

ÉQUA-DIFF LINÉAIRE D’ORDRE 1

F est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé de dimension finie $n \geq 1$, β une base de F . Si $u \in \mathcal{L}(F)$ et $x \in F$, on note $u.x$ plutôt que $u(x)$. Soit $a \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(F))$ et $b \in \mathcal{C}(I, F)$.

Définition: Équation différentielle linéaire du 1er ordre

On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre toute équation du type : $(L) : x' = a.x + b$.

On appelle équation homogène associée à (L) l'équation: $(H) : x' = a.x$

Définition: Solution de l'équation différentielle linéaire

Une solution de l'équation différentielle linéaire (L) est une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(I, F)$ telle que : $\forall t \in I, \varphi'(t) = a(t).\varphi(t) + b(t)$

Propriété: Régularité des solutions

Si φ est solution de (L) , alors $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, F)$.

Si a et b sont de classe $\mathcal{C}^k$ alors φ sera de classe $\mathcal{C}^{k+1}$.

Propriété: Théorème de Cauchy-Lipschitz-linéaire

Le PC : $\begin{cases} x' = a(t).x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ où $(t_0, x_0) \in I \times F$ admet une et une seule solution.

Propriété: Structures de S_H et de S_L

- S_H est un sev de $\mathcal{C}^1(I, F)$ isomorphe à F , $\dim S_H = n$
- S_L est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(I, F)$ de direction S_H

Définition: Wronskien

Soient $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une famille de fonctions de I à valeurs dans F . Pour tout $t \in I$ la matrice $W(t) = \text{Mat}_\beta(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ est appelée **matrice wronskienne** en t du système $\mathcal{H} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ par rapport à la base B .

Le déterminant $w(t) = \det W(t)$ est appelé le **wronskien** en t du système $\mathcal{H} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ par rapport à la base B

Propriété: Base de S_H

Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une famille de n éléments de S_H espace solution de $(H) : x' = a(t).x$. Alors

- Pour tout $t \in I$, $\text{rg}(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = \text{rg}(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$
- Les trois affirmations suivantes sont équivalentes:
 - $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de S_H ;
 - $\forall t \in I, w(t) \neq 0$;
 - $\exists t_0 \in I / w(t_0) \neq 0$.

Au quel cas $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est un système fondamental de solutions de (H)

Propriété: Variation des constantes

Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ un système fondamental de solutions de (H) . Soient

$\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ tel que $\varphi = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i$. Alors

$$\varphi \text{ est solution de } (L) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i' \varphi_i = b \Leftrightarrow \lambda' = W^{-1}B$$

Où $\lambda = \text{Mat}_B(\varphi)$ et $B = \text{Mat}_B(b)$

ÉQUA-DIFF LINÉAIRES À COEFS CONSTANTS

Propriété: Les problèmes de Cauhy

a constante

- $\forall (t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times F$, l'unique solution au problème de Cauchy $\begin{cases} x' = a.x \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ est $t \mapsto e^{(t-t_0)a}x_0$
- Pour tout $(t_0, x_0) \in I \times F$, l'unique solution au problème de Cauchy $\begin{cases} x' = a.x + b \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ est $t \mapsto e^{(t-t_0)a}.x_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)a}b(s) \, ds$

Définition: Système différentiel

Aux applications a et b sont associées les applications $A : t \mapsto M_n(\mathbb{K})$ et $B : t \mapsto M_{n,1}(\mathbb{K})$, où, pour tout $t \in I$, $A(t)$ et $B(t)$ sont les matrices de $a(t)$ et $b(t)$ dans la base B . On appelle système différentiel l'équation notée $X' = A(t)X + B(t)$ dont les inconnues X sont à valeurs dans $M_{n,1}(\mathbb{K})$.

Méthode

Si A est diagonalisable (resp trigonalisable), $\exists P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP = T$ diagonale (resp triangulaire supérieure). On effectue alors le changement de fonction inconnue défini par:

$$Y = P^{-1}X \Leftrightarrow X = PY$$

qui aboutit aux nouveaux systèmes différentiels:

$$(L_2) : Y' = TY + P^{-1}B(t)$$

$$(H_2) : Z' = TZ$$

On résout ces systèmes par la méthode de la remontée.

Si A n'est pas trigonalisable, dans ce cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors on résout le système différentiel avec le corps de base $\mathbb{C}$ puis on cherche les solutions réelles.

ÉQUATION SCALAIRE D’ORDRE n

Une équation différentielle scalaire linéaire d'ordre n définie sur I est toute équation

$(E) : x^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{(k)} = b$, avec $a_0, \dots, a_{n-1} : I \rightarrow \mathbb{K}$ et $b : I \rightarrow \mathbb{K}$ continues, et

d'inconnue $x : I \rightarrow \mathbb{K}$ fonction n fois dérivable. On a

$$x^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{(k)} = b \Leftrightarrow X' = AX + B$$

$$\text{Avec } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdots & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$$

Propriété

- L'ensemble S_0 des solutions sur I de l'équation homogène $(E_0) : x^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{(k)} = 0$ est un sev de l'espace $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ de dimension n .
- L'ensemble S des solutions sur I de l'équation complète (E) est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ de direction S_0 .

ÉQU-DIFF LINÉAIRES D’ORDRE 2

Propriété: Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'' + a(t) \cdot x' + b(t) \cdot x = c(t) \\ x(t_0) = u_0, x'(t_0) = v_0 \end{cases} \quad \text{où } t_0 \in I, u_0, v_0 \in \mathbb{K}$$

admet une et une seule solution.

Propriété: Structure des solutions de (L) et de (H)

- L'ensemble S_H des solutions de H est un sous-espace vectoriel de dimension 2 du $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$.
- L'ensemble S_L des solutions de (L) est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$ de direction S_H .

Propriété: Méthode de variation des constantes

Soit (h_1, h_2) une base de S_H : pour tout $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$, il existe un unique couple (u_1, u_2) d'applications de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ tel que: $f = u_1.h_1 + u_2.h_2$. Alors

$$f \text{ solution de } (L) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1'.h_1 + u_2'.h_2 = 0 \\ u_1'h_1' + u_2'h_2' = c \end{cases}$$

ÉQU-DIFF LINÉAIRE D’ORDRE 2 (CONSTANT)

Soit $a, b, c \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 0$ et (H) l'équation différentielle

$$(H) : ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

d'équation caractéristique $(EC) : ar^2 + br + c = 0$

Propriété

- Si (EC) possède des racines distinctes r_1 et r_2 , les solutions de l'équation homogène (H) sont les fonctions définies par $y(t) = \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}$ où $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$
- Si (EC) possède une racine double r , les solutions de l'équation homogène (H) sont les fonctions définies par $y(t) = (\lambda_1 t + \lambda_2) e^{rt}$ où $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$

Propriété

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Si l'équation $ar^2 + br + c = 0$ possède des racines distinctes complexes conjuguées: $p + iq$ et $p - iq$ avec $(p, q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. Les solutions réelles sont les fonctions:

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto (\alpha \cos(qt) + \beta \sin(qt)) e^{pt} \end{cases} \quad \text{où } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

Propriété

Soit P un polynôme. L'équation $ay'' + by' + cy = P(t)e^{\alpha t}$ admet une solution particulière de la forme $y_p(t) = t^m Q(t)e^{\alpha t}$ où Q est une fonction polynomiale de même degré que P

- Si α n'est pas solution de (EC) , alors $m = 0$
- Si α est solution simple de (EC) , alors $m = 1$
- Si α est solution double de (EC) , alors $m = 2$

CONTACT INFORMATION

Web: www.elamdaoui.com

Email: elamdaoui@gmail.com

Phone: 06 62 30 38 81