
Calcul différentiel

EL AMDAOUI Mustapha,

Lycée IBN TIMIYA,
site web: www.elamdaoui.com,
email: elamdaoui@gmail.com

Niveau: MP

Table des matières

I	Différentielle d'une fonction	2
I.1	Dérivation selon un vecteur	2
I.2	Différentielle	3
I.3	Propriétés	4
I.4	Opérations sur les applications différentiables	6
I.5	Matrice Jacobienne	7
II	Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$	9
II.1	Définition	9
II.2	Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$	11
II.3	Formule d'intégration	14
II.4	Gradient	14
III	Dérivées d'ordres supérieurs	16
III.1	Dérivées d'ordres supérieurs	16
III.2	Théorème de Schwarz	19
III.3	Développement de Taylor-Young d'ordre 2	20
IV	Fonctions numériques	22
IV.1	Applications aux extrémums	22
IV.2	Surface représentant une fonction de deux variables réelles	24
IV.3	Équations aux dérivées partielles	25

Dans ce chapitre

- les $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels considérés $E, F, G \dots$ sont de dimensions finies non nulles.
- On pose $\dim E = n$ et $\dim F = p$.
- $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ une base de F .
- $U \subset E$ un ouvert non vide et $f : U \rightarrow F$ une application
- Pour $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ on identifie $f(x)$ et $f(x_1, \dots, x_n)$.
- $f_1, \dots, f_p$ les fonctions coordonnées de f dans la base $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$.

I Différentielle d'une fonction

I.1 Dérivation selon un vecteur

U est un ouvert et $a \in U$, il existe $\alpha > 0$ tel que $B(a, \alpha) \subset U$. Soit $h \in E \setminus \{0\}$, la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto f(a + th)$ est définie au voisinage de 0.

Définition 1

On dit que f admet une dérivée en a suivant $h \in E \setminus \{0\}$ si $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + th) - f(a)}{t}$ existe dans F . Dans ce cas, cette limite s'appelle la dérivée de f en a suivant h et on la note $D_h f(a)$.

Propriété 1

On pose $\varphi(t) = f(a + th)$. Alors :

1. φ est définie au voisinage de 0.
2. f admet une dérivée en a suivant h si, et seulement, si φ est dérivable en 0.

Dans un tel cas $D_h f(a) = \varphi'(0)$.

Remarque :

Cette propriété est pratique pour calculer les dérivées directionnelles. Il est inutile de simplifier l'expression de $\varphi'(t)$. Remplacer directement par $t = 0$.

Définition 2: Dérivées partielles

1. On dit que f admet une dérivée partielle (première) en a par rapport à la i ème place si f admet une dérivée en a selon e_i .

Elle se note $D_{e_i} f(a)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

2. Si f admet en tout point de U une dérivée par rapport à la i ème place, on appelle dérivée partielle de f par rapport à la i ème place l'application, noté $D_{e_i} f$ ou $D_i f$ ou $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, l'application $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$

Remarque :

Calculer la i ème dérivée partielle en $a = (a_1, \dots, a_n)$ revient à calculer la dérivée de la fonction à variable réelle

$$g : t \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n) \quad \text{en } t = a_i$$

Exemple

Calculer les dérivées partielles de $\det : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$

Soit $\mathcal{B} = (E_{i,j})$ la base canonique de E .

$$\varphi(t) = \det(M + tE_{ij}) = \det(M) + t\Delta_{ij}(M)$$

Donc $D_{ij} f : M \mapsto \varphi'(0) = \Delta_{ij}(M)$ existe

I.2 Différentielle

Définition 3: Différentielle en un point

1. On dit que f est différentiable en a s'il existe une application linéaire ℓ de E vers F et ε une application de E dans F continue et nulle en 0 telles que : $\forall h \in E$ tel que $a + h \in U$ on a

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0_E}{=} f(a) + \ell(h) + \|h\| \varepsilon(h)$$

Dans ce cas, l'application ℓ est unique et s'appelle la différentielle de f en a ou encore l'application linéaire tangente à f en a et on la note df_a (ou df_a ou df_a ou $f'(a)$).

2. On dit que f est différentiable sur U si elle est différentiable en tout point de U . Dans ce cas, l'application $df : x \in U \mapsto df_x \in \mathcal{L}(E, F)$ s'appelle la différentielle de f sur U .

On écrit souvent $o(h)$ ou $o(\|h\|)$ pour $\|h\| \varepsilon(h)$.

Preuve:

Supposons qu'il existe u_1 et $u_2 \in \mathcal{L}(E, F)$ tels que

$$\begin{cases} f(a+h) = f(a) + \ell_1(h) + o(h) \\ f(a+h) = f(a) + \ell_2(h) + o(h) \end{cases}$$

Soit $\ell = \ell_1 - \ell_2$, alors $\ell(h) = o(h)$.

Soit $x \in E \setminus \{0\}$, on pose $h_n = \frac{1}{n} \frac{x}{\|x\|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc $\frac{\ell(x)}{\|x\|} = \frac{u(h_n)}{\|h_n\|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc $\ell(x) = 0$. L'application ℓ est linéaire donc $\ell(0) = 0$ et, par suite, l'application ℓ est nulle

Remarque :

Si l'application f est différentiable en a alors df_a ne dépend pas de la norme choisie.

Exemple

Si l'application f est constante sur U alors f est différentiable sur U et on a $\forall a \in U, df_a = 0$.

Soit $a \in U$ et $h \in E$ tel que $a + h \in E$, on a

$$f(a+h) = f(a)$$

Prendre $\ell = 0$ et $\varepsilon = 0$. Ainsi f est différentiable en a et $df_a = 0$

Exemple

On note $E = M_n(\mathbb{K})$.

On cherche les différentielles de $f_2 : A \mapsto A^2$

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, alors pour $H \in M_n(\mathbb{K})$,

$$\begin{aligned} f(A+H) &= (A+H)^2 = A^2 + AH + HA + H^2 \\ &= f(A) + \ell(H) + H^2 \end{aligned}$$

Où ℓ est linéaire continue.

On munit E d'une norme d'algèbre. Alors $\forall H \in M_n(\mathbb{K}), \|H^2\| \leq \|H\|^2$. Donc pour $\|H\| \leq \varepsilon$, on a $\|H^2\| \leq \varepsilon \|H\|$. Donc $H^2 = o(H)$.

Donc f est différentiable en A et $df_A : H \mapsto AH + HA$

Propriété 2

Si $f : U \subset E \rightarrow F$ est la restriction d'une application linéaire alors elle est différentiable sur U et on a

$$\forall a \in U, df_a = f$$

Preuve:

Soit $a, h \in E$, alors $f(a+h) = f(a) + f(h)$. Quand $h \rightarrow 0$, $f(a+h) = f(a) + u(h) + o(h)$ avec $u = f$ linéaire. Ainsi f est différentiable en a et $df_a = f$.

Exemple

1. Pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, l'application

$$e_i^* : \begin{cases} \mathbb{R}^p & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_p) & \longmapsto x_i \end{cases}$$

est différentiable

2. Pour tout $(k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$. L'application

$$E_{k,\ell}^* : \begin{cases} M_{n,p}(\mathbb{K}) & \longrightarrow \mathbb{K} \\ (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} & \longmapsto a_{k,\ell} \end{cases}$$

est différentiable

Définition 4

Toute écriture :

$$f(a+h) = f(a) + \ell(h) + o(h) \quad \text{quand } h \rightarrow 0 \quad \text{avec } \ell \in \mathcal{L}(E, F).$$

est appelée développement limité à l'ordre 1 de f en a

I.3 Propriétés**Propriété 3**

Si f est différentiable en a alors f est continue en a .

Preuve:

Quand $h \rightarrow 0$, $f(a+h) = f(a) + df_a(h) + o(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(a)$ car l'application linéaire df_a est continue puisqu'elle est linéaire sur un espace de dimension finie.

Corollaire 1

Les fonctions différentiables sont continues

Propriété 4

Si f est différentiable en a alors f est dérivable en a suivant tout vecteur non nul. Dans ce cas,

$$\forall h \in E, df_a(h) = D_h f(a)$$

Preuve:

Soit $h \in E \setminus \{0\}$. Pour t proche de 0

$$\begin{aligned} f(a+th) &= f(a) + df_a(th) + o(t) \\ &= f(a) + t df_a(h) + o(t) \quad \text{car } df_a \text{ est linéaire} \end{aligned}$$

$$\text{Par suite } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t} = df_a(h)$$

Exemple

Soit l'application $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

1. Montrer que f est continue en $(0, 0)$ et elle admet des dérivées suivant tout vecteur
2. Montrer que f n'est pas différentiable en $(0, 0)$

1. ► Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, on a

$$|f(x, y)| = \left| \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{|y|}{2} \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$$

► Soit $(h, k) \neq (0, 0)$. On a $\varphi(t) = f(th, tk) = tf(h, k)$ donc $D_{(h,k)} f(x, y) = \varphi'(0) = f(h, k)$ donc f admet des

dérivées suivant tout vecteur non nul en $(0,0)$.

2. L'application $(h,k) \mapsto f(h,k)$ n'est pas linéaire donc f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Remarque :

1. La continuité et la dérivabilité directionnelle ne suffit pas pour qu'une application soit différentiable.
2. Si $\exists h \in E \setminus \{0\}$ tel que f ne soit pas dérivable en a suivant h alors f n'est pas différentiable en a .
3. On suppose que f admet des dérivées en a suivant tout vecteur $h \in E \setminus \{0\}$.
Si l'application $g : h \mapsto D_h f(a)$ si $h \neq 0$ et $g(0) = 0$ n'est pas linéaire sur E alors f n'est pas différentiable en a .

Propriété 5: $E = \mathbb{R}$

Soit $f : U \subset \mathbb{R} \rightarrow F$ et $a \in U$. f est différentiable en a si, et seulement, si f est dérivable en a .
Dans ce cas, $\forall h \in \mathbb{R}, df_a(h) = hf'(a)$. En particulier, $df_a(1) = f'(a)$.

Preuve:

$\Rightarrow$ Si f dérivable en a .

$\frac{1}{h}(f(a+h)-f(a)) \xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(a)$ donc $\frac{1}{h}(f(a+h)-f(a)) = f'(a) + o(1)$ puis $f(a+h) = f(a) + h.f'(a) + o(h) = f(a) + u(h) + o(h)$
avec $u : h \mapsto h.f'(a)$, $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, F)$. Par suite f est différentiable en a et $df_a : h \mapsto h.f'(a)$.

$\Leftarrow$ Supposons f différentiable en a . Donc $f(a+h) = f(a) + df_a(h) + o(h)$, puis

$$\frac{1}{h}(f(a+h)-f(a)) = \frac{1}{h}(df_a(h) + o(h)) = df_a(1) + o(1) \xrightarrow{h \rightarrow 0} df_a(1)$$

Ainsi f est dérivable en a et $f'(a) = df_a(1)$.

Propriété 6

Si f est différentiable en a alors les dérivées partielles de f en a existent et on a

$$\forall h = \sum_{i=1}^n h_i e_i \in E, \quad df_a(h) = D_h f(a) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

Preuve:

Si f est différentiable alors pour tout $a \in U$ et tout $h \in E$, f est dérivable en a selon le vecteur h et

$$D_h f(a) = df_a(h)$$

En particulier pour $h = e_i$

$$D_{e_i} f(a) = df_a(e_i)$$

Si $h = \sum_{i=1}^n h_i e_i$, alors

$$\begin{aligned} df_a(h) &= df_a\left(\sum_{i=1}^n h_i e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n h_i df_a(e_i) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \end{aligned}$$

Car df_a est linéaire

Corollaire 2

Le développement limité à l'ordre 1 de f en a s'écrit alors

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + o(\|h\|)$$

I.4 Opérations sur les applications différentiables

Propriété 7: Opérations algébriques

Soit $f, g : U \rightarrow F$ différentiables en a . Alors : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda f + g$ est différentiable en a et on a

$$d(\lambda f + g)_a = \lambda df_a + dg_a$$

Preuve:

Soit $h \in E$ tel que $a + h \in U$. On a

$$\begin{aligned} (\lambda f + g)(a + h) &= \lambda f(a + h) + g(a + h) \\ &= \lambda f(a) + \lambda df_a(h) + g(a) + dg_a(h) + o(\|h\|) \\ &= (\lambda f + g)(a) + (\lambda df_a + dg_a)(h) + o(\|h\|) \end{aligned}$$

avec $\lambda df_a + dg_a \in \mathcal{L}(E, F)$. Par suite $\lambda f + g$ est différentiable en a et

$$d(\lambda f + g)_a = \lambda df_a + dg_a$$

Propriété 8

Soient $f : U \subset E \rightarrow F, g : U \subset E \rightarrow G$ et $B : F \times G \rightarrow H$ bilinéaire.

Si f et g sont différentiables en a alors $B(f, g)$ l'est aussi et

$$dB(f, g)_a = B(df_a, g(a)) + B(f(a), dg_a)$$

Preuve:

Soit $h \in E$ tel que $a + h \in U$. On a

$$\begin{aligned} B(f, g)(a + h) &= B(f(a + h), g(a + h)) \\ &= B(f(a) + df_a(h) + o(\|h\|), g(a) + dg_a(h) + o(\|h\|)) \\ &= B(f(a), g(a)) + (df_a(h), g(a)) + (f(a), dg_a(h)) + \varphi(h) \end{aligned}$$

Où $\varphi(h) = B(f(a), o(\|h\|)) + B(df_a(h), dg_a(h) + o(\|h\|)) + B(o(\|h\|), g(a + h))$. avec

$$\varphi(h) = B(f(a), dg_a(h) + o(h)) + B(df_a(h) + o(h), g(a)) + B(df_a(h), dg_a(h)) + B(o(h), o(h))$$

Or les applications df_a et dg_a sont lipschitziennes car linéaires en dimension finie donc continues et $\|B(x, y)\| \leq k \|x\| \cdot \|y\|$ car B est bilinéaire en dimension finie donc continue. Par suite $\varphi(h) = o(h)$ et donc

$$B(f, g)(a + h) = b(f, g)(a) + u(h) + o(h)$$

avec $u : h \mapsto B(df_a(h), g(a)) + B(f(a), dg_a(h))$ linéaire. Ainsi $B(f, g)$ est différentiable en a et $dB(f, g)_a : h \mapsto B(df_a(h), g(a)) + B(f(a), dg_a(h))$. Abusivement, on écrit $dB(f, g)_a = B(df_a, g(a)) + B(f(a), dg_a)$

Corollaire 3

Si de plus F est une algèbre normée alors pour $f, g : U \subset E \rightarrow F$ différentiables en a , fg est différentiable en a et on a

$$\forall h \in E, d(fg)_a(h) = df_a(h)g(a) + f(a)dg_a(h)$$

Preuve:

$B : F \times F \rightarrow F, (x, y) \mapsto xy$ est bilinéaire

Corollaire 4

Si $\alpha : U \subset E \rightarrow \mathbb{R}$ et $f : U \subset E \rightarrow F$ différentiables en a , alors αf est différentiable en a et on a

$$d(\alpha f)_a = d\alpha_a f(a) + \alpha(a) df_a$$

Preuve:

$B : \mathbb{R} \times F \rightarrow F, (\lambda, x) \mapsto \lambda x$ est bilinéaire

Exemple

La fonction $\det : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ est différentiable car $\det$ est somme et produit de fonctions différentiables.

Théorème 1: Composition de deux fonctions différentiables

Soit $f : U \subset E \rightarrow F$ différentiable en a , V un ouvert de F tel que $f(U) \subset V$ et $g : V \rightarrow G$ différentiable en $f(a)$. Alors $g \circ f$ est différentiable en a et on a

$$d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a \quad (\text{R\`egle de la chaine})$$

Preuve:

Soit $a \in U$. Quand $h \rightarrow 0$,

$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + o(h) = f(a) + k$$

avec $k = df_a(h) + o(h) = O(h)$ car $\|df_a(h)\| \leq \|df_a\| \cdot \|h\|$.

Puisque $k \rightarrow 0$

$$g(f(a) + k) = g(f(a)) + dg_{f(a)}(k) + o(k)$$

puis

$$\begin{aligned} (g \circ f)(a+h) &= g(f(a)) + dg_{f(a)}(df_a(h) + o(h)) + o(h) \\ &= g(f(a)) + dg_{f(a)}(df_a(h)) + dg_{f(a)}(o(h)) + o(h) \end{aligned}$$

Mais $dg_{f(a)}(o(h)) = o(h)$ car $dg_{f(a)}$ est lipschitzienne.

Ainsi : $(g \circ f)(a+h) = (g \circ f)(a) + u(h) + o(h)$ avec $u = dg_{f(a)} \circ df_a \in \mathcal{L}(E, H)$.

Finalement $g \circ f$ est différentiable en a et $d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a$.

Corollaire 5

Soit $f : U \subset E \rightarrow F$ et $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E$ telles que $\gamma(I) \subset U$.

Si γ est dérivable sur I et f est différentiable sur U , alors $f \circ \gamma$ est dérivable sur I et on a :

$$\forall t \in I, \quad (f \circ \gamma)'(t) = df_{\gamma(t)}(\gamma'(t))$$

Preuve:

$f \circ \gamma$ est dérivable sur I et pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned} (f \circ \gamma)'(t) &= d(f \circ \gamma)_t(1) \\ &= df_{\gamma(t)} \circ d\gamma_t(1) \\ &= df_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) \end{aligned}$$

Propriété 9

Soit $f : U \subset E \rightarrow F$. On a équivalence entre :

1. f est différentiable
2. les fonctions coordonnées de f dans une base de F le sont.

Preuve:

1 $\Rightarrow$ 2) Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de F et $f_1, \dots, f_n$ les composantes de f dans la base $\mathcal{B}$.

Notons $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ la base duale de $\mathcal{B}$. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f_i = e_i^* \circ f$, par composition, est différentiable

2 $\Rightarrow$ 1) On a aussi $f = \sum_{i=1}^n f_i e_i$ est différentiable par opération sur les fonctions différentiables. En effet la fonction constante égale à e_i est différentiable et par composition avec l'application bilinéaire produit extérieur nous pouvons affirmer que si $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable, l'application $f_i e_i : U \rightarrow F$ l'est aussi.

I.5 Matrice Jacobienne**Définition 5**

On appelle matrice jacobienne relative aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ d'une application $f : U \subset E \rightarrow F$ différentiable en $a \in U$ la matrice de l'application linéaire df_a relative aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$

$$Jac(f)(a) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(df_a) \in M_{p,n}(\mathbb{R})$$

Propriété 10

En notant $f_1, \dots, f_p$ les fonctions coordonnées de f

$$Jac(f)(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Preuve:

Les colonnes de $Jac(f)(a)$ sont formées par les composantes dans $\mathcal{C}$ des vecteurs $df_a(e_j) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ et l'on sait $\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)_i = D_j(f_i)$

Remarque :

Soit $h \in E$. On pose $H = [h]_{\mathcal{B}}$ et $Y = [df_a(h)]_{\mathcal{C}}$. Alors : $Y = Jac(f)(a) \times H$.

Remarque :

La matrice Jacobienne permet de calculer facilement la différentielle. On l'utilise surtout lorsque $f(x)$ est une expression en les coordonnées de x .

Exemple

Déterminons la différentielle de l'application $f(x, y, z) = (xy + yz + zx, xyz)$.

On a f admet deux composantes $f_1(x, y, z) = xy + yz + zx$ et $f_2(x, y, z) = xyz$.

On a f_1 et f_2 sont différentiables sur $\mathbb{R}^3$ car polynomiales en x, y et z donc f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

La matrice jacobienne de f est une matrice d'ordre 2×3 et $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\begin{aligned} Jac(f)(x, y, z) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y, z) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(x, y, z) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y, z) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(x, y, z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y+z & x+z & x+y \\ yz & xz & xy \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc $\forall (x, y, z), (h, k, \ell) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} J_f(x, y, z) \begin{pmatrix} h \\ k \\ \ell \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} y+z & x+z & x+y \\ yz & xz & xy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \\ \ell \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (y+z)h + (x+z)k + (x+y)\ell \\ yzh + xzk + xy\ell \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On déduit que $df(x, y, z)(h, k, \ell) = ((y+z)h + (x+z)k + (x+y)\ell, yzh + xzk + xy\ell)$.

Remarque :

Si $f(x)$ n'est pas une expression en les composantes de x il vaut mieux calculer la différentielle directement sans passer par la matrice Jacobienne. Le calcul de la matrice Jacobienne passe par le calcul de la différentielle.

Exemple

Déterminons la matrice Jacobienne de l'application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(u) = \|u\|_2^2$.

On a $\forall x, h \in \mathbb{R}^n, f(x+h) = \|x+h\|_2^2 = \|x\|_2^2 + 2 \langle x, h \rangle + \|h\|_2^2$ donc $df(x)(h) = 2 \langle x, h \rangle$. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On pose $X = [x]_{\mathcal{B}}$ et $H = [h]_{\mathcal{B}}$ donc $df(x)(h) = 2^t X H$. On déduit que $J_f(x) = 2^t X$.

Propriété 11

Soient $f : U \subset E \rightarrow F$ et $g : V \subset F \rightarrow G$ deux fonctions différentiables telles que $f(U) \subset V$. On a

$$\text{Jac}(g \circ f)(a) = \text{Jac}(g(f(a))) \times \text{Jac}(f)(a)$$

et pour tout $a \in U$

$$\frac{\partial(g \circ f)_i}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^p \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a) \cdot \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(a)) \quad \text{R\`egle de la chaine}$$

avec $f_1, \dots, f_p$ les fonctions coordonnées de f dans la base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$.

Preuve:

f et g sont différentiables donc $g \circ f$ l'est aussi et

$$d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a$$

Par suite

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_j}(a) = dg_{f(a)} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \right)$$

Or $f = \sum_{i=1}^p f_i \varepsilon_i$ donc $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^p \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \varepsilon_i$ puis

$$\begin{aligned} \frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_j}(a) &= dg_{f(a)} \left(\sum_{i=1}^p \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \varepsilon_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^p \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) dg_{f(a)}(\varepsilon_i) \\ &= \sum_{i=1}^p \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \cdot \frac{\partial g}{\partial y_i}(f(a)) \end{aligned}$$

II Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ **II.1 Définition**

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Définition 6

On dit qu'une fonction $f : U \subset E \rightarrow F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U dans la base $\mathcal{B}$ si les dérivées partielles de f dans $\mathcal{B}$ existent et sont continues.

Exemple

$E = M_n(\mathbb{R})$, $\det : M \rightarrow \det(M)$ est de classe $\mathcal{C}^1$

Soit $\mathcal{B} = (E_{i,j})$ la base canonique de E .

$$\varphi(t) = \det(M + tE_{i,j}) = \det(M) + t\Delta_{i,j}(M)$$

Donc $D_{i,j}f : M \rightarrow \varphi'(0) = \Delta_{i,j}(M)$ existe et est continue, puisqu'elle est polynomiale, ce qui assure que $\det$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\begin{aligned} df_H(M) &= \sum_{1 \leq i,j \leq n} h_{i,j} D_{i,j} \det(M) \\ &= \sum_{1 \leq i,j \leq n} h_{i,j} \Delta_{i,j}(M) \\ &= \text{Tr}(H^t \text{com}(M)) \end{aligned}$$

Propriété 12

Soit $f : U \subset E \rightarrow F$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U dans la base $\mathcal{B}$;

2. f est différentiable et $df : U \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$ est continue
3. pour tout $h \in E \setminus \{0\}$ l'application $D_h f$ existe et est continue sur U .

Preuve:

2 $\Rightarrow$ 1) Supposons que f est différentiable et df est continue.

Les dérivées partielles de f dans $\mathcal{B}$ existent et sont données par $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = df_a(e_j)$.

Puisque l'application $a \mapsto df_a$ est continue et puisque l'application constante $a \mapsto e_j$ est continue et puisque l'application $B : \mathcal{L}(E, F) \times E \rightarrow F$ définie par $B(u, x) = u(x)$ est continue car bilinéaire en dimension finie, on peut affirmer que l'application $a \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ est continue par opérations sur les fonctions continues.

1 $\Rightarrow$ 2) Supposons f de classe $\mathcal{C}^1$ dans la base $\mathcal{B}$.

Dans le cas : $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Soit $a = (a_1, a_2)$ et $h = (h_1, h_2)$. On a

$$f(a+h) - f(a) = f(a_1+h_1, a_2+h_2) - f(a_1, a_2+h_2) + f(a_1, a_2+h_2) - f(a_1, a_2)$$

En appliquant le TAF aux applications partielles

$$x_1 \mapsto f(x_1, a_2+h_2) \text{ et } x_2 \mapsto f(a_1, x_2)$$

il existe, c_h compris entre a_1 et a_1+h_1 et d_h compris entre a_2 et a_2+h_2 vérifiant :

$$f(a+h) - f(a) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(c_h, a_2+h_2) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, d_h)$$

Quand $h \rightarrow 0$, $(c_h, a_2+h_2) \rightarrow (a_1, a_2)$ et $(a_1, d_h) \rightarrow (a_1, a_2)$ donc par continuité des dérivées partielles de f , on obtient

$$f(a+h) - f(a) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) + o(\|h\|)$$

On en déduit que f est différentiable en a et $df_a = \sum_{i=1}^n e_i^* \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

Par opérations sur les fonctions continues, df est continue. En effet les applications $a \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ et $a \mapsto e_i^*$ sont continues.

3 $\Rightarrow$ 1) En particulier pour $h \in \{e_1, \dots, e_n\}$, les dérivées partielles existent et sont continues

2 $\Rightarrow$ 3) Soit $h \in E$. Comme f est différentiable, alors pour tout $a \in U$, $D_h f(a)$ existe et vaut

$$D_h f(a) = df_a(h) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'application $a \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ est continue, d'où la continuité de $D_h f$

Corollaire 6 1. La notion de classe $\mathcal{C}^1$ ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{B}$.

2. Les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sont continues

Preuve:

Toute fonction de classe $\mathcal{C}^1$ est différentiable.

Exemple

Les fonctions constantes sont de classe $\mathcal{C}^1$ car de dérivées partielles nulles donc continues.

Exemple

Les applications linéaires sont de classe $\mathcal{C}^1$.

En effet, pour $f \in \mathcal{L}(E, F)$, les dérivées partielles de f dans $\mathcal{B}$ sont les applications données par $D_{e_j} f(a) = df_a(e_j) = f(e_j)$. Ce sont des applications constantes donc continues.

Exemple

$F : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$, $M \mapsto M^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$

Soit $H \in M_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ et $X \in M_n(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= (X + tH)^2 \\ &= X^2 + t(XH + HX) + t^2 H^2\end{aligned}$$

Donc φ est dérivable en 0 et $\varphi'(0) = XH + HX$. Ainsi $D_H f$ existe en tout point X et

$$D_H f : X \mapsto XH + HX$$

est linéaire en dimension finie donc elle est continue

II.2 Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Propriété 13

Soient $f, g : U \subset E \rightarrow F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ alors $\lambda f + \mu g$ aussi et

$$\frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial x_i} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

Preuve:

f et g sont différentiables donc $\lambda f + \mu g$ aussi et $d(\lambda f + \mu g) = \lambda df + \mu dg$.

Les dérivées partielles de $\lambda f + \mu g$ existent et

$$D_j(\lambda f + \mu g)_a = d(\lambda f + \mu g)_a(e_j) = (\lambda df_a + \mu dg_a)(e_j) = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + \mu \frac{\partial g}{\partial x_j}(a).$$

Les dérivées partielles de $\lambda f + \mu g$ sont donc continues.

Corollaire 7

L'ensemble $\mathcal{C}^1(U, F)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de U vers F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(U, F)$.

Propriété 14

Soient $f : U \subset E \rightarrow F, g : U \subset E \rightarrow G$ et $B : F \times G \rightarrow H$ bilinéaire.

Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ alors $B(f, g)$ aussi et

$$\frac{\partial B(f, g)}{\partial x_i} = B\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}, g\right) + B\left(f, \frac{\partial g}{\partial x_i}\right)$$

Preuve:

f et g sont différentiables donc $B(f, g)$ aussi et $dB(f, g) = B(df, g) + B(f, dg)$.

Les dérivées partielles de $B(f, g)$ existent et

$$\begin{aligned}\frac{\partial B(f, g)}{\partial x_i}(a) &= dB(f, g)_a(e_i) \\ &= B(df_a(e_i), g(a)) + B(f(a), dg_a(e_i)) \\ &= B\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a), g(a)\right) + B\left(f(a), \frac{\partial g}{\partial x_i}(a)\right)\end{aligned}$$

Les dérivées partielles de $B(f, g)$ sont donc continues.

Corollaire 8 1. Si F est une algèbre alors $\mathcal{C}^1(U, F)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(U, F)$.

2. $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{K})$ est une algèbre

3. Si $f, g \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{K})$ telle que g ne s'annule pas sur U alors $\frac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U

Exemple

Toute fonction polynômiale de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^1$

Exemple

Soit $P, Q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions polynomiales non nulles.

Alors $U = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, Q(x_1, \dots, x_n) \neq 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ car il est image réciproque d'un ouvert par une application continue. Soit

$$f : \begin{cases} U & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto \frac{P(x_1, \dots, x_n)}{Q(x_1, \dots, x_n)} \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\frac{\partial P}{\partial x_i} Q - P \frac{\partial Q}{\partial x_i}}{Q^2}$$

Propriété 15

Soit $f : U \subset E \longrightarrow F$. On a équivalence entre :

1. f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ;
2. les fonctions coordonnées de f dans une base de F sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur U .

De plus, on a alors $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_j = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)$. C'est-à-dire $\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)$ sont les fonctions coordonnées de $\frac{\partial f}{\partial x_i}$

Preuve:

Soit $C = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ base de F .

2 $\Rightarrow$ 1) On a $f = \sum_{k=1}^p f_k \varepsilon_k$ donc

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \sum_{k=1}^p \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(a) \varepsilon_k$$

Les dérivées partielles sont continues donc f est de classe $\mathcal{C}^1$.

1 $\Rightarrow$ 2) On a $f_j = \varepsilon_j^* \circ f$ donc

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon_j^* \left(\frac{f(a + t e_i) - f(a)}{t} \right) = \varepsilon_j^* \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right)$$

et $\frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \varepsilon_j^* \circ \frac{\partial f}{\partial x_i}$ est continue par composition.

Exemple

$f : \text{GL}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R}), M \longmapsto M^{-1}$.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et donner $df_h(M)$

Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$,

- les coordonnées de f sont

$$f_{ij} : M \longmapsto [M^{-1}]_{ij} = \frac{\Delta_{ji}(M)}{\det M}$$

où $\Delta_{ji}(M)$ le cofacteur de M de position (j, i) . On voit que f_{ij} est quotient de deux fonctions polynomiales, donc elle est de classe $\mathcal{C}^1$, donc f est de classe $\mathcal{C}^1$.

- Soit $H \in M_n(\mathbb{R})$ et $\varphi : t \longmapsto (M + tH)^{-1}$. On a

$$\varphi(t)(M + tH) = I_n$$

Par dérivation, on obtient $\varphi'(t)(M + tH) + \varphi(t)H = 0$, puis on évalue en 0, il vient

$$\varphi'(0) = -M^{-1}HM^{-1}$$

Propriété 16: Composition

Soient $f : U \subset E \longrightarrow F$ et $g : V \subset F \longrightarrow G$ telles que $f(U) \subset V$.

Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $a \in U$

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^p \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \cdot \frac{\partial g}{\partial y_i}(f(a)) \quad (\text{R\`egle de la chaine})$$

avec $f_1, \dots, f_p$ les fonctions coordonnées de f dans la base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$.

Preuve:

f et g sont différentiables donc $g \circ f$ l'est aussi et

$$d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a$$

Par suite

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_j}(a) = dg_{f(a)} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \right)$$

Or $f = \sum_{i=1}^p f_i \varepsilon_i$ donc $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^p \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \varepsilon_i$ puis

$$\begin{aligned} \frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_j}(a) &= dg_{f(a)} \left(\sum_{i=1}^p \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \varepsilon_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^p \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) dg_{f(a)}(\varepsilon_i) \\ &= \sum_{i=1}^p \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \cdot \frac{\partial g}{\partial y_i}(f(a)) \end{aligned}$$

Ainsi les dérivées partielles de $g \circ f$ existent et sont continues.

Exemple

Soient $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Montrer que $g : (r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$

L'application g est de classe $\mathcal{C}^1$ par composition et

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) = -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

Propriété 17

Soient $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow E$ et $f : U \subset E \longrightarrow F$ telles que $\gamma(I) \subset U$.

On note $x_1, \dots, x_p$ les fonctions coordonnées de γ de sorte que $\gamma(t) = \sum_{i=1}^p x_i(t) e_i$.

Si γ et f sont de classe $\mathcal{C}^1$ alors $f \circ \gamma$ l'est aussi et :

$$(f \circ \gamma)'(t) = df_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = \sum_{i=1}^n x'_i(t) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t)) \quad (\text{R\`egle de la chaine})$$

Preuve:

Rappelons que pour g une fonction dérivable $g'(t) = dg_t(1)$. Par suite

$$(f \circ \gamma)'(t) = df_{\gamma(t)}(\gamma'(t))$$

Or $\gamma'(t) = \sum_{j=1}^n x'_j(t) e_j$, donc par linéarité

$$\begin{aligned} (f \circ \gamma)'(t) &= df_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) \\ &= \sum_{i=1}^n x'_i(t) df_{\gamma(t)}(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n x'_i(t) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t)) \end{aligned}$$

Exemple

Soit $f : (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(u, v) \in \mathbb{R}$ et $\gamma : t \in \mathbb{R} \mapsto (x(t), y(t))$ sont de classe $\mathcal{C}^1$.
Montrer que $f \circ \gamma$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer $(f \circ \gamma)'(t)$

L'application, par composition,

$$t \mapsto f(x(t), y(t))$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, d'après la règle de la chaîne,

$$(f \circ \gamma)'(t) = x'(t) \frac{\partial f}{\partial u}(x(t), y(t)) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial v}(x(t), y(t))$$

II.3 Formule d'intégration

Propriété 18

Soit $f : U \subset E \rightarrow F$ une application de classe $\mathcal{C}^1$.

Si $\gamma : [0, 1] \rightarrow E$ est un arc de classe $\mathcal{C}^1$ inscrit dans U d'extrémités $a = \gamma(0)$ et $b = \gamma(1)$ alors

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 df_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt$$

Preuve:

Soit $\varphi : [0, 1] \rightarrow F$ définie par $\varphi(t) = f \circ \gamma(t)$.

Par composition la fonction φ est dérivable

$$\varphi'(t) = df_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = \sum_{i=1}^n x'_i(t) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t))$$

La fonction φ est donc de classe $\mathcal{C}^1$ et alors

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t) dt$$

Or $\varphi(1) = f(b)$, $\varphi(0) = f(a)$ et $\varphi'(t) = df_{\gamma(t)}(\gamma'(t))$.

Exemple

Si $[a, b] \subset U$ alors

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 df_{(a+t(b-a))}(b-a) dt$$

En effet, $\varphi(t) = a + t(b-a)$ définit un paramétrage de classe $\mathcal{C}^1$ du segment $[a, b]$.

Corollaire 9

Si U est un ouvert connexe par arcs et si $f : U \subset E \rightarrow F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ alors

f est constante si, et seulement si, $df = \tilde{0}$

Preuve:

On se contente du cas U convexe

II.4 Gradient

E désigne un espace vectoriel euclidien dont on note $(\cdot, \cdot)$ le produit scalaire

Propriété 19

Si $f : U \subset E \rightarrow \mathbb{R}$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ alors pour tout $a \in U$, il existe un unique vecteur dans E noté $\nabla f(a)$ et appelé gradient de f en a vérifiant

$$\forall h \in E, \quad D_h f(a) = (\nabla f(a) | h)$$

De plus, si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E alors

$$\nabla f(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) e_i$$

Preuve:

Pour tout $a \in U$, l'application $df_a \in E^*$, donc l'existence et l'unicité

Remarque :

[Interprétations géométriques] Le gradient en a est la direction de plus grande pente de f en a . En effet, pour $t > 0$ assez petit $f(a+th) \approx f(a) + t \langle \text{grad} f(a), h \rangle$. Elle sera maximale lorsque $h = \text{grad} f(a)$ et minimale lorsque $h = -\text{grad} f(a)$. Le vecteur $(\text{grad} f(a), -1)$ est normal au plan tangent à l'hypersurface $y = f(x)$. On peut donner l'équation de la tangente à une courbe C donnée implicitement par l'équation $f(x) = 0$. Si $t \in I \rightarrow \varphi(t)$ est une paramétrisation de C . On a $\forall t \in I, \varphi(t) \in C$ donc $\forall t \in I, f(\varphi(t)) = 0$ d'où $\forall t \in I, (f \circ \varphi)'(t) = 0$. Or $(f \circ \varphi)'(t) = df(\varphi(t))(\varphi'(t)) = \langle \text{grad} f(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle$ donc $\langle \text{grad} f(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle = 0$. $\varphi'(t)$ est un vecteur tangent à la courbe au point $\varphi(t)$ donc le vecteur $\text{grad} f(\varphi(t))$ est le vecteur normal à C au point $\varphi(t)$.

Exemple

Cherchons l'équation de la tangente à l'ellipse $\mathcal{H} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ au point $(x_0, y_0) \in \mathcal{H}$.

On pose $f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$. On a $\text{grad} f(x_0, y_0) = \left(\frac{2x_0}{a^2}, \frac{2y_0}{b^2} \right)$ donc la tangente T à $\mathcal{H}$ en (x_0, y_0) est $(x - x_0) \frac{x_0}{a^2} + (y - y_0) \frac{y_0}{b^2} = 0$. D'où $T : \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

Propriété 20

Si U est convexe et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $a, b \in U$ et $M = \sup_{x \in [a, b]} \|\nabla f(x)\|$. Alors

$$|f(b) - f(a)| \leq M \|b - a\|$$

Preuve:

Soit $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto f(a + t(b - a))$.

$\varphi(0) = f(a)$, $\varphi(1) = f(b)$ et φ est de classe $\mathcal{C}^1$.

D'après le TAF il existe $c \in]0, 1[$ tel que $\varphi'(1) - \varphi(0) = \varphi'(c)$. Or

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \sum_{i=1}^n (b_i - a_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + t(b - a)) \\ &= \langle \nabla f(a + t(b - a)), (b - a) \rangle \end{aligned}$$

Avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned} |\varphi'(t)| &= |\langle \nabla f(a + t(b - a)), (b - a) \rangle| \\ &\leq \|\nabla f(a + t(b - a))\| \cdot \|b - a\| \leq M \|b - a\| \end{aligned}$$

Par l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction φ

$$|\varphi(1) - \varphi(0)| \leq M \|b - a\|$$

soit

$$|f(b) - f(a)| \leq M \|b - a\|$$

Conséquence 1

Si U est convexe et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors

$$f \text{ est constante} \iff \nabla f = 0$$

III Dérivées d'ordres supérieurs

III.1 Dérivées d'ordres supérieurs

Notation :

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, on note :

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_i^k}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_i^{k-1}}(x) \right).$$

Pour $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{N}^*$ tels que $\alpha_1 + \dots + \alpha_p = k$ et $i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, n\}$, on note :

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}^{\alpha_1} \dots \partial x_{i_p}^{\alpha_p}}(x) = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_{i_1}^{\alpha_1}} \left(\frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_{i_2}^{\alpha_2}} \left(\dots \left(\frac{\partial^{\alpha_p} f}{\partial x_{i_p}^{\alpha_p}}(x) \right) \dots \right) \right).$$

Définition 7

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On appelle dérivée partielle d'ordre k de f en a tout vecteur $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}^{\alpha_1} \dots \partial x_{i_p}^{\alpha_p}}(a)$, lorsqu'il existe, de F où $i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, n\}$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{N}^*$ tels que $\alpha_1 + \dots + \alpha_p = k$. Toute application de la forme $x \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}^{\alpha_1} \dots \partial x_{i_p}^{\alpha_p}}(x)$ où $i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, n\}$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{N}^*$ tels que $\alpha_1 + \dots + \alpha_p = k$, lorsqu'elle est définie sur U , s'appelle application dérivée partielle d'ordre k de f sur U .

Exemple

Pour $f(x, y, z) = x^2 y^4 z$ on a $\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^2 \partial z}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial}{\partial z} x^2 y^4 z \right) \right) = 24xy^2$.

Définition 8: Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

- On dit que $f : U \subset E \rightarrow F$ est de classe $\mathcal{C}^k$ (dans la base $\mathbb{B}$) si les dérivées partielles d'ordre k de f dans la base B existent et sont continues.
- On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si f est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Remarque :

Les applications de classe $\mathcal{C}^0$ correspondent aux applications continues.

Exemple

Les applications constantes sont $\mathcal{C}^\infty$.

Exemple

Les application linéaires sont $\mathcal{C}^\infty$ car leurs dérivées partielles sont constantes.

En effet pour une application linéaire f , $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = df_a(e_j) = f(e_j)$.

Propriété 21

Si $f : U \subset E \rightarrow F$ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ alors f est de classe $\mathcal{C}^k$.

Preuve:

Si f est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ alors les dérivées partielles d'ordre k de f existent et sont de classe $\mathcal{C}^1$ donc continues.

Propriété 22

Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On a équivalence entre :

1. f est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$;
2. les dérivées partielles de f existent et sont de classe $\mathcal{C}^k$.

Preuve:

Les dérivées partielles d'ordre $k+1$ de f sont les dérivées partielles d'ordre k des dérivées partielles de f .

Notation :

- On note $\mathcal{C}^k(U, F)$ avec $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ l'ensemble des fonctions de U vers F de classe $\mathcal{C}^k$ sur U .
- $\mathcal{C}^k(U, \mathbb{R})$ se note tout simplement $\mathcal{C}^k(U)$.
- $\mathcal{C}^{k+1}(U, F) \subset \mathcal{C}^k(U, F)$ et $\mathcal{C}^\infty(U, F) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^k(U, F)$

Propriété 23

L'ensemble $\mathcal{C}^k(U, F)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ de U vers F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(U, F)$.

Preuve:

Par récurrence pour $k \in \mathbb{N}$.

- Pour $k = 0$: ok
- Supposons la propriété établie au rang $k \geq 0$.

Soient f et g de classe $\mathcal{C}^{k+1}$. f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ donc $\lambda f + g$ aussi et pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\frac{\partial(\lambda f + g)}{\partial x_j} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_j} + \frac{\partial g}{\partial x_j}$.

Puisque $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ et $\frac{\partial g}{\partial x_j}$ sont de classe $\mathcal{C}^k$, on obtient $\frac{\partial(\lambda f + g)}{\partial x_j}$ de classe $\mathcal{C}^k$ en vertu de l'hypothèse de récurrence.

Ainsi les dérivées partielles de $\lambda f + g$ existent et sont de classe $\mathcal{C}^k$ donc $\lambda f + g$ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$.

Récurrence établie.

Pour $k = \infty$.

Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ alors f et g sont de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et donc $\lambda f + g$ aussi.

Corollaire 10

La notion de fonction de classe $\mathcal{C}^k$ ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{B}$.

Preuve:

Par récurrence pour $k \in \mathbb{N}$.

- Pour $k = 0$: ok
- Supposons la propriété établie au rang $k \geq 0$.

Supposons f de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$. Les dérivées partielles $D_1 f, \dots, D_p f$ de f dans $\mathcal{B}$ existent et sont de classe $\mathcal{C}^k$.

Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_p)$ une autre base de E , notons $D'_1 f, \dots, D'_p f$ les dérivées partielles de f dans $\mathcal{B}'$. Celles-ci sont des combinaisons linéaires des dérivées partielles $D_1 f, \dots, D_p f$.

En effet puisque f est au moins de classe $\mathcal{C}^1$, f est différentiable et donc $D'_j f(a) = df_a(e'_j) = \sum_{i=1}^p a_{i,j} D_i f(a)$ en posant

$e'_j = \sum_{i=1}^p a_{i,j} e_i$. Puisque les dérivées partielles dans $\mathcal{B}$ sont de classe $\mathcal{C}^k$ dans $\mathcal{B}$, par combinaison linéaire, les dérivées partielles dans $\mathcal{B}'$ sont de classe $\mathcal{C}^k$ dans $\mathcal{B}$ et donc dans $\mathcal{B}'$ par hypothèse de récurrence.

On en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Récurrence établie.

Pour $k = \infty$: ok

Propriété 24

Soient $f : U \subset E \longrightarrow F$, $g : U \subset E \longrightarrow G$ et $B : F \times G \longrightarrow H$ bilinéaire.

Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^k$ alors $B(f, g)$ l'est aussi.

Preuve:

Par récurrence pour $k \in \mathbb{N}$.

- Pour $k = 0$: ok car l'application bilinéaire b est continue.
- Supposons la propriété établie au rang $k \geq 0$.

Soient f et g de classe $\mathcal{C}^{k+1}$.

f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ donc $B(f, g)$ aussi et pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $D_j B(f, g) = B(\frac{\partial f}{\partial x_j}, g) + B(f, \frac{\partial g}{\partial x_j})$.

Puisque $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ et $\frac{\partial g}{\partial x_j}$ sont de classe $\mathcal{C}^k$ et puisque f, g sont aussi de classe $\mathcal{C}^k$, on peut affirmer que $D_j B(f, g)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ en vertu de l'hypothèse de récurrence.

Ainsi les dérivées partielles de $B(f, g)$ existent et sont de classe $\mathcal{C}^k$ donc $B(f, g)$ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$.

Récurrence établie.

Pour $k = \infty$: ok.

Corollaire 11

Si F est une algèbre alors $\mathcal{C}^k(U, F)$ est une sous-algèbre de F^U

Exemple

Les fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}^p$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exemple

L'application $\det : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ par somme et produit de fonctions $\mathcal{C}^\infty$.

Propriété 25

Soit $f : U \subset E \rightarrow F$. On a équivalence entre :

1. f est de classe $\mathcal{C}^k$;
2. les fonctions composantes de f dans une base de F sont de classe $\mathcal{C}^k$.

Preuve:

Notons $f_1, \dots, f_n$ les fonctions coordonnées de f dans une base $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_n)$. On démontre l'équivalence par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ sachant que pour une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ on a $(\frac{\partial f}{\partial x_j})_i = D_j(f_i)$

Exemple

$f : (x, y) \mapsto (x^2 + y^2, xy)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Propriété 26

Soient $f : U \subset E \rightarrow F$ et $g : V \subset F \rightarrow G$ telles que $f(U) \subset V$.

Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^k$ alors $g \circ f$ l'est aussi.

Preuve:

Par récurrence pour $k \in \mathbb{N}$.

- Pour $k = 0$: ok
- Supposons la propriété établie au rang $k \geq 0$.

Soient f et g de classe $\mathcal{C}^{k+1}$.

f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ donc $g \circ f$ aussi et pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $D_j(g \circ f)(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) D_i g(f(a))$ en notant $f_1, \dots, f_n$ les fonctions composantes dans une base de F .

Puisque $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ et $\frac{\partial g}{\partial x_j}$ sont de classe $\mathcal{C}^k$ et puisque f est aussi de classe $\mathcal{C}^k$, on peut affirmer que $D_j(g \circ f)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ en vertu de l'hypothèse de récurrence et des théorèmes d'opérations.

Ainsi les dérivées partielles de $g \circ f$ existent et sont de classe $\mathcal{C}^k$ donc $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$.

Récurrence établie.

Pour $k = \infty$: ok.

Exemple

Les fonctions rationnelles sur $\mathbb{R}^p$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exemple

$F(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ définit une fonction $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$.

III.2 Théorème de Schwarz

Lemme 1

Si U un voisinage ouvert de $(0,0)$ et $f \in C^2(U, F)$. Alors :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

Preuve:

Soit $\varepsilon > 0$.

On a $f \in C^2(U, F)$ donc $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ est continue en $(0,0)$ d'où $\exists \alpha > 0$,

$$\forall |x| < \alpha, \forall |y| < \alpha, \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \right\| \leq \varepsilon$$

On pose $\varphi(x) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - x \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$. On a

$$\forall |x| < \alpha, \|\varphi'(x)\| = \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \right\| \leq \varepsilon$$

donc, d'après l'inégalité des accroissements finis $\|\varphi(x) - \varphi(0)\| \leq \varepsilon|x|$ d'où

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - x \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, y) \right\| \leq \varepsilon|x|$$

On pose $\psi(y) = f(x, y) - xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) - f(0, y)$. On a

$$\forall |y| < \alpha, \|\psi'(y)\| = \left\| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - x \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, y) \right\| \leq \varepsilon|x|$$

donc, d'après l'inégalité des accroissements finis, $\|\psi(y) - \psi(0)\| \leq \varepsilon|xy|$. On déduit que

$$\forall |x| < \alpha, \forall |y| < \alpha, \left\| f(x, y) - xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) - f(0, y) - f(x, 0) + f(0, 0) \right\| \leq \varepsilon|xy|$$

De même, en utilisant la continuité de $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ en $(0,0)$ on obtient :

$$\exists \beta > 0, \forall |x| < \beta, \forall |y| < \beta, \left\| f(x, y) - xy \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) - f(x, 0) - f(0, y) + f(0, 0) \right\| \leq \varepsilon|xy|$$

Donc, pour $\gamma = \min(\alpha, \beta)$, on obtient $\forall |x| < \gamma, \forall |y| < \gamma$,

$$\left\| f(x, y) - xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) - f(0, y) - f(x, 0) + f(0, 0) \right\| \leq \varepsilon|xy|$$

et

$$\left\| f(x, y) - xy \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) - f(x, 0) - f(0, y) + f(0, 0) \right\| \leq \varepsilon|xy|$$

donc

$$\forall |x| < \gamma, \forall |y| < \gamma, \left\| xy \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) - xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \right\| \leq \varepsilon|xy|$$

On déduit que

$$\left\| \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \right\| \leq \varepsilon$$

d'où

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$$

Théorème 2

[Théorème de Schwarz] Soit $f \in C^2(U, F)$. Alors :

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Preuve:

Soient $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base de E et $a \in U$.

On pose $g(x, y) = f(a + xe_i + ye_j)$ donc g est $\mathcal{C}^2$ au voisinage de $(0, 0)$.

On a $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + xe_i + ye_j)$ donc $\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a + xe_i + ye_j)$.

De même, $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a + xe_i + ye_j)$.

Donc $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0, 0) = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$ d'après le lemme précédent.

Remarque :

Pour montrer que $f \notin C^2(U, F)$ il suffit de vérifier que $\exists i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.

Exemple

On considère l'application $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{Si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x, 0) = f(0, x) = 0$ donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

On a $\forall (x, y) \neq (0, 0)$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{(3x^2y - y^3)(x^2 + y^2) - 2x(x^3y - y^3x)}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{3x^4y + 3x^2y^3 - x^2y^3 - y^5 - 2x^4y + 2x^2y^3}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

Or $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = -f(y, x)$ donc $\forall (x, y) \neq (0, 0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial f}{\partial x}(y, x) = \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2}$$

On a $\forall y \in \mathbb{R}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = -y$ donc $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = -1$.

De même $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = x$ donc $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$.

On a $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ donc, d'après le théorème de Schwarz, f n'est pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

III.3 Développement de Taylor-Young d'ordre 2**Propriété 27**

Soit $f \in \mathcal{C}^2(U)$. Alors $\forall h \in E$ tel que $a + h \in U$ on a :

$$f(a + h) = f(a) + df_a(h) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) + o_0(\|h\|^2).$$

Preuve:

Soit a un élément de l'ouvert U . Il existe une boule centrée en a incluse dans U . Pour $h \in E$ suffisamment petit, on a

$$\forall t \in [0, 1], \quad a + t.h \in U$$

Considérons alors $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = f(a + t.h)$.

φ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^2$ par composition. Par la formule de Taylor reste-intégrale

$$\begin{aligned} \varphi(1) &= \varphi(0) + \varphi'(0) + \int_0^1 (1-t) \varphi''(t) dt \\ &= \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2} \varphi''(0) + \int_0^1 (1-t) (\varphi''(t) - \varphi''(0)) dt \end{aligned}$$

Or

$$\varphi(1) = f(a + h), \varphi(0) = f(a)$$

et

$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + t.h)$$

donc

$$\varphi'(0) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

et enfin

$$\varphi''(t) = \sum_{i,j=1}^n h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a + t.h)$$

et

$$\varphi''(0) = \sum_{i,j=1}^n h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$$

Il reste à montrer

$$\int_0^1 (1-t) (\varphi''(t) - \varphi''(0)) dt = o(\|h\|^2)$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité des dérivées partielles d'ordre 2 en a , il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$:

$$\|k\| \leq \alpha \Rightarrow \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a + k) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right| < \varepsilon$$

On a alors

$$\|h\| \leq \alpha \Rightarrow \forall t \in [0, 1], \quad \|\varphi''(t) - \varphi''(0)\| \leq n^2 \varepsilon \|h\|^2$$

car $k = t.h$ vérifie $\|k\| \leq \alpha$. Par suite

$$\left| \int_0^1 (1-t) (\varphi''(t) - \varphi''(0)) dt \right| \leq \frac{n^2}{2} \varepsilon \|h\|^2$$

Ainsi

$$\int_0^1 (1-t) (\varphi''(t) - \varphi''(0)) dt = o(\|h\|^2)$$

Remarque :

[Interprétation matricielle] On pose $\mathcal{H}_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{i,j}$. Alors : La matrice $\mathcal{H}_f(a)$ s'appelle la matrice Hessienne de f en a . D'après le théorème de Schwarz elle est symétrique.

$$f(a + h) = f(a) + J_f(a)h + \frac{1}{2} {}^t h H_f(a) h + o(\|h\|^2).$$

Définition 9: Notation de Monge

Cas particulier : $\dim(E) = 2$.

Soit $f \in \mathcal{C}^2(U)$, on note :

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b), q = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b), r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b), s = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) \text{ et } t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b).$$

Remarque :

Le développement de Taylor-Young en d'ordre 2 en (a, b) est

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + ph + qk + \frac{1}{2}(rh^2 + 2shk + tk^2) + o(\|(h, k)\|^2)$$

Exemple

Soit la fonction $f(x, y) = x \sin y$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

On a $J_f(a, b) = \begin{pmatrix} \sin b & a \cos b \end{pmatrix}$ et $\mathcal{H}_f(a, b) = \begin{pmatrix} 0 & \cos b \\ \cos b & -a \sin b \end{pmatrix}$. Donc $\forall (h, k) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + h \sin b + k a \cos b + h k \cos b - \frac{1}{2} a k^2 \sin b + o(\|(h, k)\|^2)$$

IV Fonctions numériques

Les fonctions étudiées sont supposées à valeurs réelles.

IV.1 Applications aux extrémums**Définition 10**

Soit $f : U \subset E \rightarrow \mathbb{R}$.

On dit que f admet un minimum (global) en $a \in U$ si

$$\forall x \in U, \quad f(x) \geq f(a)$$

On dit que f admet un minimum local en $a \in U$ si

$$\exists \alpha > 0, \quad \forall x \in U \cap B(a, \alpha), f(x) \geq f(a)$$

Remarque :

Les extrémums globaux sont a fortiori des extrémums locaux.

Définition 11

On dit qu'une application $f : U \subset E \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ admet un point critique en $a \in U$ si $df_a = 0$.

Propriété 28

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E , $f : U \subset E \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $a \in U$.

On a équivalence entre :

1. a est point critique de f ;
2. $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.

Preuve:

$$1 \Rightarrow 2) \quad \text{Via } \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = df_a(e_i).$$

$$2 \Rightarrow 1) \quad \text{Via pour tout } h = \sum_{i=1}^n h_i e_i \in E, \quad df_a(h) = \sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

Propriété 29

Si $f : U \subset E \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ admet un extremum local en $a \in U$ alors a est point critique de f .

Preuve:

Cas a minimum local :

Il existe $\alpha > 0$ tel que $B(a, \alpha) \subset U$ et $\forall x \in B(a, \alpha), f(x) \geq f(a)$.

Pour tout $h \in E$, $df_a(h) = D_h f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(a+th) - f(a))$.

Pour $t > 0$ suffisamment proche de 0, $a+th \in B(a, \alpha)$ et $\frac{1}{t} (f(a+th) - f(a)) \geq 0$ donc à la limite $df_a(h) \geq 0$.

On obtient de façon semblable $df_a(h) \leq 0$.

Ainsi $df_a(h) = 0$ pour tout $h \in E$.

Attention

- La réciproque n'est pas vraie.
- Ce résultat ne s'applique qu'à une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur un ouvert.

Exemple

Considérons $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy + 1$.

Chercher les extrémums de f

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$

Points critiques : On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x + 2y$. Le système

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \iff x = y = 0$$

Étude en $(0, 0)$: Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$f(x, y) - f(0, 0) = x^2 + y^2 + xy \geq 0$$

Donc $(0, 0)$ est un minimum global.

Propriété 30: Extrémums en dimension 2

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2(U)$ qui admet un point critique a . Alors :

1. Si $s^2 - rt < 0$ et $r > 0$ alors f admet un minimum local stricte en a .
2. Si $s^2 - rt < 0$ et $r < 0$ alors f admet un maximum local stricte en a .
3. Si $s^2 - rt > 0$ alors a n'est pas un extrémum (On dit aussi a est un point col de f)
4. Si $s^2 - rt = 0$ on ne peut pas conclure

Preuve:

Dans le cas $s^2 - rt < 0$ et $r > 0$.

Avec les notations de Monge, on a $p = q = 0$ et pour tout $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

$$f(a + h) = f(a) + \frac{1}{2} (rh_1^2 + 2sh_1h_2 + th_2^2) + o(\|(h_1, h_2)\|^2)$$

Soit

$$f(a + h) - f(a) = \frac{1}{2} (rh_1^2 + 2sh_1h_2 + th_2^2) + o(\|(h_1, h_2)\|^2)$$

Or

$$rh_1^2 + 2sh_1h_2 + th_2^2 = r \left[\left(h_1 + \frac{s}{r} h_2 \right)^2 + \frac{rt - s^2}{r^2} h_2^2 \right]$$

Le second membre est positif et il ne s'annule qu'en $(0, 0)$. Donc f admet un minimum local stricte en a .

Exemple

Considérons $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

Chercher les extrémums de f

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$

Points critiques : On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3y$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 3x$. Le système

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x^2 \\ x^4 = x \end{cases} \iff \begin{cases} y = x^2 \\ x = 1 \text{ ou } x = 0 \end{cases}$$

$(0, 0)$ et $(1, 1)$ sont les seuls points critiques

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} f(x, y) = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} f(x, y) = -3 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} f(x, y) = 6y$$

Étude en $(0, 0)$: $r = 0$, $s = -3$, $t = 0$ et $s^2 - rt = 9 > 0$. Il n'y a pas d'extrémum local

Étude en $(1, 1)$: $r = 6, s = -3, t = 6$ et $s^2 - rt < 0$ et $r > 0$. Il y a minimum local.

Exemple

Extrema de l'application $f(x, y) = (1 - x^2)(1 - y^2)$.

Recherche des points critiques de f : Les points critiques de f sont les solutions du système
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}.$$

Donc
$$\begin{cases} -2x(1 - y^2) = 0 \\ -2y(1 - x^2) = 0 \end{cases}.$$
 Les points critiques de f sont alors $(0, 0), (1, 1), (-1, 1), (1, -1)$ et $(-1, -1)$. On a $f(x, y) = f(-x, y) = f(x, -y) = f(-x, -y)$ donc les points critiques $(1, 1), (-1, 1), (1, -1)$ et $(-1, -1)$ sont de même nature.

- Étude du point $(0, 0)$: On a $r = t = -2$ et $s = 0$, alors $s^2 - rt = -4 < 0$ et $r < 0$, donc f admet un minimum local stricte en $(0, 0)$.
- Étude des points $(1, 1), (-1, 1), (1, -1)$ et $(-1, -1)$: On a $r = t = 0$ et $s = 4$ donc $s^2 - rt = 16 > 0$. On déduit que f admet des points cols en $(1, 1), (-1, 1), (1, -1)$ et $(-1, -1)$.

IV.2 Surface représentant une fonction de deux variables réelles

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vue en les deux variables x et y .

Définition 12

On appelle surface représentative de f l'ensemble formé des $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant l'équation

$$S_f : z = f(x, y)$$

Définition 13

Si f est différentiable en (x_0, y_0) , le plan d'équation cartésienne

$$z = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

est appelé plan tangent à S_f au point (x_0, y_0, z_0) .

Exemple

Considérons la surface $z = x^2 + 2y^2$.

Une équation du plan tangent en (x_0, y_0, z_0) est

$$z = 2x_0(x - x_0) + 4y_0(y - y_0) + z_0$$

et puisque $z_0 = x_0^2 + 2y_0^2$, on peut simplifier

$$z = 2x_0x + 4y_0y - z_0$$

Définition 14

Soit a un élément d'une partie X d'un espace vectoriel réel E . On dit qu'un vecteur v de E est tangent à X en a , s'il existe $\varepsilon > 0$ et un arc γ défini sur $] -\varepsilon, \varepsilon[$ inscrit dans X vérifiant :

$$\gamma(0) = a \quad \text{et} \quad \gamma'(0) = v$$

Lorsque le vecteur v est non nul, on dit que la droite $a + \text{Vect}(v)$ est tangente à X en a .

Théorème 3

Si f est différentiable en (x_0, y_0) alors les tangentes à S_f au point (x_0, y_0, z_0) sont toutes incluses dans le plan tangent à S_f en (x_0, y_0, z_0) .

Preuve:

Soit T une tangente à S_f en (x_0, y_0, z_0) . Il existe $v \in \mathbb{R}^3$ non nul et un arc $\gamma : t \mapsto \gamma(x(t), y(t), z(t))$ défini sur $] -\varepsilon, \varepsilon[$ inscrit dans S_f vérifiant

$$\gamma(0) = (x_0, y_0, z_0) \quad \text{et} \quad \gamma'(0) = v = (x'(0), y'(0), z'(0))$$

Puisque $z(t) = f(x(t), y(t))$, on obtient par dérivation en 0

$$z'(0) = x'(0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + y'(0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Les éléments de la droite T sont alors de coordonnées

$$\begin{cases} x &= x_0 + \lambda x'(0) \\ y &= y_0 + \lambda y'(0) \\ z &= z_0 + \lambda z'(0) \end{cases}$$

vérifiant l'équation du plan proposée.

Remarque :

On peut aussi montrer que le plan tangent est exactement la réunion des droites tangentes à S_f en (x_0, y_0, z_0) .

IV.3 Équations aux dérivées partielles

Soit I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$ ouverts non vides.

Propriété 31

Soit $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$. Alors

$$f : (x, y) \mapsto C(y) \quad \text{avec } C \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{R})$$

Preuve:

Soit $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$$

Soit $y \in J$ fixé. L'application partielle $x \mapsto f(x, y)$ a pour dérivée $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$.

L'application partielle $x \mapsto f(x, y)$ est donc de dérivée nulle sur l'intervalle I , c'est donc une fonction constante. Ainsi, il existe $C_y \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in I, \quad f(x, y) = C_y$$

Considérons alors $C : J \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $C(y) = C_y$.

On définit ainsi une application $C : J \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall (x, y) \in I \times J, \quad f(x, y) = C(y)$$

Soit $x_0 \in I$ fixé. La composition $y \mapsto (x_0, y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, donc C est une fonction $\mathcal{C}^1$.

Inversement, les fonctions proposées sont évidemment solutions.

Exemple

Résolvons sur $\mathbb{R}^2$ l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = x^2 y$

Soit h la fonction définie par $h(x, y) = f(x, y) - \frac{1}{3}x^3 y$, on a h est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = 0$, donc il existe une fonction C de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $h(x, y) = C(y)$. Ainsi $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 y + C(y)$

Propriété 32

Soit $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 0$. Alors

$$f : (x, y) \mapsto xC(y) + D(y) \quad \text{avec } C, D \in \mathcal{C}^2(J, \mathbb{R})$$

Preuve:

Soit $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 0$$

- **Existence** : il existe une fonction C de classe $\mathcal{C}^1$ sur J telle que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = C(y)$. On pose en suite $h(x, y) = f(x, y) - xC(y)$, alors h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \times J$ et elle vérifie $\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = 0$, donc il existe $D \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{R})$ telle que $h(x, y) = D(y)$, soit $f(x, y) = xC(y) + D(y)$.

- Montrons que D est effectivement de classe $\mathcal{C}^2$?

Soit a, b deux valeurs distinctes de I , le système $\begin{cases} f(a, y) = aC(y) + D(y) \\ f(b, y) = bC(y) + D(y) \end{cases}$ donne $D(y) = \frac{bf(a, y) - af(b, y)}{a - b}$. Par com-

position $y \mapsto (a, y) \xrightarrow{f} f(a, y)$ et $y \mapsto (b, y) \xrightarrow{f} f(b, y)$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur J , donc D est de classe $\mathcal{C}^2$ sur J comme combinaison linéaire de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$

- Montrons que C est effectivement de classe $\mathcal{C}^2$?

Soit a un élément non nul de I , l'égalité $f(a, y) = aC(y) + D(y)$ donne $C(y) = \frac{f(a, y) - D(y)}{a}$. Par composition $y \mapsto (a, y) \xrightarrow{f} f(a, y)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur J , donc C est de classe $\mathcal{C}^2$ sur J comme combinaison linéaire de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$

Remarque :

C et D sont de même classe que f

Propriété 33

Soit $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0$. Alors

$$f : (x, y) \mapsto C(x) + D(y) \quad \text{avec } C \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}) \text{ et } D \in \mathcal{C}^2(J, \mathbb{R})$$

Preuve:

Soit $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0$$

- **Existence** : il existe une fonction d de classe $\mathcal{C}^1$ sur J telle que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = d(y)$. On pose en suite $h(x, y) = f(x, y) - D(y)$, avec D est une primitive de d sur J , alors h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \times J$ et elle vérifie $\frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = 0$, donc il existe $C \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ telle que $h(x, y) = C(x)$, soit $f(x, y) = C(x) + D(y)$.
- D est effectivement de classe $\mathcal{C}^2$ sur J , car elle est primitive d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$
- C est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I , car pour $y_0 \in J$, on a $C(x) = f(x, y_0) - D(y_0)$ et par composition $x \mapsto (x, y_0) \xrightarrow{f} f(x, y_0)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I , donc C est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I

Exemple: Équation de propagation des ondes

Soit un réel $c \neq 0$. Chercher les solutions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs réelles de l'équation aux dérivées partielles suivantes

$$c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2},$$

à l'aide d'un changement de variables de la forme $u = x + at$, $v = x + bt$.

On pose donc $f(x, y) = F(u, v)$ avec $u = x + at$ et $v = x + bt$. On a donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2ab \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + b^2 \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}.$$

L'équation devient alors :

$$(c^2 - a^2) \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2(c^2 - ab) \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + (c^2 - b^2) \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = 0.$$

En prenant $a = c$ et $b = -c$, l'équation devient

$$\frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u} = 0$$

dont la solution générale est

$$F(u, v) = \phi(u) + \psi(v)$$

avec ϕ et ψ sont C^2 . La solution générale de l'équation initiale est donc :

$$f(x, t) = \phi(x + ct) + \psi(x - ct).$$