est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ de direction S_{H_n} .

Preuve:

Conséquence du théorème précédent

Théorème 7: Cauchy-Lipschitz

Soit $a_0, \dots, a_{n-1} : I \rightarrow \mathbb{K}$ et $b : I \rightarrow \mathbb{K}$ continues. Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{(k)} = b \\ \forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, & x^{(i)}(t_0) = x_i \end{cases} \quad \text{où } t_0 \in I, x_0, x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{K}$$

d'inconnue $x \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$, admet une et une seule solution.

Preuve:

Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire assure l'existence d'une solution X de $(L) : X \in \mathcal{C}^1(I, M_{n,1}(\mathbb{K}))$ vérifiant $X(t_0) =$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Par la bijection réciproque de θ , on obtient une solution x de $(L_n) : x \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ vérifiant $\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad x^{(i)}(t_0) = x_i$

Exemple

Démontrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(t) = e^{-1/t^2}$ et prolongée par $f(0) = 0$ est de classe C^∞ , mais n'est solution d'aucune équation différentielle linéaire homogène.

Il est clair que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$. On montre aisément par récurrence sur n que ses dérivées sont de la forme

$$t \mapsto P_n(t)e^{-1/t^2},$$

où les P_n sont des polynômes. Ainsi, pour chaque entier n , $f^{(n)}$ admet une limite en 0 égale à 0. Par le théorème de prolongement d'une dérivée, f est de classe C^∞ , avec $f^{(n)}(0) = 0$. Si f était solution d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre n ,

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0y(t) = 0,$$

elle vérifierait aussi la condition initiale $y(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0$. Or, d'après le théorème de Cauchy linéaire, cette équation n'admet qu'une seule solution pour ce problème de Cauchy. Comme 0 est solution et que f n'est pas identiquement nulle, on obtient une contradiction.

Corollaire 1 (Cas $n = 2$)

Soit $a, b, c \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'' + a \cdot x' + b \cdot x = c \\ x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x_1 \end{cases} \quad \text{où } t_0 \in I, x_0, x_1 \in \mathbb{K}$$

d'inconnue $x \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$ admet une et une seule solution.

Exemple

Résoudre sur $I =]0, +\infty[$ l'équation $t^2x'' + x = 0$
(On pourra chercher du type t^α)

On trouve $\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$, donc $\alpha = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

$$S_{H_{\mathbb{C}}} = \left\{ t \mapsto \alpha_1 e^{r_1 \ln t} + \alpha_2 e^{r_2 \ln t} \mid \alpha_i \in \mathbb{C} \right\}$$

Puis $\mathbf{Vect}(h_1, h_2) = \mathbf{Vect}(\Re(h_1), \Im(h_1))$, donc

$$S_{H_{\mathbb{R}}} = \left\{ t \mapsto e^{\frac{1}{2}t} \left(\alpha_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \ln t + \alpha_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \ln t \right) \mid \alpha_i \in \mathbb{C} \right\}$$

Définition 7: Wronskien

Soient $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une famille de fonctions de $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$. On appelle matrice Wronskienne de la famille l'application $W_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n)} : I \longrightarrow M_n(\mathbb{K})$,

$$t \longmapsto \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \cdots & \cdots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \cdots & \cdots & \varphi_n'(t) \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \cdots & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

On appelle Wronskien de la famille l'application $w_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n)} : I \longrightarrow \mathbb{K}$,

$$t \longmapsto \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \cdots & \cdots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \cdots & \cdots & \varphi_n'(t) \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \cdots & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

Remarque :

Soit h_1, h_2 deux fonctions de $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$, alors la matrice Wronskienne

$$W_{h_1, h_2} : \begin{cases} I & \longrightarrow M_2(\mathbb{K}) \\ t & \longmapsto \begin{pmatrix} h_1(t) & h_2(t) \\ h_1'(t) & h_2'(t) \end{pmatrix} \end{cases}$$

et le Wronskien

$$w_{h_1, h_2} : \begin{cases} I & \longrightarrow M_2(\mathbb{K}) \\ t & \longmapsto \begin{vmatrix} h_1(t) & h_2(t) \\ h_1'(t) & h_2'(t) \end{vmatrix} \end{cases}$$

Propriété 17: Base de S_{H_n}

Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une famille de S_{H_n} espace solution de (H_n) .

Alors les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de S_{H_n} ;
2. $\exists t_0 \in I$ tel que $w_{\varphi_1, \dots, \varphi_n}(t_0) \neq 0$;
3. $\forall t \in I, \quad w_{\varphi_1, \dots, \varphi_n}(t) \neq 0$.

Preuve:

Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $\psi_i = \begin{pmatrix} \varphi_i \\ \varphi_i' \\ \vdots \\ \varphi_i^{(n-1)} \end{pmatrix}$. Par l'isomorphisme θ la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de S_{H_n} si, et seulement si, la famille $(\psi_1, \dots, \psi_n)$ est une base de S_H

Théorème 8: Variation des constantes

Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une base de solutions de (H_n) , $x \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ telles que $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i$.

Alors

$$x \text{ est solution de } (L_n) \Leftrightarrow W_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n)} \lambda' = B, \quad \text{avec } \lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Ou encore

$$x \text{ est solution de } (L_n) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket, & \sum_{i=1}^n \lambda_i' \varphi_i^{(k)} = 0 \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i' \varphi_i^{(n-1)} = b \end{cases}$$

Preuve:

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i \text{ est solution de } (L_n) \text{ si, et seulement si, } X = \sum_{i=1}^n \lambda_i \psi_i \text{ solution de } (L) \text{ si, et seulement si, } \sum_{i=1}^n \lambda_i' \psi_i = B$$

Corollaire 2 (Cas $n = 2$)

Soit $a, b, c \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ et (h_1, h_2) une base de solutions de l'équation

$$(H_2): \quad x'' + ax' + bx = 0$$

Pour tout couple (λ_1, λ_2) d'applications de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$

$$x = \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 \text{ est solution de } x'' + ax' + bx = c \iff \begin{cases} \lambda_1' h_1 + \lambda_2' h_2 = 0 \\ \lambda_1' h_1' + \lambda_2' h_2' = c \end{cases}$$

Exemple

Réolvons l'équation

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{1+t^2}$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 à coefficients constants, d'équation caractéristique $r^2 - 2r + 1 = 0$ de racine double 1.

- **Solution de l'équation homogène :** est de la forme $x_0 : t \mapsto (\lambda t + \beta) e^t$, où $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$
- **Solution de l'équation complète :** Les deux fonctions $\varphi_1 : t \mapsto e^t$ et $\varphi_2 : t \mapsto t e^t$ forment un système fondamental de solution de l'équation homogène. Par la variation des constantes, soit $y = \lambda \varphi_1 + \beta \varphi_2$, avec $\lambda, \beta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, alors y est solution de l'équation complète si, et seulement si,

$$\begin{cases} \lambda' \varphi_1 + \beta \varphi_2 = 0 \\ \lambda' \varphi_1' + \beta \varphi_2' = \frac{e^t}{1+t^2} \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda' e^t + \beta t e^t = 0 \\ \lambda' e^t + \beta(t+1)e^t = \frac{e^t}{1+t^2} \end{cases}$$

Par la méthode de Cramer, on trouve

$$\begin{cases} \lambda'(t) = -\frac{t}{1+t^2} \\ \beta'(t) = \frac{1}{1+t^2} \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda(t) = -\frac{1}{2} \ln(1+t^2) + a \\ \beta(t) = \arctan(t) + b \end{cases}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Donc la solution de l'équation complète est

$$y : t \mapsto \left(t \arctan(t) - \frac{1}{2} \ln(1+t^2) + a + b t \right) e^t, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Exemple

Réolvons sur $]0, \pi[$ l'équation $y'' + y = \frac{1}{\sin^3 x}$.

$(\cos, \sin)$ est un système fondamental de solutions de l'équation homogène, dont le Wronskien

$$\omega(x) = \begin{vmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{vmatrix} = 1$$

Soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{C}^1(]0, \pi[, \mathbb{R})$ et soit $y = \lambda_1 \cos x + \lambda_2 \sin x$, alors

$$\begin{aligned} y'' + y &= \frac{1}{\sin^3 x} \iff \begin{cases} \lambda_1' \sin x + \lambda_2' \cos x = 0 \\ \lambda_1' \cos x - \lambda_2' \sin x = \frac{1}{\sin^3 x} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda_1' = \begin{vmatrix} 0 & \cos x \\ \frac{1}{\sin^3 x} & -\sin x \end{vmatrix} = \frac{\cos x}{\sin^3 x} \\ \lambda_2' = \begin{vmatrix} \sin x & 0 \\ \cos x & \frac{1}{\sin^3 x} \end{vmatrix} = \frac{-1}{\sin^2 x} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda_1(x) = \frac{-1}{2\sin^2 x} + \alpha \\ \lambda_2(x) = \frac{\cos x}{\sin x} + \beta \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation complète sont de la forme

$$y : x \longmapsto \alpha \cos x + \beta \sin x + \cos x - \frac{\cos x}{2\sin^2 x}, \quad \text{avec } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

IV.4 Méthode de Lagrange ou méthode d'abaissement du degré

Cette méthode ne présente réellement d'intérêt que pour une équation linéaire d'ordre 2.

$$x'' + ax' + bx = c$$

Si φ une solution de $x'' + ax' + bx = 0$ ne s'annulant pas sur I , on pose $z = \frac{x}{\varphi}$ autrement-dit $x = z\varphi$. On a alors

$$\begin{aligned} x' &= z'\varphi + z\varphi' \\ x'' &= z''\varphi + 2z'\varphi' + z\varphi'' \end{aligned}$$

si bien que

$$\begin{aligned} x'' + ax' + bx &= z''\varphi + (2\varphi' - \varphi)z' + \underbrace{(\varphi'' + a\varphi' + b\varphi)}_{=0}z \\ &= z''\varphi + (2\varphi' + a\varphi)z' \end{aligned}$$

x est solution de (L) si, et seulement, si $y = z'$ est solution sur I de :

$$y' + \left(a + 2\frac{\varphi'}{\varphi}\right)y = \frac{c}{\varphi}$$

Exemple

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(t^2 + 1)y'' - 2y = t$$

en commençant par rechercher les polynômes solutions.

L'équation $(t^2 + 1)y'' - 2y = 0$ admet $y_1 = t^2 + 1$ est une solution polynomiale de (H) sur $\mathbb{R}$.

Méthode de Lagrange : Cherchons une solution $y_2(t) = \lambda(t)y_1(t)$.

On obtient

$$\lambda''(t) + \frac{4t}{t^2 + 1} = 0$$

qui donne $\lambda'(t) = \frac{c}{(t^2 + 1)^2}$. Or

$$\int \frac{1}{(t^2 + 1)^2} dt = \frac{1}{2} \arctan t + \frac{1}{2} \frac{t}{t^2 + 1} + cte$$

et $\lambda(t) = \arctan t + \frac{t}{t^2 + 1}$ convient ce qui donne

$$y_2(t) = (t^2 + 1) \arctan t + t$$

Ainsi

$$S_H = \{t \mapsto \lambda(t^2 + 1) + \mu((t^2 + 1)\arctan t + t) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

On voit $y_0 : t \mapsto -\frac{t}{2}$ est une solution particulière, donc

$$S_L = \{t \mapsto \lambda(t^2 + 1) + \mu((t^2 + 1)\arctan t + t) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

IV.5 Équations différentielles linéaires constantes

On étudie l'ensemble S des solutions à valeurs complexes de l'équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants

$$x^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{(k)} = 0$$

avec $a_i \in \mathbb{K}$ d'inconnue $x \in \mathcal{D}^{(n)}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$.

Soit $\chi = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ et $\chi = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)^{m_k}$ sa décomposition primaire

Définition 8

Le polynôme $\chi(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ est appelé le polynôme caractéristique de l'équation homogène

$$x^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{(k)} = 0$$

Remarque :

$t \mapsto e^{\lambda t}$ est solution de $x^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{(k)} = 0$ si et seulement si $\chi(\lambda) = 0$.

Propriété 18

On suppose que le polynôme caractéristique χ est scindé sur $\mathbb{K}$. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ ses racines distinctes de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_r$. Alors l'ensemble des solutions de l'équation homogène

$$S = \left\{ t \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{k=1}^r P_k(t) e^{\lambda_k t}, \text{ avec } \forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket, P_k \in \mathbb{K}_{m_k-1}[X] \right\}$$

Preuve:

Considérons l'espace $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ et l'endomorphisme de celui-ci $D : x \mapsto x'$. On a

$$S = \text{Ker}(\chi(D)) = \text{Ker} \left(\prod_{k=1}^r (D - \lambda_k \text{Id}_E)^{m_k} \right)$$

Par le lemme des noyaux

$$S = \bigoplus_{k=1}^r \text{Ker}((D - \lambda_k)^{m_k})$$

Reste à déterminer $\text{Ker}((D - \lambda)^m)$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}^*$.

Introduisons l'application $e_\lambda : t \mapsto e^{\lambda t}$ et pour $x \in E$, on pose $y = e_{-\lambda} x$. Par la formule de Liebniz

$$y^{(m)} = e_{-\lambda} (D - \lambda \text{Id}_E)^m(x)$$

Donc $x \in \text{Ker}((D - \lambda \text{Id})^m)$ si, et seulement si, $y^{(m)} = 0$. Or la solution générale de l'équation $y^{(m)} = 0$ est

$$y = \sum_{i=0}^{m-1} c_i t^i$$

avec $c_0, \dots, c_{m-1} \in \mathbb{K}$. Ainsi

$$\text{Ker}((D - \lambda \text{Id})^m) = \left\{ t \mapsto e^{\lambda t} \sum_{i=0}^{m-1} c_i t^i \text{ avec } c_0, \dots, c_{m-1} \in \mathbb{K} \right\}$$

Exemple

Résolvons l'équation

$$x''' - 3x'' + 4x = 0$$

- L'équation caractéristique est $X^3 - 3X^2 + 4 = 0$, ce qui s'écrit aussi $(X - 2)^2(X + 1) = 0$. Les racines sont $\lambda_1 = 2$ (de multiplicité $m_1 = 2$) et $\lambda_2 = -1$ (de multiplicité $m_2 = 1$).
- La racine $\lambda_1 = 2$ conduit aux solutions $(a + bt)e^{2t}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$
- La racine $\lambda_2 = -1$ conduit aux solutions ce^{-t} avec $c \in \mathbb{R}$

L'ensemble des solutions est donc

$$\{t \mapsto (a + bt)e^{2t} + ce^{-t} \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

Remarque :

Quand les coefficients $a_0, \dots, a_{n-1}$ sont réels, on s'intéresse en général qu'aux solutions à valeurs dans réelles de l'équation.

- Si λ est racine réelle de χ , cela donne des solutions réelles de la forme $t \mapsto e^{\lambda t} \sum_{i=0}^{m-1} c_i t^i$ avec $c_0, \dots, c_{m-1} \in \mathbb{R}$
- Si par contre $\lambda = \mu + i\omega$, où μ et ω sont réels avec ω non nul, alors son conjugué $\bar{\lambda} = \mu - i\omega$ est racine de χ de même ordre, on obtient les solutions de la forme

$$t \mapsto e^{\mu t} \cos(\omega t) \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i t^i + e^{\mu t} \sin(\omega t) \sum_{i=0}^{m-1} \beta_i t^i$$

avec $\alpha_0, \dots, \alpha_{m-1}, \beta_0, \dots, \beta_{m-1} \in \mathbb{R}$ **Exemple**

Cherchons les solutions réelles de l'équation

$$x''' - 2x'' - 2x' - 3x = 0$$

- L'équation caractéristique est $X^3 - 2X^2 - 2X - 3 = 0$, ce qui s'écrit aussi $(X - 3)(X^2 + X + 1) = 0$. Une valeur propre est donc $\lambda_1 = 3$.
- Les solutions de $X^2 + X + 1 = 0$ sont $\lambda_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ et $\lambda_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
- La valeur propre $\lambda_1 = 3$ conduit à la solution $t \mapsto e^{3t}$
- Les valeurs propres λ_2 et λ_3 conduisent aux solutions complexes $e^{\lambda_2 t}$ et $e^{\lambda_3 t}$. Comme on s'intéresse aux solutions réelles, alors on considère les deux fonctions définies par la partie réelle et la partie imaginaire de $e^{-\frac{1}{2}t} e^{\frac{\sqrt{3}}{2}it}$:

$$t \mapsto e^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \quad \text{et} \quad t \mapsto e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

- L'ensemble des solutions est donc

$$\left\{ t \mapsto ae^{3t} + e^{-\frac{1}{2}t} \left(b \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right) \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Corollaire 3Soit $a, b, c \in \mathbb{K}$ tel que $a \neq 0$ et soit

$$ax'' + bx' + cx = 0 \tag{H}$$

1. Si l'équation $ar^2 + br + c = 0$ possède des racines distinctes $r_1 \neq r_2$ et les solutions de (H) sont les

$$x(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$

2. Si l'équation $ar^2 + br + c = 0$ possède une racine double r_0 et les solutions de (H) sont les

$$x(t) = (\lambda t + \mu) e^{r_0 t} \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$

3. Si l'équation $ar^2 + br + c = 0$ ne possède pas de racines, alors $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et l'équation caractéristique admet deux racines complexes distinctes et conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$ et les solutions de (H) sont les

$$x(t) = e^{\alpha t} (\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)) \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Propriété 19

L'équation $x^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{(k)} = e^{\alpha t} P(t)$, où $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, admet une solution particulière de la forme $x_p : t \mapsto t^m Q(t) e^{\alpha t}$ où Q est une fonction polynomiale de même degré que P et m est l'ordre de multiplicité de α vu comme racine de χ

Preuve:

Soit $d = \deg P$, posons $a_n = 1$ et $e_\alpha : t \mapsto e^{\alpha t}$.

► Pour $Q \in \mathbb{K}_{d+m}[X]$, on a :

$$\begin{aligned} \chi(D)(Qe_\alpha) &= \sum_{k=0}^n a_k D^k (Qe_\alpha) = \sum_{k=0}^n a_k \sum_{i=0}^k C_k^i Q^{(i)} e_\alpha^{(k-i)} \\ &= \sum_{k=0}^n a_k \sum_{i=0}^k C_k^i Q^{(i)} \alpha^{(k-i)} e_\alpha = \sum_{i=0}^n \frac{Q^{(i)}}{i!} \sum_{k=i}^n a_k \frac{k!}{(k-i)!} \alpha^{(k-i)} e_\alpha \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{Q^{(i)} \chi^{(i)}(\alpha)}{i!} e_\alpha = \sum_{i=m}^n \frac{Q^{(i)} \chi^{(i)}(\alpha)}{i!} e_\alpha \end{aligned}$$

On pose

$$\theta(Q) = \sum_{p=m}^n \frac{1}{p!} \chi^{(p)}(\alpha) Q^{(p)}.$$

θ est une application linéaire de $\mathbb{K}_{d+m}[X]$ à valeurs dans $\mathbb{K}_d[X]$, sa matrice, dans les bases canoniques $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^{d+m})$ et $\mathcal{C} = (1, X, \dots, X^d)$,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\theta) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & \cdots & \cdots & 0 & * & ? & \cdots & ? \\ \vdots & & & \vdots & 0 & * & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & ? \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & * \end{array} \right)$$

est échelonnée dont les m premières colonnes sont nulles et de $d+1$ pivots.

$$\theta(Q) = \sum_{p=m}^n \frac{1}{p!} \chi^{(p)}(\alpha) Q^{(p)}$$

Donc $\text{rg}(\theta) = d+1 = \dim \mathbb{K}_d[X]$ et, par suite, elle est surjective.

► Pour $R \in \mathbb{K}_{d+m}[X]$, l'application $t \mapsto e^{\lambda t} R(t)$ est une solution particulière de l'équation (L) si, et seulement si,

$$e_\lambda \cdot \theta(R) = \chi(D)(e_\lambda R) = e_\lambda P \iff \theta(R) = P$$

Par la surjection de θ il existe un polynôme R de degré $d+m$ tel que

$$\theta(R) = \sum_{p=m}^n \frac{1}{p!} \chi^{(p)}(\alpha) R^{(p)} = P$$

Mais $\mathbb{K}_{m-1}[X] \subset \text{Ker}(\theta)$, alors on pose Q le quotient de la division euclidienne de R par X^m , on obtient $\theta(X^m Q) = \theta(R) = P$.

Remarque :

Cette méthode s'applique notamment pour $\alpha = 0$

Remarque :

Si $d(t) = e^{\omega_1 t} (M \cos \omega_2 t + N \sin \omega_2 t)$ où $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$ et $M, N \in \mathbb{R}_n[X]$.

On cherche une solution sous la forme

$$x_p = t^m e^{\omega_1 t} (A \cos \omega_2 t + B \sin \omega_2 t)$$

où $A, B \in \mathbb{R}_n[X]$ et m l'ordre de multiplicité de $\omega_1 + i\omega_2$ dans l'équation caractéristique

Exemple

Résoudre $y'' + y = x + \cos 3x$ sur $I = \mathbb{R}$.

- Equation homogène : L'équation caractéristique est $r^2 + 1 = 0$. La solution générale de (E.H.) est donc $y = A \cos x + B \sin x$.
- Solution particulière à $y'' + y = x$: $y = x$ convient.
- Solution particulière à $y'' + y = \cos 3x$: En remplaçant $y = A \cos 3x + B \sin 3x$ dans l'équation, on trouve $(A - 9A) \cos 3x + (B - 9B) \sin 3x = \cos 3x$, donc $A = -\frac{1}{8}$ et $B = 0$.
- Conclusion : la solution générale est $y = x - \frac{1}{8} \cos 3x + A \cos x + B \sin x$.

Exemple

Résoudre les équations différentielles :

$$(E_0) y'' - 5y' + 6y = 0 \quad (E_1) y'' - 5y' + 6y = 4xe^x \quad (E_2) y'' - 5y' + 6y = 4xe^{2x}$$

Trouver la solution de (E_1) vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

1. **Équation (E_0) .** L'équation caractéristique est $r^2 - 5r + 6 = (r - 2)(r - 3) = 0$, avec deux racines distinctes $r_1 = 2, r_2 = 3$. Donc l'ensemble des solutions de (E_0) est $\{\lambda e^{2x} + \mu e^{3x} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.
2. **Équation (E_1) .**
 - a) On cherche une solution particulière à (E_1) sous la forme $y_0(x) = (ax + b)e^x$. Lorsque l'on injecte y_0 dans l'équation (E_1) , on obtient :
$$\begin{aligned} & (ax + 2a + b)e^x - 5(ax + a + b)e^x + 6(ax + b)e^x = 4xe^x \\ \Leftrightarrow & (a - 5a + 6a)x + 2a + b - 5(a + b) + 6b = 4x \\ \Leftrightarrow & 2a = 4 \quad \text{et} \quad -3a + 2b = 0 \\ \Leftrightarrow & a = 2 \quad \text{et} \quad b = 3 \end{aligned}$$

Donc $y_0(x) = (2x + 3)e^x$.
 - b) L'ensemble des solutions de (E_1) est $\{(2x + 3)e^x + \lambda e^{2x} + \mu e^{3x} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.
 - c) On a $y(x) = (2x + 3)e^x + \lambda e^{2x} + \mu e^{3x}$. On cherche λ, μ tels que $y(0) = 1, y'(0) = 0$. C'est-à-dire que $3 + \lambda + \mu = 1, 5 + 2\lambda + 3\mu = 0$. Donc $\lambda = -1, \mu = -1$, c'est-à-dire que $y(x) = (2x + 3)e^x - e^{2x} - e^{3x}$.
3. **Équation (E_2) .** Comme 2 est une racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme $y_0(x) = x(ax + b)e^{2x}$. On obtient $y_0(x) = x(-2x - 4)e^{2x}$.

Exemple: Équation d'Euler

On considère l'équation :

$$y'' + 2y' + 4y = xe^x \quad (E)$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E) .
2. Trouver une solution particulière de (E) (expliquer votre démarche), puis donner l'ensemble de toutes les solutions de (E) .
3. Soit $f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur $]0, \infty[$ et qui vérifie :

$$t^2 f''(t) + 3t f'(t) + 4f(t) = t \log t.$$

- a) On pose $g(x) = f(e^x)$, vérifier que g est solution de (E) .
- b) En déduire une expression de f .

1. Le polynôme caractéristique associé à E est : $p(x) = x^2 + 2x + 4$; son discriminant est $\Delta = -12$ et il a pour racines les 2 nombres complexes $-1 + i\sqrt{3}$ et $-1 - i\sqrt{3}$. Les solutions de l'équation homogène sont

donc toutes fonctions :

$$y(x) = e^{-x}(a \cos \sqrt{3}x + b \sin \sqrt{3}x)$$

obtenues lorsque a, b décrivent $\mathbb{R}$.

2. Le second membre est de la forme $e^{\lambda x}Q(x)$ avec $\lambda = 1$ et $Q(x) = x$. On cherchera une solution de l'équation sous la forme : $y_p(x) = R(x)e^x$ avec R polynôme de degré égal à celui de Q puisque $p(1) \neq 0$. On pose donc $R(x) = ax + b$. On a

$$y_p''(x) + 2y_p'(x) + 4y_p(x) = (7ax + 7b + 4a)e^x.$$

Donc y_p est solution si et seulement si $7ax + 7a + 4b = x$. On trouve après identification des coefficients :

$$a = \frac{1}{7} \quad \text{et} \quad b = \frac{-4}{49}.$$

La fonction $y_p(x) = \frac{1}{7}(x - \frac{4}{7})e^x$ est donc solution de E et la forme générale des solutions de E est :

$$y(x) = e^{-x}(a \cos \sqrt{3}x + b \sin \sqrt{3}x) + \frac{1}{7}(x - \frac{4}{7})e^x; a, b \in \mathbb{R}.$$

3. a) On a : $g'(x) = e^x f'(e^x)$ et $g''(x) = e^x f'(e^x) + e^{2x} f''(e^x)$ d'où pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g''(x) + 2g'(x) + 4g(x) = e^{2x} f''(e^x) + 2e^x f'(e^x) + 4f(e^x) = e^x \log e^x = x e^x$$

donc g est solution de E .

- b) Réciproquement pour $f(t) = g(\log t)$ où g est une solution de E on montre que f est 2 fois dérivable et vérifie l'équation donnée en 4. Donc les fonctions f recherchées sont de la forme :

$$\frac{1}{t}(a \cos(\sqrt{3} \log t) + b \sin(\sqrt{3} \log t)) + \frac{t}{7}(\log t - \frac{4}{7}); a, b \in \mathbb{R}.$$

Exemple: R

soudre les équations différentielles suivantes à l'aide du changement de variable suggéré.

- $x^2 y'' + x y' + y = 0$, sur $]0; +\infty[$, en posant $x = e^t$;
- $(1 + x^2)^2 y'' + 2x(1 + x^2) y' + m y = 0$, sur $\mathbb{R}$, en posant $x = \tan t$ (en fonction de $m \in \mathbb{R}$).

1. Puisqu'on cherche y fonction de $x \in]0; +\infty[$, et que l'application $t \mapsto e^t$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]0; +\infty[$, on peut poser $x = e^t$ et $z(t) = y(e^t)$. On a alors $t = \ln x$ et $y(x) = z(\ln x)$. Ce qui donne :

$$\begin{aligned} y(x) &= z(\ln x) = z(t) \\ y'(x) &= \frac{1}{x} z'(\ln x) = e^{-t} z'(t) \\ y''(x) &= -\frac{1}{x^2} z'(\ln x) + \frac{1}{x^2} z''(\ln x) = -e^{-2t} z'(t) + e^{-2t} z''(t) \end{aligned}$$

En remplaçant, on obtient donc que

$$\forall x \in]0; +\infty[, x^2 y'' + x y' + y = 0 \iff \forall t \in \mathbb{R}, z''(t) + z(t) = 0$$

autrement dit, $z(t) = \lambda \cos t + \mu \sin t$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Finalement, les solutions de l'équation de départ sont de la forme

$$y(x) = z(\ln x) = \lambda \cos(\ln x) + \mu \sin(\ln x)$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

2. L'application $t \mapsto \tan t$ étant bijective de $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$, on peut poser $x = \tan t$ et $z(t) = y(\tan t)$. On a alors $t = \arctan x$ et ainsi :

$$\begin{aligned} y(x) &= z(\arctan x) = z(t) \\ y'(x) &= \frac{1}{1+x^2} z'(\arctan x) \\ y''(x) &= \frac{1}{(1+x^2)^2} (z''(\arctan x) - 2x z'(\arctan x)) \end{aligned}$$

En remplaçant, on obtient que z est solution de l'équation différentielle $z'' + mz = 0$. Pour résoudre cette équation, on doit distinguer trois cas :

► $m < 0$: alors $z(t) = \lambda e^{\sqrt{-m}t} + \mu e^{-\sqrt{-m}t}$ et donc

$$y(x) = \lambda e^{\sqrt{-m} \arctan x} + \mu e^{-\sqrt{-m} \arctan x},$$

► $m = 0$: $z'' = 0$ et donc $z(t) = \lambda t + \mu$ et $y(x) = \lambda \arctan x + \mu$,

► $m > 0$: alors $z(t) = \lambda \cos(\sqrt{m}t) + \mu \sin(\sqrt{m}t)$ et donc

$$y(x) = \lambda \cos(\sqrt{m} \arctan x) + \mu \sin(\sqrt{m} \arctan x)$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

IV.6 Application classique des séries entières

Exemple

On cherche des solutions de l'équation

$$(E) : x^2 y'' + 4xy' + (2 - x^2)y - 1 = 0$$

On cherche f dérivable en séries entières solution de E de rayon de convergence R non nul, disons $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, dérivable terme à terme sur $] -R, R[$. Donc :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} 4na_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 2a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} = 1$$

Par unicité du développement en séries entières de rayon de convergence non nul, on a :

- Pour $n = 0$: $2a_0 = 1$, soit $a_0 = \frac{1}{2}$.
- Pour $n = 1$: $4a_1 + 2a_1 = 0$, soit $a_1 = 0$
- Pour $n \geq 2$:

$$n(n-1)a_n + 4na_n + 2a_n - a_{n-2} = 0$$

soit : $a_n(n^2 + 3n + 2) = a_n(n+1)(n+2) = a_{n-2}$

- Si n est impair, $a_n = 0$
- Si n est pair, $a_{2p} = \frac{1}{(2p+2)!}$

Donc

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+2)!} = \begin{cases} \frac{1}{x^2}(\operatorname{ch}(x) - 1) & \text{si } x \neq 0 \\ 1/2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Réciproquement, soit f défini par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+2)!}$; alors f a un rayon de convergence infini (critère de d'Alembert), donc f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et on vérifie que f est solution sur $\mathbb{R}$ de (E) . (soit directement, soit avec les coefficients)

Exemple

On considère l'équation différentielle $y'' + xy' + y = 1$. Chercher l'unique solution de cette équation vérifiant $y(0) = y'(0) = 0$.

Indication : Chercher les solutions développables en séries entières

- Soit $r > 0$ le rayon de convergence de f . On a, pour tout $x \in]-r, r[$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n \geq 0} a_n x^n \\ x f'(x) &= x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n \\ f''(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n. \end{aligned}$$

On en déduit que, pour tout $x \in]-r, r[$, on a

$$f''(x) + xf'(x) + f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

avec

$$b_n = (n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_n.$$

Or, $f'' + xf' + f = 1$. Par unicité du développement en série entière, on obtient $b_0 = 1$ et $b_n = 0$ pour tout $n \geq 1$. Ceci nous donne les relations

$$a_2 = \frac{1}{2}(1 - a_0) \text{ et } a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+2} \text{ pour } n \geq 1.$$

- On sait en outre que $a_0 = y(0) = 0$ et que $a_1 = y'(0) = 0$. On en déduit que tous les termes impairs a_{2n+1} sont nuls, puis que, pour les termes pairs

$$\begin{aligned} a_{2n} &= \left(\frac{-1}{2n}\right) \times \left(\frac{-1}{2n-2}\right) \times \cdots \times \left(\frac{-1}{4}\right) a_2 \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n}. \end{aligned}$$

On factorise tous les termes qui sont pairs au dénominateur, et on trouve

$$a_{2n} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!}$$

valable pour $n \geq 1$. Réciproquement, posons

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!} x^{2n}.$$

La série entière qui apparaît est de rayon de convergence égal à $+\infty$, la fonction f ainsi définie est donc de classe C^∞ et, remontant les calculs, elle est solution de l'équation différentielle initiale.

- De plus, on peut l'identifier à une fonction classique. En effet,

$$f(x) = - \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \left(\frac{-x^2}{2}\right)^n = 1 - \exp(-x^2/2).$$