
Espaces vectoriels normés

EL AMDAOUI Mustapha,

Lycée IBN TIMIYA,

site web: www.elamdaoui.com,

email: elamdaoui@gmail.com

Niveau: MP

Table des matières

I Norme et espaces vectoriels normés	3
I.1 Normes	3
I.2 Normes usuelles	4
I.2.1 Normes euclidiennes	4
I.2.2 Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$	6
I.2.3 Normes usuelles sur $M_{n,p}(\mathbb{K})$	6
I.2.4 Normes des convergences	6
I.2.5 Norme produit	7
I.3 Distances	7
I.4 Normes équivalentes	9
I.5 Boules	11
I.6 Bornitude	13
II Suites dans un espace vectoriel normé	15
II.1 Suites convergentes	15
II.2 Suites extraites	19
II.3 Valeurs d'adhérence	20
II.4 Suites de Cauchy	21
III Éléments de topologie	24
III.1 Voisinages	24
III.2 Ouvert	25
III.3 Intérieur d'une partie	26
III.4 Fermé	27
III.5 Adhérence d'une partie	29
III.6 Frontière	30
III.7 Densité	31
III.8 Voisinages, fermés et ouverts relatifs à une partie	31
IV Étude locale d'une application, continuité	32
IV.1 Limites	32
IV.2 Continuité	35
IV.3 Fonctions lipschitziennes	36
IV.4 Applications linéaires continues	38
IV.5 Applications multilinéaires	39
IV.6 Continuité et densité	40
IV.7 Continuité et topologie	40
V Compacts	41
V.1 Compacts	41
V.2 Image d'un compact par une fonction continue	43

V.3	Continuité uniforme	44
VI	Connexité par arcs	45
VI.1	Définition et exemples	45
VI.2	Continuité et connexité par arcs	47

Dans tout ce chapitre, E désigne un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

I Norme et espaces vectoriels normés

I.1 Normes

Définition 1: Norme

On appelle *norme* toute application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant :

1. **Séparation :**

$$\forall x \in E, \quad N(x) = 0 \iff x = 0_E$$

2. **Homogénéité :**

$$\forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad N(\alpha \cdot x) = |\alpha| \cdot N(x)$$

3. **Sous-additivité ou inégalité triangulaire :**

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad N(x + y) \leq N(x) + N(y)$$

Au quel cas on dit que (E, N) ou tout simplement E est un espace vectoriel normé.

Notation :

Les normes sont usuellement notées $N(\cdot)$, $\|\cdot\|$ ou $|\cdot|$.

Exemple

La valeur absolue sur $\mathbb{R}$ et le module sur $\mathbb{C}$ sont des normes.

Théorème 1: Espace de dimension finie

Tout espace de dimension finie est normé

Preuve:

Si E est nul, c'est fini. Sinon soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Pour $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$ où $x_k \in \mathbb{K}$, on pose $N(x) = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$. N définit une norme sur E .

Propriété 1

Soit E un espace vectoriel normé, $(\alpha_i)_{i=1}^n \in \mathbb{K}^n$ et $(x_i)_{i=1}^n \in E^n$, alors

$$\left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \cdot \|x_i\|$$

Preuve:

Par récurrence sur n

Propriété 2: Seconde inégalité triangulaire

$$\forall x, y \in E, \quad \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Définition 2: Vecteur unitaire

Un vecteur x d'un espace E normé par $\|\cdot\|$ est dit *unitaire* si $\|x\| = 1$.

Propriété 3

Si E n'est pas réduit à $\{0\}$, tout vecteur x peut s'écrire $x = \alpha u$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et $u \in E$ unitaire. Lorsque x est non nul, cette décomposition est unique et est donnée par :

$$\alpha = \|x\| \quad \text{et} \quad u = \frac{1}{\|x\|} x$$

Définition 3: Algèbre normée

Une algèbre normée est une $\mathbb{K}$ -algèbre A muni d'une norme d'espace vectoriel qui vérifie :

$$\forall x, y \in A \quad \|xy\| \leq \|x\| \|y\|.$$

En d'autres termes la norme étant en outre sous-multiplicative.

Exemple

Soit A une $\mathbb{K}$ -algèbre normée non nulle, alors $\|1_A\| \geq 1$.

Comme $\|1_A\| = \|1_A^2\| \leq \|1_A\|^2$ et $\|1_A\| \neq 0$, alors $\|1_A\| \geq 1$.

Propriété 4

Pour tout $a \in \mathbb{A}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\|a^n\| \leq \|a\|^n$

Preuve:

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$

I.2 Normes usuelles**I.2.1 Normes euclidiennes****Définition 4: Produit scalaire**

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. On appelle produit scalaire sur E toute application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

1. φ est bilinéaire
2. φ est symétrique i.e. $\forall x, y \in E, \quad \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$
3. φ est positive i.e. $\forall x \in E, \quad \varphi(x, x) \geq 0$
4. φ est définie i.e. $\forall x \in E, \quad \varphi(x, x) = 0 \implies x = 0$.

Bref un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

Notation :

Un produit scalaire φ se note $\langle \cdot, \cdot \rangle$

Définition 5: Espace préhilbertien réel

- On appelle espace préhilbertien réel tout $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}$;
- Un espace préhilbertien réel de dimension finie est dit espace euclidien.

Exemple

1. $E = \mathbb{R}^p, \varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sum_{k=1}^p x_k y_k$
2. $E = M_{n,p}(\mathbb{R}), \varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}, (A, B) \mapsto \text{Tr}({}^tAB)$.
3. $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}, (f, g) \mapsto \int_a^b f(t)g(t)dt$.

Propriété 5: Norme euclidienne

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E et $N : E \rightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$ alors :

1. **Inégalité de Cauchy-Schwarz :**

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad |\langle x, y \rangle| \leq N(x) \cdot N(y)$$

Avec égalité si et seulement si (x, y) est liée

2. Inégalité de Minkowski :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad N(x + y) \leq N(x) + N(y)$$

Avec égalité si et seulement si x et y sont positivement liés

3. N est une norme sur E dite la norme euclidienne associée à φ

Preuve:

1. ► Si $x = 0$, la propriété est immédiate avec égalité et colinéarité des vecteurs x et y .

► Si $x \neq 0$, considérons pour $\lambda \in \mathbb{R}$, le produit scalaire $\langle \lambda x + y, \lambda x + y \rangle$.

D'une part, par positivité, $\langle \lambda x + y, \lambda x + y \rangle \geq 0$.

D'autre part, par bilinéarité et symétrie,

$$\langle \lambda x + y, \lambda x + y \rangle = \lambda^2 \langle x, x \rangle + 2\lambda \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle$$

En posant $a = \langle x, x \rangle$ ($a \neq 0$ car $x \neq 0$), $b = 2 \langle x, y \rangle$ et $c = \langle y, y \rangle$, le trinôme $a\lambda^2 + b\lambda + c$ est de signe constant donc de discriminant négatif. Ainsi $b^2 - 4ac \leq 0$ ce qui donne

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$$

De plus, s'il y a égalité dans cette inégalité, le discriminant est nul et donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\langle \lambda x + y, \lambda x + y \rangle = 0$ ce qui entraîne $\lambda x + y = 0$. La famille (x, y) est alors liée.

Inversement, supposons la famille (x, y) liée. Sachant $x \neq 0$, on peut écrire $y = \lambda x$ et vérifier par bilinéarité du produit scalaire l'égalité $\langle x, y \rangle^2 = \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$.

2. Pour $x, y \in E$, on a

$$N(x + y)^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2 \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a alors :

$$N(x + y)^2 \leq N(x)^2 + 2N(x) \cdot N(y) + N(y)^2 = (N(x) + N(y))^2$$

D'où $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

3. • $\forall x \in E, \quad N(x) \geq 0$

• $\forall x \in E, \quad N(x) = 0 \implies x = 0$

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$

$$\varphi(\lambda x, \lambda x) = \lambda^2 \varphi(x, x)$$

Donc $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$

• pour $x, y \in E$, on a $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

Donc N est une norme

Exemple

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq a}}, B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq b}} \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, alors

$$|\text{Tr}({}^tAB)| \leq \sqrt{\text{Tr}({}^tAA)} \times \sqrt{\text{Tr}({}^tBB)}$$

ou encore

$$\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{ij} b_{ij} \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{ij}^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p b_{ij}^2}$$

Remarque :

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq a}}, B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq b}} \in M_{n,p}(\mathbb{C})$, alors

$$\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{ij} b_{ij} \right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |a_{ij}| |b_{ij}| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |a_{ij}|^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |b_{ij}|^2}$$

I.2.2 Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$

Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on pose

$$\begin{aligned}\|x\|_1 &:= |x_1| + \dots + |x_n| = \sum_{i=1}^n |x_i| \\ \|x\|_2 &:= \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \\ \|x\|_\infty &:= \max(|x_1|, \dots, |x_n|) = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} (|x_i|)\end{aligned}$$

Propriété 6

Les applications $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{K}^n$

Preuve:

1. Pour $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ la vérification est immédiate.
2. Pour $\|\cdot\|_2$: L'application $x \mapsto \|x\|_2$ est la norme euclidienne de la structure euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$ dans le cas réel. Elle vérifie évidemment les axiomes d'homogénéité et de séparation dans le cas complexe. On obtient la sous-additivité à partir de l'inégalité triangulaire de la norme $\|\cdot\|_2$

I.2.3 Normes usuelles sur $M_{n,p}(\mathbb{K})$

Pour $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, on pose

$$\begin{aligned}\|A\|_1 &:= \sup_{1 \leq j \leq p} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \\ \|A\|_\infty &:= \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^p |a_{i,j}| \\ \|A\|_2 &:= \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |a_{i,j}|^2}\end{aligned}$$

Propriété 7

Les applications $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $M_{n,p}(\mathbb{K})$ et lorsque $n = p$ ces normes sont sous-multiplicatives

Preuve:

1. Pour $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ la vérification est immédiate.
2. Pour $\|\cdot\|_2$: L'application $A \mapsto \|A\|_2$ est la norme euclidienne de la structure euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$ dans le cas réel. Elle vérifie évidemment les axiomes d'homogénéité et de séparation dans le cas complexe. On obtient la sous-additivité à partir de l'inégalité triangulaire de la norme $\|\cdot\|_2$

I.2.4 Normes des convergences

Soit $[a, b]$ un segment non trivial de $\mathbb{R}$ et $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$. Pour tout $f \in E$, on pose

$$\begin{aligned}\|f\|_1 &:= \int_a^b |f(t)| dt \\ \|f\|_2 &:= \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ \|f\|_\infty &:= \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|\end{aligned}$$

Propriété 8

Les applications $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$

Preuve:

1. Pour la norme $\|\cdot\|_1$: On arrive bien dans $\mathbb{R}^+$. Rappelons que l'intégrale d'une fonction continue positive est nulle si, et seulement si, il s'agit de la fonction nulle. Rappelons d'autre part que si f est continue, alors $|f|$ est continue. On

a donc démontré $\|f\|_1 = 0 \implies f = 0$. D'autre part, pour tout x de $[a, b]$, l'inégalité triangulaire de la valeur absolue donne :

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|.$$

Intégrer cette inégalité entre a et b donne l'inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|_1$. En effet, la linéarité de l'intégrale donne

$$\int_a^b |\lambda f(x)| dx = |\lambda| \int_a^b |f(x)| dx.$$

2. Pour $\|\cdot\|_2$: L'application $f \mapsto \|f\|_2$ est la norme euclidienne de la structure euclidienne canonique de $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ dans le cas réel. Elle vérifie évidemment les axiomes d'homogénéité et de séparation dans le cas complexe. On obtient la sous-additivité à partir de l'inégalité triangulaire de la norme $\|\cdot\|_2$.

$$\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2 = \|f\|_2 + \|g\|_2$$

3. Remarquons d'abord qu'une fonction continue sur $[a, b]$ est bornée (et atteint ses bornes). Ceci justifie que $\|f\|_\infty$ est bien défini pour tout $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$. De plus, on a toujours $\|f\|_\infty \geq 0$. D'autre part, si $\|f\|_\infty = 0$, alors pour tout x dans $[a, b]$, on a $f(x) = 0$, et donc $f = 0$. Étudions l'inégalité triangulaire : soient f et g deux éléments de $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$. Pour tout x de $[a, b]$, on a :

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

Passant au max, on obtient :

$$\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

Concernant l'homogénéité, prenons $\lambda \in \mathbb{R}$ et f dans $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$. Pour tout x de $[a, b]$, on a :

$$|\lambda f(x)| = |\lambda| |f(x)|,$$

et passant au max, on a bien l'égalité voulue.

Définition 6

1. $\|\cdot\|_1$ est appelée **norme de la convergence en moyenne**,
2. $\|\cdot\|_2$ est appelée **norme de la convergence en moyenne quadratique**,
3. $\|\cdot\|_\infty$ est appelée **norme de la convergence uniforme**

I.2.5 Norme produit

Propriété 9

Si $E_1, \dots, E_n$ sont de $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normés respectivement par des normes $N_1, \dots, N_n$, alors l'application

$$\|\cdot\| : \begin{cases} E_1 \times \dots \times E_n & \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x = (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto \|x\| = \max_{1 \leq i \leq n} (N_i(x_i)) \end{cases}$$

est une norme sur l'espace vectoriel produit $E_1 \times \dots \times E_n$. La norme $\|\cdot\|$ est souvent appelée norme produit.

Preuve:

Les propriétés de séparation et d'homogénéité sont immédiates. Montrons l'inégalité triangulaire.

Soit $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in E$. Alors, comme pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, N_k est une norme sur E_k , on a

$$\begin{aligned} N_k(x_k + y_k) &\leq N_k(x_k) + N_k(y_k) \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} (N_i(x_i)) + \max_{1 \leq i \leq n} (N_i(y_i)) \end{aligned}$$

Donc

$$\|x + y\| = \max_{1 \leq i \leq n} (N_i(x_i + y_i)) \leq \|x\| + \|y\|$$

I.3 Distances

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur E

Définition 7: Distance associée

On appelle distance associée à la norme $\|\cdot\|$ sur E l'application $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$\forall x, y \in E, \quad d(x, y) = \|x - y\|$$

vérifie les propriétés suivantes :

1. **Séparation** : $\forall x, y \in E, d(x, y) \Leftrightarrow x = y$;

2. **Symétrie** : $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = d(y, x)$;

3. **Inégalité triangulaire** :

$$\forall (x, y, z) \in E^3, \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

4. **Invariance par translation** :

$$\forall (x, y, z) \in E^3, \quad d(x+z, y+z) = d(x, y)$$

Corollaire 1 (Seconde inégalité triangulaire)

Pour tout $(x, y, z) \in E^3$,

$$|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z)$$

Corollaire 2

Soit $x_1, \dots, x_n \in E$, avec $n \geq 2$, alors

$$d(x_1, x_n) \leq \sum_{i=1}^{n-1} d(x_i, x_{i+1})$$

Preuve:

Par récurrence sur n

Définition 8: Distances à une partie

Soit $x \in E$ et $A \subset E$ avec A non vide. On appelle distance de x à A le réel positif

$$d(x, A) = \inf\{\|x - y\|, y \in A\}$$

Propriété 10

Soit $x \in E$ et $A \subset E$ avec A non vide. Alors

1. Pour tout $a \in A$, on a $d(x, A) \leq \|x - a\|$.
2. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$ tel que

$$\|x - a\| < d(x, A) + \varepsilon$$

3. Il existe une suite $(a_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de A telle que $\|x - a_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} d(x, A)$

Preuve:

1. Par définition de la distance de x à A .
2. D'après la caractérisation epsilonuse de la borne inférieure.
3. D'après la caractérisation séquentielle de la borne inférieure.

Exemple

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $d(x, \mathbb{Q}) = 0$.

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Par la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $|x - r| < \varepsilon$, donc $0 \leq d(x, \mathbb{Q}) < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, donc $d(x, \mathbb{Q}) = 0$

Remarque :

Si $x \in A$, alors $d(x, A) = 0$. La réciproque n'est pas vraie.

Propriété 11

Soit A une partie non vide de E . Alors

$$\forall x, y \in E, \quad |d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y) = \|x - y\|$$

Preuve:

Soit $a \in A$, on a :

$$d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$$

On en déduit :

$$d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, a)$$

pour tout a de A et, par conséquent, $d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, A)$.

On a ainsi $d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$, et, par symétrie, $d(y, A) - d(x, A) \leq d(x, y)$. Cela entraîne :

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$$

I.4 Normes équivalentes**Définition 9**

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé et N_1 et N_2 deux normes sur E .

On dit que N_1 est dominée par N_2 s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^{*+}$ tel que :

$$\forall x \in E, N_1(x) \leq \alpha N_2(x)$$

Remarque :

N_1 est dominée par N_2 si, et seulement si, $\left\{ \frac{N_1(x)}{N_2(x)} / x \in E \setminus \{0\} \right\}$ est majoré.

Définition 10: Normes équivalentes

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé et N_1 et N_2 deux normes sur E .

On dit que N_1 et N_2 sont équivalentes si N_1 est dominée par N_2 et N_2 est dominée par N_1 ou encore, $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ tels que

$$\forall x \in E, \alpha N_2(x) \leq N_1(x) \leq \beta N_2(x)$$

On note $N_1 \sim N_2$

Propriété 12

$\sim$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes sur E .

Preuve:

► $\sim$ est réflexive.

► $\sim$ est symétrique. En effet, supposons que $N_1 \sim N_2$. Alors il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ tels que

$$\alpha N_2 \leq N_1 \leq \beta N_2,$$

donc

$$\frac{1}{\beta} N_1 \leq N_2 \leq \frac{1}{\alpha} N_1,$$

puis $N_2 \sim N_1$.

► $\sim$ est transitive. En effet, supposons que $N_1 \sim N_2$ et $N_2 \sim N_3$. Alors il existe $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}_+^*$ tels que

$$\alpha N_2 \leq N_1 \leq \beta N_2 \text{ et } \gamma N_3 \leq N_2 \leq \delta N_3$$

donc

$$\alpha \cdot \gamma \cdot N_3 \leq \alpha \cdot N_2 \leq N_1 \leq \beta \cdot N_2 \leq \delta \cdot \beta \cdot N_3$$

puis $N_1 \sim N_3$

Propriété 13: Comparaison des normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$

Pour tout $x \in \mathbb{K}^n$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$$

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2$$

Preuve:

► En effet $\|x\|_\infty = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} (|x_i|) \leq \sum_{i=1}^n |x_i| = \|x\|_1$ et

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \leq n \|x\|_\infty. \text{ Donc}$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty$$

► En effet $\|x\|_\infty^2 = \max_{i \in \{1, n\}} (|x_i|^2) \leq \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = \|x\|_2^2$ et

$$\|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \leq n \|x\|_\infty^2. \text{ Donc}$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$$

► En effet $\|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i| \right)^2 = \|x\|_1^2$ et

$\|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Propriété 14

Soit N_1 et N_2 deux normes sur E . Alors les assertions suivantes sont équivalentes

1. $N_1 \sim N_2$
2. $\left\{ \frac{N_1(x)}{N_2(x)}, x \in E \setminus \{0\} \right\}$ et $\left\{ \frac{N_2(x)}{N_1(x)}, x \in E \setminus \{0\} \right\}$ sont majorés.

Preuve:

Évidente

Méthode: Pour montrer que les deux normes N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes ?

On cherche une suite $(x_n) \in E^\mathbb{N}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{N_2(x_n)}{N_1(x_n)} = +\infty$ ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{N_2(x_n)}{N_1(x_n)} = 0$.

Exemple

Montrons que les normes N_1 , N_2 et N_∞ ne sont pas équivalentes sur $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$

Considérons la suite $t \mapsto t^n$.

Soit la suite de fonctions : $f_n : t \mapsto t^n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est positive, croissante sur $[0, 1]$ donc $N_\infty(f_n) = f_n(1) = 1$.

On a

$$N_1(f_n) = \int_0^1 f_n(t) dt = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$$

et

$$N_2^2(f_n) = \int_0^1 f_n(t)^2 dt = \int_0^1 t^{2n} dt = \frac{1}{2n+1}$$

On déduit que $N_2(f_n) = \sqrt{\frac{1}{2n+1}}$.

- $\frac{N_1(f_n)}{N_\infty(f_n)} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc N_1 et N_∞ ne sont pas équivalents.
- $\frac{N_1(f_n)}{N_2(f_n)} = \sqrt{\frac{2n+1}{(n+1)^2}} \sim \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc N_1 et N_2 ne sont pas équivalents.
- On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{N_\infty(f_n)}{N_2(f_n)} = \frac{n}{\sqrt{\frac{2n}{3}}} = \sqrt{\frac{3n}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ donc N_∞ et N_2 ne sont pas équivalents.

Théorème 2: de Riesz

Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Preuve:

Ce résultat est admis

Exemple

1. Toutes les normes de $\mathbb{K}^n$ sont équivalentes.
2. Toutes les normes de $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ sont équivalentes.
3. Si E et F sont deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies alors toutes les normes sur $\mathcal{L}(E, F)$ sont équivalentes.

I.5 Boules**Définition 11: Boules et sphères**

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé. Soit $a \in E$, $r \in \mathbb{R}_+^*$.

- On appelle boule ouverte de centre a de rayon r l'ensemble :

$$B(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| < r\}$$

- On appelle boule fermée de centre a de rayon r l'ensemble :

$$B_f(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| \leq r\}$$

On la note encore $\bar{B}(a, r)$.

- On appelle sphère de centre a et de rayon r l'ensemble :

$$S(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| = r\}$$

Les boules de centre 0 et de rayon 1, sont appelées boules unités.

Remarque :

$S(a, r) = B_f(a, r) \setminus B(a, r)$ et $B_f(a, r) = B(a, r) \cup S(a, r)$ est une union disjointe

Exemple

Dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$:

- $B(a, r) =]a - r, a + r[$;
- $B_f(a, r) = [a - r, a + r]$;
- $S(a, r) = \{a - r, a + r\}$.

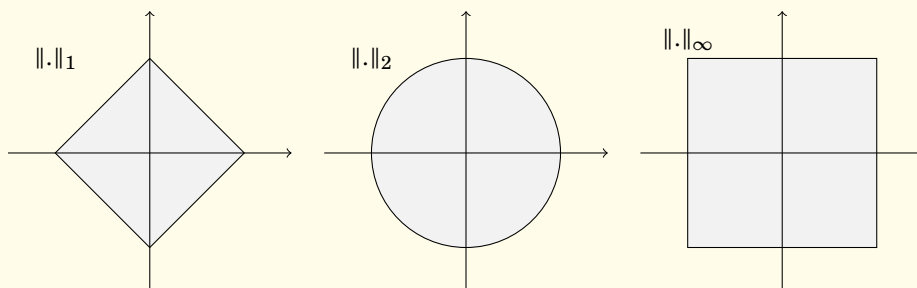
Exemple

Dans $(\mathbb{C}, |\cdot|)$:

- $B(a, r) = \{x \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}$ le disque ouvert de centre a et de rayon r ;
- $B_f(a, r) = \{x \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leq r\}$ le disque fermé de centre a et de rayon r ;
- $S(a, r) = \{x \in \mathbb{C} \mid |z - a| = r\}$ est le cercle de centre a et de rayon r .

Exemple

Boules unités fermées sur $E = \mathbb{R}^2$



Propriété 15

Soit $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$, alors

$$B(a, r) = a + rB(0, 1), \quad B_f(a, r) = a + rB_f(0, 1) \quad \text{et} \quad S(a, r) = a + rS(0, 1)$$

Preuve:

Soit $x \in B(a, r)$, alors $\|x - a\| < r$, soit $u = \frac{1}{r}(x - a)$. On a $u \in B(0, 1)$ et $x = a + ru$.

Inversement, si $x = a + ru$ avec $u \in B(0, 1)$, alors $\|x - a\| = \|ru\| = r\|u\| < r$

Remarque :

Ainsi les boules générales se déduisent des boules unités par homothéties et translations.

Définition 12: Partie convexe

Une partie $A \subset E$ est convexe si et seulement si pour tout $a, b \in A$, $[a, b] \in A$.

Avec $[a, b] = \{ta + (1-t)b \mid t \in [0, 1]\}$

Propriété 16

Les boules ouvertes et fermées de E sont des parties convexes de E .

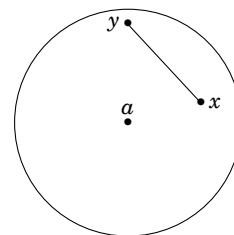
Preuve:

Soit $x, y \in B(a, r)$, on pose $[x, y] = \{\lambda x + (1-\lambda)y \mid \lambda \in [0, 1]\}$.

Soit $z \in [x, y]$, alors il existe $\lambda \in [0, 1]$ tel que $z = \lambda x + (1-\lambda)y$. On a alors

$$\begin{aligned} \|z - a\| &= \|\lambda x + (1-\lambda)y - (\lambda a + (1-\lambda)a)\| \\ &\leq \lambda\|x - a\| + (1-\lambda)\|y - a\| \\ &< \lambda r + (1-\lambda)r = r \end{aligned}$$

Donc $B(a, r)$ est convexe.

**Exemple: Jeu de boules**

Soit $a, b \in E$ et $r_a, r_b \in \mathbb{R}_+^*$. Montrons que

$$B(a, r_a) \subset B(b, r_b) \iff (r_a \leq r_b \text{ et } \|b - a\| \leq r_b - r_a)$$

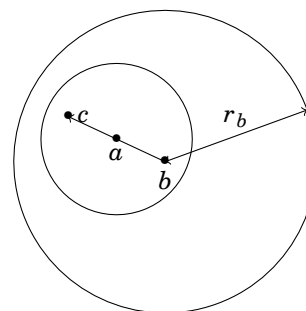
$\Leftarrow$) Soit $x \in B(a, r_a)$, alors $\|x - a\| < r_a$. Par l'inégalité triangulaire, on a

$$\|x - b\| \leq \|x - a\| + \|a - b\| < r_a + (r_b - r_a) = r_b$$

$\Rightarrow$) Si $a = b$ rien à démontrer. Sinon pour $\varepsilon > 1$, on pose $c = a + \frac{r_a}{\varepsilon} \cdot \frac{a - b}{\|a - b\|}$
(point de $B(a, r_a)$ loin de b), alors $c \in B(a, r_a)$, car $\|c - a\| = \frac{r_a}{\varepsilon} < r_a$.
Comme $B(a, r_a) \subset B(b, r_b)$, alors $\|c - b\| < r_b$, ce qui donne

$$\|b - a\| + \frac{r_a}{\varepsilon} < r_b,$$

soit $\|b - a\| < r_b - \frac{r_a}{\varepsilon}$. On fait ensuite tendre ε vers 1, on obtient
 $\|b - a\| \leq r_b - r_a$

**Propriété 17: Caractérisation de l'équivalence par les boules ouvertes (MP*)**

Les normes N_1 et N_2 sont équivalentes si, et seulement si,

$$\exists \alpha, \beta > 0, \quad B_{N_1}(0, \alpha) \subset B_{N_2}(0, 1) \subset B_{N_1}(0, \beta).$$

Où $B_{N_i}(0, r)$ désigne la boule ouverte de centre 0 et de rayon r pour la norme N_i .

Preuve:

$\Rightarrow$) Si $N_1 \sim N_2$, alors il existe $\alpha, \beta > 0$, tels que

$$\alpha N_2 \leq N_1 \leq \beta N_2.$$

Soit $x \in B_{N_2}(0, 1)$ donc $N_2(x) < 1$ donc $\beta N_2(x) < \beta$ d'où $N_1(x) < \beta$. On en déduit que $x \in B_{N_1}(0, \beta)$ d'où $B_{N_2}(0, 1) \subset B_{N_1}(0, \beta)$. Inversement si $x \in B_{N_1}(0, \alpha)$ donc $\alpha N_2(x) \leq N_1(x) < \alpha$ d'où $N_2(x) < 1$. On déduit que $x \in B_{N_2}(0, 1)$ d'où $B_{N_1}(0, \alpha) \subset B_{N_2}(0, 1)$.

$\Leftarrow$) Supposons qu'il existe $\alpha, \beta > 0$, tels que

$$B_{N_1}(0, \alpha) \subset B_{N_2}(0, 1) \subset B_{N_1}(0, \beta).$$

Soit $x \in E \setminus \{0\}$ et $\varepsilon > 1$. On a $N_2\left(\frac{1}{\varepsilon N_2(x)}x\right) = \frac{1}{\varepsilon} < 1$ donc $\frac{1}{\varepsilon N_2(x)}x \in B_{N_2}(0, 1)$ d'où $\frac{1}{\varepsilon N_2(x)}x \in B_{N_1}(0, \beta)$. On déduit que $N_1\left(\frac{1}{\varepsilon N_2(x)}x\right) < \beta$ et par suite $N_1(x) < \varepsilon \beta N_2(x)$. On a $N_1\left(\frac{\alpha}{\varepsilon N_1(x)}x\right) = \frac{\alpha}{\varepsilon} < \alpha$ donc $\frac{\alpha}{\varepsilon N_1(x)}x \in B_{N_1}(0, \alpha)$ d'où $\frac{\alpha}{\varepsilon N_1(x)}x \in B_{N_2}(0, 1)$. On déduit que $N_2\left(\frac{\alpha}{\varepsilon N_1(x)}x\right) < 1$ et par suite $\frac{\alpha}{\varepsilon} N_2(x) < N_1(x)$.
Donc $\forall x \in E \setminus \{0\}, \frac{\alpha}{\varepsilon} N_2(x) < N_1(x) < \varepsilon \beta N_2(x)$. On a égalité si $x = 0$ donc

$$\forall x \in E, \frac{\alpha}{\varepsilon} N_2(x) \leq N_1(x) \leq \varepsilon \beta N_2(x).$$

Les normes N_1 et N_2 sont alors équivalentes. On peut faire tendre ε vers 1 pour obtenir

$$\alpha N_2 \leq N_1 \leq \beta N_2.$$

Propriété 18

Soit $(E_1, N_1), \dots, (E_n, N_n)$ de $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés et $E = E_1 \times \dots \times E_n$ l'espace produit muni de la norme produit N . Alors pour tout $a = (a_1, \dots, a_n) \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$, on a

1. $B_N(a, r) = B_{N_1}(a_1, r) \times \dots \times B_{N_n}(a_n, r)$.
2. $\overline{B}_N(a, r) = \overline{B}_{N_1}(a_1, r) \times \dots \times \overline{B}_{N_n}(a_n, r)$.

Preuve:

1. Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in B_N(a, r)$, alors pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a

$$N_k(x_k - a_k) \leq N(x - a) < r$$

donc $x_k \in B_{N_k}(a_k, r)$, puis $x \in B_{N_1}(a_1, r) \times \dots \times B_{N_n}(a_n, r)$. Inversement si $x \in B_{N_1}(a_1, r) \times \dots \times B_{N_n}(a_n, r)$, alors $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $N_k(x_k - a_k) < r$, donc $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a

$$N(x - a) = \max_{1 \leq k \leq n} N_k(x_k - a_k) < r,$$

soit $x \in B_N(a, r)$.

2. La démonstration est similaire dans le cas des boules fermées.

I.6 Bornitude

Soit E un espace vectoriel normé de norme notée $\|\cdot\|_E$.

Définition 13: Partie bornée

Une partie A non vide de E est dite bornée si $\exists k \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in A, \|x\|_E \leq k$.

Remarque :

Une partie de E est bornée pour une norme, alors elle est bornée pour toute norme équivalente

Remarque :

Une partie de E bornée si elle est contenue dans une boule.

Exemple

On rappelle le groupe orthogonal $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}), {}^tAA = I_n\}$.
Montrons que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est borné.

Toutes les normes définies sur $M_n(\mathbb{R})$ sont équivalentes. On munit $M_n(\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_2$, alors pour tout $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\|A\|_2 = \sqrt{\text{Tr}(AA^t)} = \sqrt{\text{Tr}(I_n)} = \sqrt{n} \leq \sqrt{n}$$

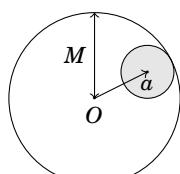
Donc il est borné.

Propriété 19: Les boules sont des fermés

Toute boule est bornée

Preuve:

Soit $B_f(a, r)$ une boule fermée de E ,



on pose $M = r + \|a\|$, alors pour tout $x \in B_f(a, r)$, on a

$$\|x\| \leq \|x - a\| + \|a\| \leq r + \|a\| = M$$

Donc $B_f(a, r)$ est bornée.

Méthode: Pour montrer qu'une partie A n'est pas bornée ?

On peut exhiber une suite d'éléments de A telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\| = +\infty.$$

Exemple

Soit $p \geq 2$. On note $\mathcal{N}_p(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $M_p(\mathbb{K})$ n'est pas borné.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = (n\delta_1^i \delta_p^j)_{1 \leq i, j \leq p}$. La suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est d'éléments de $\mathcal{N}_p(\mathbb{K})$ et on a

$$\|A_n\|_1 = n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty,$$

donc $\mathcal{N}_p(\mathbb{K})$ n'est pas borné

Définition 14: Diamètre d'une partie bornée

Soit A une partie non vide et bornée de E . Le réel positif

$$\delta(A) = \sup\{\|x - y\|, x, y \in A\}$$

est appelé le diamètre de A

Propriété 20

Soit A une partie non vide et bornée de E . Alors

1. Pour tous $a, b \in A$, on a $\|a - b\| \leq \delta(A)$.
2. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a, b \in A$ tels que

$$\delta(A) - \varepsilon < \|a - b\|$$

3. Il existe deux suites $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de A telles que $\|a_n - b_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \delta(A)$

Preuve:

1. Par définition du diamètre
2. D'après la caractérisation epsilonlesque de la borne supérieure.
3. D'après la caractérisation séquentielle de la borne supérieure.

Définition 15: Fonction bornée

Une fonction $f : X \longrightarrow E$ où X est un ensemble quelconque non vide est dite bornée si la partie $f(X) = \{f(x), x \in X\}$ est bornée.

Ou encore $\exists k \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in X, \|f(x)\|_E \leq k$.

Propriété 21

L'espace vectoriel $B(X, E)$ des fonctions $f : X \longrightarrow E$ bornées où X non vide et E un espace vectoriel normé est lui-même normé par $\|f\|_\infty = \sup\{\|f(x)\|_E \mid x \in X\}$.

Preuve:

$B(X, E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(X, E)$.

Pour tout $f \in B(X, E)$, l'ensemble $A = \{\|f(x)\|_E \mid x \in X\}$ est non vide et majoré de $\mathbb{R}^+$, donc il admet une borne supérieure, ainsi la définition de $\|f\|_\infty$.

1. Pour tout $f \in B(X, E)$, $\|f\|_\infty \geq 0$
2. Si $\|f\|_\infty = 0$, alors $\sup\{\|f(x)\|_E \mid x \in X\} = 0$, donc $\|f(x)\| = 0$ pour tout $x \in X$ puis $f = 0$
3. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}\|\lambda f\|_\infty &= \sup\{\|\lambda f(x)\|_E \mid x \in X\} \\ &= \sup\{|\lambda| \cdot \|f(x)\|_E \mid x \in X\} \\ &= |\lambda| \cdot \sup\{\|f(x)\|_E \mid x \in X\} = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty\end{aligned}$$

4. Soit $f, g \in B(X, E)$. Pour $x \in X$, on a :

$$\|(f+g)(x)\| \leq \|f(x)\| + \|g(x)\| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

$$\text{donc } \|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

Définition 16: Suite bornée

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E est dite bornée si $\exists k \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|u_n\|_E \leq k$$

Notation :

On note $\ell^\infty(\mathbb{N}, E)$ l'ensemble des suites bornées d'éléments dans E .

Propriété 22

$\ell^\infty(\mathbb{N}, E)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé par

$$\|(u_n)\|_\infty := \sup\{\|u_n\|_E, n \in \mathbb{N}\}$$

Preuve:

$$\ell^\infty(\mathbb{N}, E) = B(\mathbb{N}, E)$$

II Suites dans un espace vectoriel normé

$(E, \|\cdot\|)$ désigne un espace normé.

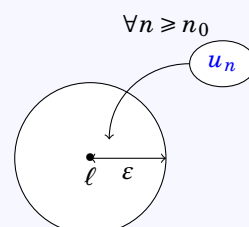
II.1 Suites convergentes

Définition 17: Suite convergente

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E converge si l'une des trois assertions suivantes est vérifiée

1. Il existe $\ell \in E$ tel que $\|u_n - \ell\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
2. Il existe $\ell \in E$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \|u_n - \ell\| \leq \varepsilon$$



3. Il existe $\ell \in E$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, la boule ouverte $B(\ell, \varepsilon)$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang

Si c'est le cas le vecteur ℓ est unique, appelé la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et on note

$$\ell = \lim u_n \text{ ou } u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|} \ell.$$

Une suite divergente est une suite non convergente.

Preuve:

Soit $\ell, \ell' \in E$, alors

$$\|\ell - \ell'\| \leq \|\ell - u_n\| + \|u_n - \ell'\| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

Donc $\ell = \ell'$

Propriété 23: Indépendance de la norme équivalente choisie

Soit N_1 et N_2 deux normes équivalentes sur E , alors toute suite d'éléments de E convergente pour une norme converge pour l'autre vers la même limite.

Preuve:

Soit (u_n) une suite d'éléments de E convergente vers ℓ pour la norme N_1 . Comme N_1 et N_2 sont équivalentes, alors il existe $\beta > 0$ tel que $N_2 \leq \beta N_1$, ceci donne $N_2(u_n - \ell) \leq \beta N_1(u_n - \ell) \rightarrow 0$.

Propriété 24: Domination

Soit (u_n) une suite de E et $\ell \in E$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. La suite (u_n) converge vers ℓ
2. Il existe une suite réelle et positive $(\alpha_n)_n$ convergeant vers 0 et telle que $\forall n \in \mathbb{N}; \quad \|u_n - \ell\| \leq \alpha_n$

Preuve:

1 $\Rightarrow$ 2) Il suffit de poser $(\alpha_n)_n = (\|u_n - \ell\|)_n$: Il est alors immédiat que la suite réelle $(\alpha_n)_n$ est positive et converge vers 0 avec $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|u_n - \ell\| = \alpha_n \leq \alpha_n$

2 $\Rightarrow$ 1) On a $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|u_n - \ell\| \leq \alpha_n$ et la suite $(\alpha_n)_n$ converge vers 0, donc $\|u_n - \ell\| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

Conséquence 1

Si $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \in E$, alors $\|u_n\| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \|\ell\|$

Preuve:

Soit $n \in \mathbb{N}$, d'après l'inégalité triangulaire renversée, on a alors

$$|\|u_n\| - \|\ell\|| \leq \|u_n - \ell\|$$

Donc $\|u_n - \ell\| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ entraîne $\|u_n\| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \|\ell\|$

Propriété 25: bornitude et convergence

1. Toute suite convergente est bornée ;
2. Une suite non bornée est divergente

Preuve:

Soit (u_n) une suite de E convergente et soit ℓ sa limite, alors pour $\varepsilon = 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N : \quad \|u_n - \ell\| \leq 1$$

Il vient que pour $n \geq N$:

$$\|u_n\| \leq \|u_n - \ell\| + \|\ell\|$$

On en déduit que pour tout $n > N$:

$$\|u_n\| \leq \|u_n - \ell\| + \|\ell\| \leq 1 + \|\ell\|$$

En outre, soit $M_0 = \max(\|u_0\|, \dots, \|u_N\|)$, alors $\forall n \leq N, \quad \|u_n\| \leq M_0$. Posons $M = \max(M_0, 1 + \|\ell\|)$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|u_n\| \leq M$$

Propriété 26: Opérations algébriques

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$, $(v_n)_{n \geq 0}$ deux suites d'éléments de E , $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\ell, \ell' \in E$. convergentes respectivement vers ℓ et ℓ'

1. Si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ et $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell'$ alors, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a $\lambda u_n + \mu v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda \ell + \mu \ell'$.
2. Si $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ est bornée et $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, alors $\alpha_n \cdot u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
3. Si $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $(u_n)_{n \geq 0}$ est bornée, alors $\alpha_n \cdot u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
4. Si $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha$ et $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in E$, alors $\alpha_n \cdot u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha \cdot \ell$. Si de plus $\alpha \in \mathbb{K}^*$, alors $\frac{1}{\alpha_n} \cdot u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha} \cdot \ell$.
5. Si de plus, E est une algèbre normée, $u_n v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \ell'$.

Preuve:

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \|\lambda \cdot u_n + \mu v_n - (\lambda \ell + \mu \ell')\| &= \|\lambda \cdot (u_n - \ell) + \mu (v_n - \ell')\| \\ &\leq |\lambda| \cdot \|u_n - \ell\| + |\mu| \cdot \|v_n - \ell'\| \end{aligned}$$

Cet encadrement montre que $\lambda u_n + \mu v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda \ell + \mu \ell'$

2. Soit m majorant de $(|\alpha_n|)_{n \geq 0}$, alors $\|\alpha_n u_n\| \leq m \|u_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
3. Soit M majorant de $(\|u_n\|)_{n \geq 0}$, alors $\|\alpha_n u_n\| \leq M |\alpha_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \|\alpha_n \cdot u_n - \alpha \ell\| &= \|\alpha_n \cdot u_n - \alpha u_n + \alpha u_n - \alpha \ell\| \\ &\leq \|u_n\| \cdot \|\alpha_n - \alpha\| + |\alpha| \cdot \|u_n - \ell\| \end{aligned}$$

Cet encadrement montre que $\alpha_n \cdot u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha \cdot \ell$

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \|u_n \cdot v_n - \ell \ell'\| &= \|u_n \cdot v_n - \ell v_n + \ell v_n - \ell \ell'\| \\ &\leq \|v_n\| \cdot \|u_n - \ell\| + \|\ell\| \cdot \|v_n - \ell'\| \end{aligned}$$

Donc $u_n v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \ell'$.

Exemple

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

Établir que $(A - I_3)^2 = 0_3$. En déduire A^n . Montrer que la suite $(\frac{1}{n} A^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

Un simple calcul mène à $(A - I_3)^2 = 0$. On a de plus $A = I_3 + (A - I_3)$, et on déduit de la formule du binôme que $\forall n \in \mathbb{N} \ A^n = I_3 + n(A - I_3)$. On a donc

$$\frac{1}{n} A^n = \frac{1}{n} I_3 + A - I_3 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} A - I_3.$$

Propriété 27

Si E est de dimension finie, $B = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de E . On écrit $u_n = \sum_{k=1}^p u_{n,k} e_k$

et soit $\ell = \sum_{k=1}^p \ell_k e_k$. On a équivalence entre :

1. $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$;
2. $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad u_{n,i} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_i$

Dans un tel cas : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sum_{k=1}^p \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n,k} e_k$

Preuve:

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E , $\|\cdot\|_\infty$ la norme sur E définie par $\|x\|_\infty = \sup_j |x_j|$ où les x_j sont les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$.

$$\begin{aligned} (u_n) \text{ est une suite convergente vers } \ell &= \sum_{j=1}^p \ell_j e_j \\ \iff \|u_n - \ell\| &= \sup_{j \in \llbracket 1, p \rrbracket} |u_{n,j} - \ell_j| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \\ \iff \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, &|u_{n,j} - \ell_j| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \\ \iff \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, &\text{ la suite } (u_{n,j})_n \text{ converge vers } \ell_j. \end{aligned}$$

Remarque :

On retrouve bien la convergence naturelle d'une suite de vecteurs, à savoir la convergence des suites des coordonnées. Cette convergence est *indépendante de la base choisie et indépendante de la norme utilisée*.

Exemple

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.
2. Montrer que la suite $(B^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ diverge.

Indication pour la question 2 : Calculer B^2 et B^3 .

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{3}{5})^n & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3^n} \end{pmatrix}$. Chacun des coefficients tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ donc la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice nulle.

2. On calcule comme indiqué $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B^3 = B$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{n+1} & (-1)^n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc la suite $(B^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas convergente car la suite de terme général $(-1)^n$ diverge

Propriété 28: Cas d'un espace vectoriel produit

Soit $E = \prod_{j=1}^p E_j$ un espace vectoriel produit normé. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ i.e. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in E$ donc $u_n = (u_{n,1}, \dots, u_{n,p})$ où $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, u_{n,k} \in E_k$. Soit $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p) \in E$.

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|_E} \ell \iff \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, u_{n,k} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|_{E_k}} \ell_k$$

Preuve:

Identique à la précédente

Propriété 29: Caractérisation séquentielle des normes équivalentes

Soit N_1 et N_2 deux normes sur E . Alors les assertions suivantes sont équivalentes

1. $N_1 \sim N_2$
2. Toute suite d'éléments de E convergente pour une norme converge pour l'autre vers la même limite.

Preuve:

Soit N_1 et N_2 deux normes sur E

1 $\implies$ 2) Déjà traitée, propriété 23

2 $\implies$ 1) Si N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes, alors l'un de deux ensembles $\left\{ \frac{N_1(x)}{N_2(x)} / x \in E \setminus \{0\} \right\}$ et $\left\{ \frac{N_2(x)}{N_1(x)} / x \in E \setminus \{0\} \right\}$ est

non majoré que l'on suppose $\left\{ \frac{N_1(x)}{N_2(x)} / x \in E \setminus \{0\} \right\}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $x_n \in E \setminus \{0\}$ tel que $\frac{N_1(x_n)}{N_2(x_n)} \geq n+1$, on considère alors la suite (y_n) définie par $y_n = \frac{1}{(n+1)N_2(x_n)} x_n$. On a $N_2(y_n) = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ mais $N_1(y_n) \geq (n+1)N_2(y_n) = 1 \neq 0$

II.2 Suites extraites

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$.

Définition 18: Suites extraites

On dit que (v_n) est une suite extraite de (u_n) s'il existe une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\varphi(n)}$.

Une telle fonction φ est dite extractrice

Remarque :

- Si $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante. Alors $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geq n$.
- En posant $n_k = \varphi(k)$, une suite extraite peut se percevoir comme une suite $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ avec $n_k < n_{k+1}$.

Propriété 30

Une suite extraite d'une suite extraite est extraite

Preuve:

Soit (u_n) une suite de E et $(u_{\varphi(n)})$ une de ces suites extraites. Posons $v_n = u_{\varphi(n)}$ et soit $(v_{\psi(n)})$ une suite extraite de (v_n) . Alors $v_{\psi(n)} = u_{\varphi(\psi(n))} = u_{\varphi \circ \psi(n)}$ et $\varphi \circ \psi$ est la composée de deux applications strictement croissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, donc c'est une application strictement croissante $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$

Propriété 31

Si la suite (u_n) converge vers ℓ , alors toutes les suites extraites de (u_n) convergent vers ℓ .

Preuve:

D'après la convergence de la suite $(u_n)_n$ converge ℓ , on a

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \geq 0, \quad \forall n \geq N, \quad \|u_n - \ell\| < \varepsilon$$

Soit $(u_{\varphi(n)})_n$ une suite extraite de $(u_n)_n$.

L'application $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est donc strictement croissante, $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geq n$.

Si $n \geq N$, alors $\varphi(n) \geq n \geq N$ donc $\|u_{\varphi(n)} - \ell\| < \varepsilon$, ce qui démontre la convergence de $(u_{\varphi(n)})_n$

En prenant la contraposée de cette proposition, on obtient le corollaire suivant

Corollaire 3

S'il existe une suite extraite divergente de (u_n) ou s'il existe deux suites extraites de (u_n) qui admettent des limites différentes, alors la suite (u_n) diverge

Exemple

Soit $A \in M_p(\mathbb{K})$ telle que $A^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} B$.
Montrons B est un projecteur.

La suite (A^{2n}) est extraite de la suite (A^n) , donc elle converge vers B . En outre par les opérations algébriques $A^{2n} = A^n \cdot A^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} B^2$. On en déduit par unicité de la limite que $B^2 = B$.

Méthode: Pour montrer qu'une suite diverge ?

On montre qu'elle admet une suite extraite divergente ou qu'elle admet deux suites extraites qui convergent vers deux limites différentes.

Exemple

Les suites suivantes sont divergentes $((-1)^n)$, $\left(\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)$

- On remarque que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = 1$ et $u_{2n+1} = -1$ donc les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent respectivement vers 1 et -1 donc leurs limites respectives sont distinctes. On en déduit que la suite (u_n) est divergente
- On remarque que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{8n} = \sin(2n\pi) = 0$ et $v_{8n+1} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc les suites $(v_{8n})_n$ et $(v_{8n+1})_n$ convergent respectivement vers 0 et $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Donc la suite $(v_n)_n$ est divergente.

Propriété 32: Les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1})

Si (u_n) est une suite telle que les deux sous-suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers une même limite ℓ , alors la suite (u_n) converge vers ℓ .

Preuve:

Soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver n_1 et n_2 tels que :

$$\forall n \geq n_1, \|u_{2n} - \ell\| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \forall n \geq n_2, \|u_{2n+1} - \ell\| < \varepsilon$$

Si l'on pose $N = \max\{2n_1, 2n_2 + 1\}$, on a évidemment :

$$\forall n \geq N, \|u_n - \ell\| < \varepsilon$$

ce qui prouve la convergence de (u_n) vers ℓ .

Exemple: Le critère spécial des séries alternées

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante de limite nulle, alors la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$ converge.

Soit $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$. Alors la suite (S_{2n}) est décroissante et la suite (S_{2n+1}) est croissante. De plus $S_{2n+1} - S_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ d'où les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes donc elles convergent vers la même limite. Ainsi $(S_n)_{n \geq 0}$ converge, c'est-à-dire la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$ converge.

II.3 Valeurs d'adhérence

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé et $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$.

Définition 19: Valeur d'adhérence

Soit $(u_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ et $\alpha \in E$. On dit que α est valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_n$ si elle est limite d'une suite extraite de $(u_n)_n$.

Exemple

-1 et 1 sont deux valeurs d'adhérences de la suite $u_n = (-1)^n$.

Propriété 33

1. Toute suite convergente admet une et une seule valeur d'adhérence ;
2. Toute suite ayant au moins deux valeurs d'adhérence est divergente.
3. Toute suite n'ayant pas de valeur d'adhérence est divergente.

Preuve:

1. Soit (u_n) une suite convergente vers ℓ , alors toute suite extraite de (u_n) converge vers ℓ . Si ℓ' une valeur d'adhérence de (u_n) , alors il existe une suite extraite de (u_n) convergeant vers ℓ' . Par unicité de la limite $\ell = \ell'$.
2. D'après 1

3. D'après 1

Attention

Si (u_n) admet une seule valeur d'adhérence alors on n'a pas forcément (u_n) converge. En effet, la suite (u_n) définie par $u_{2n} = 0$ et $u_{2n+1} = 2n + 1$ est un exemple d'une suite divergente (car elle n'est pas bornée) qui admet 0 comme seule valeur d'adhérence.

Théorème 3: de Bolzano-Weierstrass

Si E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), toute suite bornée d'éléments de E admet au moins une valeur d'adhérence.

Preuve:

Par récurrence sur p la dimension de E .

- Pour $\dim E = 0$, rien à démontrer
- Le théorème de Bolzano-Weierstrass a été démontré en première année dans le cas où $E = \mathbb{K}$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Montrons le résultat par récurrence sur $p = \dim(E) \in \mathbb{N}^*$.
 - Le cas $p = 1$ est le cas où $E = \mathbb{K}$. Le résultat est donc vrai quand $p = 1$.
 - Soit $p \geq 1$. Supposons que pour tout espace de dimension p , de toute suite bornée on puisse extraire une sous-suite convergente.

Soit E un espace de dimension $p + 1$ puis $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1})$ une base de E . On munit E de la norme infinie associée à cette base notée N_∞ . Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée d'éléments de E . Soit M un majorant de la suite $(N_\infty(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \sum_{k=1}^{p+1} u_{n,k} e_k$ où pour chaque $k \in \llbracket 1, p+1 \rrbracket$, $u_{n,k} \in \mathbb{K}$. Posons encore $v_{n,p} = \sum_{k=1}^p u_{n,k} e_k$ de sorte que $v_{n,p}$ est un vecteur de $\mathbf{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ tel que $u_n = v_{n,p} + u_{n,p+1} e_{p+1}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n,p+1}| \leq N_\infty(u_n) \leq M$. Donc, la suite $(u_{n,p+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de nombres bornée. On peut en extraire une sous-suite $(u_{\varphi(n),p+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers un certain nombre ℓ_{p+1} . Mais alors la suite $(u_{\varphi(n),p+1} e_{p+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le vecteur $\ell_{p+1} e_{p+1}$. En particulier, cette suite est bornée.

La suite $(v_{\varphi(n),p})_{n \in \mathbb{N}} = (u_{\varphi(n)} - u_{\varphi(n),p+1} e_{p+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée (en tant que combinaison linéaire de suites bornées) d'éléments de $\mathbf{Vect}(e_1, \dots, e_p)$. Par hypothèse de récurrence, on peut en extraire une suite $(v_{\psi(n),p})_{n \in \mathbb{N}}$ convergente de limite un certain vecteur v de $\mathbf{Vect}(e_1, \dots, e_p)$.

La suite $(u_{\psi(n),p+1} e_{p+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi convergente en tant que suite extraite de la suite convergente $(u_{\varphi(n),p+1} e_{p+1})_{n \in \mathbb{N}}$. Mais alors, la suite $(u_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}} = (v_{\psi(n),p})_{n \in \mathbb{N}} + (u_{\psi(n),p+1} e_{p+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente en tant que somme de deux suites convergentes et a pour limite $v + \ell_{p+1} e_{p+1}$. Le résultat est démontré par récurrence.

Attention

Ce résultat tombe en défaut si l'espace est de dimension infinie

Exemple

On munit $\mathbb{K}[X]$ de la norme $\|\cdot\|_1$ et on considère la suite (X^n) .

Une telle suite est bornée mais sans valeur d'adhérence.

Si (X^n) admet une valeur d'adhérence, alors il existe une extractrice φ de $\mathbb{N}$ telle que $(X^{\varphi(n)})$ converge. En particulier $\|X^{\varphi(n+1)} - X^{\varphi(n)}\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|X^{\varphi(n+1)} - X^{\varphi(n)}\|_1 = 1$. Absurde

II.4 Suites de Cauchy

Définition 20: Suites de Cauchy

Soit E un espace vectoriel normé. Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ est dite de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \text{ si } n \geq m \geq n_0 \text{ alors } \|u_n - u_m\| \leq \varepsilon$$

Ou encore

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall (k, n) \in \mathbb{N}^2, \text{ si } n \geq n_0 \text{ alors } \|u_{n+k} - u_n\| \leq \varepsilon$$

Propriété 34: Indépendance de la norme équivalente choisie

Si (u_n) est une suite de Cauchy pour $\|\cdot\|$, alors elle est de Cauchy pour toute norme équivalente à $\|\cdot\|$.

Preuve:

Soit $\mathcal{N}$ une norme sur E équivalente à la norme $\|\cdot\|$; il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que $\alpha \|\cdot\| \leq \mathcal{N} \leq \beta \|\cdot\|$. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe n_0 tel que

$$\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2, \text{ si } n \geq n_0 \text{ alors } \|u_{n+k} - u_n\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Pour $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \geq n_0$, on a

$$\mathcal{N}(u_{n+k} - u_n) \leq \beta \|u_{n+k} - u_n\| \leq \beta \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Ainsi, $(u_n)_{n \geq 0}$ est de Cauchy pour la norme $\mathcal{N}$.

Remarque :

Par négation, une suite (u_n) d'éléments de E n'est pas une suite de Cauchy, si, et seulement si,

$$\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists (n, k) \in \mathbb{N}^2, n \geq N \text{ et } \|u_{n+k} - u_n\| > \varepsilon$$

Exemple: La suite harmonique

La suite réelle de terme général $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ n'est pas une suite de Cauchy

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_{2n} - u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > n \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

On prendra $\varepsilon = 1/2$ et $n = k = N$.

Propriété 35

1. Toute suite convergente est une suite de Cauchy.
2. Toute suite de Cauchy est bornée.

Preuve:

1. Soit (u_n) une suite convergente et soit ℓ sa limite

Pour $\varepsilon > 0$, il existe N tel que, pour tout $n > N$, $\|u_n - \ell\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Soit $n \geq m \geq N$, on a :

$$\|u_n - u_m\| \leq \|u_n - \ell\| + \|u_m - \ell\| < \varepsilon$$

2. Soit (u_n) une suite de Cauchy.

Pour $\varepsilon = 1$, il existe N tel que, pour tout $n > N$, $\|u_n - u_N\| < 1$.

La suite est donc bornée par $\max(\|u_0\|, \dots, \|u_{N-1}\|, \|u_N\| + 1)$

Attention

1. Une suite de Cauchy peut ne pas converger.
2. Une suite bornée n'est pas forcément de Cauchy. Voir $((-1)^n)_{n \geq 0}$

Propriété 36

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy si et seulement s'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels positifs telle que

$$\begin{cases} \forall n, p \in \mathbb{N}, \quad \|u_{n+p} - u_n\| \leq \varepsilon_n \\ \varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{cases}$$

Preuve:

$\Leftarrow$ Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$: $\varepsilon_n < \varepsilon$.

Pour $n \geq N$ et $p \in \mathbb{N}$, on a

$$\|u_{n+p} - u_n\| \leq \varepsilon_n < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ Soit $n \in \mathbb{N}$, la suite $(\|u_{n+p} - u_n\|)_{p \in \mathbb{N}}$ est bornée. Posons alors $\varepsilon_n = \sup_{p \in \mathbb{N}} \|u_{n+p} - u_n\|$, alors on bien $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$ est de réels

positifs vérifiant

$$\forall n, p \in \mathbb{N}, \quad \|u_{n+p} - u_n\| \leq \varepsilon_n$$

et pour $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ et $p \in \mathbb{N}$, on a

$$\|u_{n+p} - u_n\| \leq \varepsilon$$

Donc $\forall n \geq n_0$, on a $0 \leq \varepsilon_n \leq \varepsilon$

Méthode: Comment démontrer qu'une suite est de Cauchy?

Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy pour $\|\cdot\|$ on fixe deux éléments $n, p \in \mathbb{N}$ et on essaie de majorer la quantité $\|u_{n+p} - u_n\|$ par un réel positif ε_n indépendamment de p tel que $\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Exemple

Soit $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ telle que $\|r_{n+1} - r_n\| \leq \lambda^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ où λ est un réel strictement compris entre 0 et 1. Montrons que la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$, alors par l'inégalité triangulaire et télescopage

$$\|r_{n+p} - r_n\| = \left\| \sum_{k=n}^{n+p-1} (r_{k+1} - r_k) \right\| \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} \|r_{k+1} - r_k\| \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} \lambda^k$$

Or $\sum_{k=n}^{n+p-1} \lambda^k = \lambda^n \frac{1 - \lambda^p}{1 - \lambda} \leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda}$ et $\frac{\lambda^n}{1 - \lambda} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc la suite $(r_n)_{n \geq 0}$ est de Cauchy

Propriété 37: Suite de Cauchy et valeurs d'adhérence

1. Toute suite de Cauchy qui admet une valeur d'adhérence est convergente.
2. Une suite de Cauchy possède au plus une valeur d'adhérence

Preuve:

1. Soit ℓ une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(u_{\varphi(n)})$ une suite extraite de $(u_n)_{n \geq 0}$ de limite ℓ . Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $n, m > N$: $\|u_n - u_m\| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $\|u_{\varphi(n)} - \ell\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Alors, pour tout $n > N$, on a $\varphi(n) \geq n > N$ et

$$\|u_n - \ell\| \leq \|u_n - u_{\varphi(n)}\| + \|u_{\varphi(n)} - \ell\| < \varepsilon$$

Donc (u_n) converge vers ℓ

2. Si une suite de Cauchy admet une valeur d'adhérence, alors elle converge.

Définition 21: Espace de Banach

Un espace vectoriel normé dont toute suite de Cauchy est convergente est dit de Banach ou complet.

Propriété 38

Tout espace vectoriel normé de dimension finie est un espace de Banach.

Preuve:

Soit (x_n) une suite de Cauchy de E donc (x_n) est bornée.

E étant de dimension finie donc d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass on peut extraire de (x_n) une suite convergente d'où (x_n) admet une valeur d'adhérence.

On a (x_n) est une suite de Cauchy qui admet une valeur d'adhérence donc la suite (x_n) est convergente. On déduit que E est Banach.

Exemple

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

1. $\mathbb{K}^n$ est un Banach. En particulier, $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont de Banach.
2. $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un Banach.
3. Si E est de dimension n alors $\mathcal{L}(E)$ est un Banach.
4. $\mathbb{K}_n[X]$ est un Banach.

Attention

Ce résultat tombe en défaut si la dimension de E n'est pas finie. Voir l'exemple II.4

Exemple: CCP MP 2006

Pour tout polynôme $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ de l'espace $E = \mathbb{R}[X]$, on pose $\|P\|_\infty = \max_{0 \leq k \leq n} |a_k|$.

1. Vérifier que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E .
2. On considère la suite $(P_n)_{n \geq 1}$ de terme général $P_n(X) = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$.
Montrer que la suite $(P_n)_{n \geq 1}$ est une suite de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.
3. Montrer que la suite $(P_n)_{n \geq 1}$ ne converge pas dans E ?

1. Ne présente aucune difficulté.
2. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m > n$ on a $\|P_m - P_n\|_\infty = \frac{1}{(n+1)!}$. Il existe donc un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $\frac{1}{(n+1)!} \leq \varepsilon$. Ainsi, pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m > n \geq N$, on a $\|P_m - P_n\|_\infty \leq \varepsilon$. Donc la suite $(P_n)_{n \geq 1}$ est une suite de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.
3. Raisonnons par l'absurde et supposons que la suite $(P_n)_{n \geq 1}$ converge vers un polynôme Q de degré q . Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > q + 1$, on a alors $\|P_n - Q\|_\infty \geq \frac{1}{(q+1)!}$. Comme q est constant, il n'est pas possible que $\|P_n - Q\|_\infty$ tende vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$.
Conclusion L'espace vectoriel E n'est pas complet pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

III Éléments de topologie

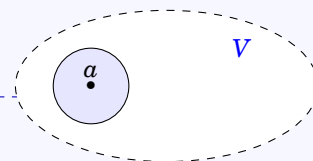
E un espace vectoriel normé de norme $\|\cdot\|$.

III.1 Voisinages

Définition 22: Voisinage

Soit a un élément de E et V une partie de E . On dit que V est un voisinage de a s'il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset V$.

On note $\mathcal{V}_E(a)$ ou $\mathcal{V}(a)$ l'ensemble des voisinages de a .

**Propriété 39: Indépendance de la norme choisie**

Soit N_1 et N_2 deux normes équivalentes de E , alors tout voisinage de $a \in E$ pour l'une est voisinage de a pour l'autre et vice versa

Propriété 40

Soit $a \in E$

1. Toute partie contenant un voisinage de a est un voisinage de a
2. L'union de voisinages de a indexée par un ensemble non vide est un voisinage de a
3. L'intersection finie de voisinages de a indexée par un ensemble non vide est un voisinage de a

Preuve:

1. Soit $V \in \mathcal{V}(a)$ et $U \subset E$ tels que $V \subset U$. Par définition il existe r un réel strictement positif tel que $B(a, r) \subset V \subset U$, donc $U \in \mathcal{V}(a)$
2. Soit V la réunion de la famille de voisinages $(V_i)_{i \in I}$ avec I non vide. Pour tout x de V , il existe $i \in I$ tel que $x \in V_i$. Puisque V_i est ouvert, il existe alors $r_i > 0$ tel que $B(x, r_i) \subset V_i$. On a donc $B(x, r_i) \subset V$.
3. Soit V l'intersection de la famille de voisinage $(V_i)_{i \in I}$ avec I non vide fini. Soit $x \in V$. Pour tout i de I l'élément x

appartient au voisinage V_i et il existe $r_i > 0$ tel que $B(x, r_i) \subset V_i$. Puisque I est fini, le nombre réel : $r = \min_{i \in I} (r_i)$ existe et appartient à $\mathbb{R}_+^*$. On a alors $B(x, r) \subset V_i$ pour tout i et, par conséquent, est contenue dans $B(x, r) \subset V$

Vocabulaire :

Lorsque $E = \mathbb{R}$.

- On dit que $V \in \mathcal{V}(+\infty)$ s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $]M, +\infty[\subset V$
- On dit que $V \in \mathcal{V}(-\infty)$ s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $] -\infty, M[\subset V$
- On dit que ∞ est adhérent à A si pour tout $V \in \mathcal{V}(\infty) : V \cap A \neq \emptyset$

III.2 Ouvert

Définition 23

Soit $\mathcal{O} \subset E$. On dit que $\mathcal{O}$ est un ouvert de E si $\forall x \in \mathcal{O}, \exists \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \subset \mathcal{O}$.

Un sous-ensemble de E est un ouvert s'il est voisinage pour chacun de ses points

Propriété 41: Indépendance de la norme choisie

Soit N_1 et N_2 deux normes équivalentes de E , alors tout ouvert pour l'une est ouvert pour l'autre et vice versa

Propriété 42

1. $\emptyset$ et E sont des ouverts de E .
2. Une réunion quelconque d'ouverts de E est un ouvert de E .
3. Une intersection finie d'ouverts de E est un ouvert de E .

Preuve:

1. Si $x \in \emptyset$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ la boule $B(x, \varepsilon) \subset \emptyset$
2. Soit $\mathcal{O}$ la réunion de la famille d'ouverts $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ avec I non vide. Pour tout x de $\mathcal{O}$, il existe $i \in I$ tel que $x \in \mathcal{O}_i$. Puisque $\mathcal{O}_i$ est ouvert, il existe alors $r_i > 0$ tel que $B(x, r_i) \subset \mathcal{O}_i$. On a donc $B(x, r_i) \subset \mathcal{O}$.
3. Soit $\mathcal{O}$ l'intersection de la famille d'ouverts $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ avec I non vide fini. Soit $x \in \mathcal{O}$. Pour tout i de I l'élément x appartient à l'ouvert $\mathcal{O}_i$ et il existe $r_i > 0$ tel que $B(x, r_i) \subset \mathcal{O}_i$. Puisque I est fini, le nombre réel : $r = \min_{i \in I} (r_i)$ existe et appartient à $\mathbb{R}_+^*$. On a alors $B(x, r) \subset \mathcal{O}_i$ pour tout i et, par conséquent, est contenue dans $B(x, r) \subset \mathcal{O}$

Exemple

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Les ensembles suivants $]a, b[,]a, +\infty[$ et $] -\infty, b[$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$

Propriété 43

Une boule ouverte de E est un ouvert de E .

Preuve:

Soit $a \in E$ et $r > 0$.

On considère la boule $B(a, r)$. Si $r > 0$, soit $x \in B(a, r)$ donc $\|x - a\| < r$.

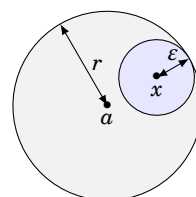
Posons $\varepsilon = r - \|x - a\|$, on a $\varepsilon > 0$.

Soit $y \in B(x, \varepsilon)$ donc $\|y - x\| < \varepsilon$, puis

$$\|y - a\| \leq \|y - x\| + \|x - a\| < \varepsilon + r - \varepsilon = r$$

d'où $y \in B(a, r)$.

On déduit que $B(x, \varepsilon) \subset B(a, r)$ et par suite $B(a, r)$ est ouvert.



Propriété 44: Produit fini d'ouverts

Soit $E_1, \dots, E_n$ des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés et $O_1, \dots, O_n$ des ouverts respectifs de $E_1, \dots, E_n$. Alors $O_1 \times \dots \times O_n$ est un ouvert de l'espace vectoriel normé produit $E = E_1 \times \dots \times E_n$ muni de la norme produit.

Preuve:

Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in O_1 \times \dots \times O_n$. Comme les U_k sont des ouverts de E , pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe $r_k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B_{N_k}(x_k, r_k) \subset O_k$. Notons $r = \min_{1 \leq k \leq n} r_k$, d'après la propriété 18, on a

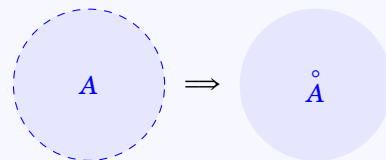
$$B_N(x, r) = B_{N_1}(x_1, r) \times \dots \times B_{N_n}(x_n, r) \subset B_{N_1}(x_1, r_1) \times \dots \times B_{N_n}(x_n, r_n) \subset O_1 \times \dots \times O_n$$

Donc $O_1 \times \dots \times O_n$ est un ouvert de $E = E_1 \times \dots \times E_n$

III.3 Intérieur d'une partie**Définition 24: Intérieur**

Soit A une partie de E et $a \in E$. On dit que a est intérieur à A si

$$\exists r > 0 \text{ tel que } B(a, r) \subset A$$



L'intérieur de A est l'ensemble des points intérieurs à A . Il est noté $\overset{\circ}{A}$.

Exemple

L'intérieur de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ est vide. En effet tout intervalle ouvert, non vide, contient un irrationnel

Propriété 45

Soit A et B deux parties de E .

1. $\overset{\circ}{A} \subset A$;
2. $A \subset B \implies \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$;
3. $\overset{\circ}{A}$ est ouvert ;
4. $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$;
5. A ouvert $\Leftrightarrow A = \overset{\circ}{A}$;
6. $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A ;
7. $\overset{\circ}{A}$ est la réunion de tous les ouverts contenus dans A .

Preuve:

1. Soit $a \in \overset{\circ}{A}$, alors il existe $r > 0$ tel que $a \in B(a, r) \subset A$, donc $a \in A$. D'où l'inclusion
2. Supposons que $A \subset B$.
Soit $a \in \overset{\circ}{A}$, alors il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset A \subset B$, donc $a \in \overset{\circ}{B}$. Ainsi $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$
3. Soit $a \in \overset{\circ}{A}$, alors il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset A$. Soit $x \in B(a, r)$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset B(a, r) \subset A$, donc $x \in \overset{\circ}{A}$. Ainsi l'inclusion $B(a, r) \subset \overset{\circ}{A}$
4. D'après la première assertion $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{A}$.
Inversement, soit $x \in \overset{\circ}{\overset{\circ}{A}}$. Puisque $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert, alors il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset \overset{\circ}{A}$. Par définition de l'intérieur de $\overset{\circ}{A}$, l'élément $x \in \overset{\circ}{A}$. Donc $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} \subset \overset{\circ}{A}$
5. $\Leftarrow$ $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert
 $\Rightarrow$ L'inclusion $\overset{\circ}{A} \subset A$. Inversement soit $x \in A$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A$, donc $x \in \overset{\circ}{A}$. Ainsi $A = \overset{\circ}{A}$
6. $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert de E inclus dans A . Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de E contenu dans A et soit $x \in \mathcal{O}$. L'ensemble $\mathcal{O}$ est un ouvert, alors il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset \mathcal{O} \subset A$, donc $x \in \overset{\circ}{A}$. Ainsi $\mathcal{O} \subset \overset{\circ}{A}$
7. Soit $\mathcal{O}_A$ l'ensemble des ouverts contenus dans A , alors $\bigcup_{O \in \mathcal{O}_A} O$ est un ouvert contenu dans A , donc dans $\overset{\circ}{A}$. D'autre part $\overset{\circ}{A} \in \mathcal{O}_A$, donc l'inclusion $\overset{\circ}{A} \subset \bigcup_{O \in \mathcal{O}_A} O$, puis l'égalité $\overset{\circ}{A} = \bigcup_{O \in \mathcal{O}_A} O$

Propriété 46

Soit $a \in E$ et $r > 0$, alors

$$\overset{\circ}{B_f(a, r)} = B(a, r)$$

Preuve:

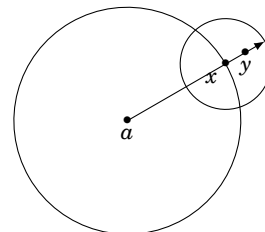
Soit $r > 0$.

On a $B(a, r) \subset B_f(a, r)$, donc $B(a, r) \subset \overset{\circ}{B_f(a, r)}$.

Soit $x \in B_f(a, r)$ tel que $\|x - a\| = r$, alors $x \notin \overset{\circ}{B_f(a, r)}$: En effet pour tout $\varepsilon > 0$

$$y = x + \frac{\varepsilon}{2r}(x - a) \in B(x, \varepsilon) \setminus B_f(a, r)$$

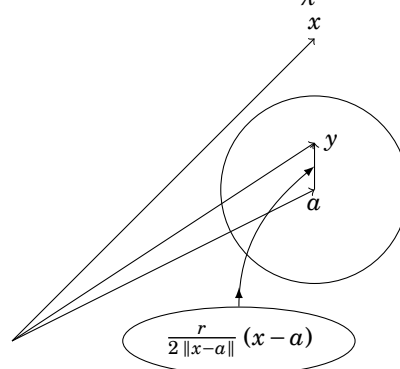
Voir que $\|y - a\| = r + \frac{\varepsilon}{2} > r$ et $\|y - x\| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

**Exemple: Polytechnique MP 2007**

Soit E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E .

1. Montrer que si F est un ouvert alors $F = E$.
2. Montrer que si $\overset{\circ}{F} \neq \emptyset$ alors $F = E$.
3. Soient $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, $E_1 = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$, $E_2 = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$ et $E_3 = \{f \in E \mid f \text{ est polynômiale}\}$. Montrer que $\overset{\circ}{E}_1 = \overset{\circ}{E}_2 = \overset{\circ}{E}_3 = \emptyset$.

1. Il est clair que $F \subset E$. Il reste à montrer que $E \subset F$. Comme F est ouvert et $0_E \in A$, il existe $r > 0$ tel que $B(0_E, r) \subset F$. Soit $x \in E \setminus \{0_E\}$, il existe $\lambda > 0$ tel que $\lambda x \in B(0_E, r) \subset F$. Il suffit de prendre $\lambda = \frac{r}{2\|x\|}$ car alors $\|\lambda x\| = \frac{r}{2\|x\|} \|x\| = \frac{r}{2} < r$. Puisque F est un sous-espace vectoriel et $\lambda x \in F$, on a $x = \frac{1}{\lambda}(\lambda x) \in F$.
2. Par hypothèse $\overset{\circ}{F} \neq \emptyset$, il existe donc $a \in \overset{\circ}{F}$. Soit $x \in E$ tel que $x \neq a$. Montrons que $x \in F$. En notant $y = a + \frac{r}{2\|x-a\|}(x-a)$, on a alors $\|y - a\| = \frac{r}{2} < r$ donc $y \in B(a, r)$ et donc $y \in F$. Comme a et y appartiennent à F et comme F est un sous-espace vectoriel, il en résulte que $x - a = \frac{2\|x-a\|}{r}(y-a) \in F$. Enfin, on a $x = (x-a) + a \in F$, d'où $x \in F$ et $E \subset F$.
3. D'après la question précédente, comme les E_i sont des sous-espaces vectoriels de E , il s'agit de montrer qu'ils sont distincts de E . C'est évident car $x \mapsto |x - \frac{1}{2}|$ n'est pas dans E_1 et $x \mapsto \cos x$ n'est ni dans E_2 , ni dans E_3 .

**III.4 Fermé****Définition 25: Fermé**

On appelle fermé tout ensemble U dont le complémentaire $\complement_E^U$ est ouvert.

Propriété 47: Indépendance de la norme choisie

Soit N_1 et N_2 deux normes équivalentes de E , alors tout fermé pour l'une est fermé pour l'autre et vice versa

Propriété 48

1. $\emptyset$ et E sont des fermés ;
2. Toute intersection quelconque de fermés est un fermé ;
3. Toute réunion finie de fermés est un fermé.

Preuve:

Par passage au complémentaire

Exemple

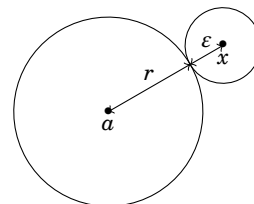
Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Les ensembles suivants $[a, b]$, $[a, +\infty[$ et $]-\infty, b]$ sont des fermés de $\mathbb{R}$

Propriété 49

1. Les singletons et les parties finies de E sont des fermés dans E .
2. Les boules fermées de E sont des fermés de E .
3. Les sphères de E sont fermées dans E .

Preuve:

1. Soit $x \in E$ et on pose $\mathcal{O}$ le complémentaire de $\{x\}$ dans E .
Soit $y \in \mathcal{O}$ donc $y \neq x$ d'où $\|y - x\| > 0$. Soit $0 < \varepsilon < \|y - x\|$ et soit $z \in B(y, \varepsilon)$ donc $\|z - y\| < \varepsilon$.
On a $\|z - x\| \geq \|y - x\| - \|y - z\| = \varepsilon - \|y - z\| > 0$ donc $z \neq x$ d'où $z \in \mathcal{O}$. On déduit que $B(y, \varepsilon) \subset \mathcal{O}$ donc $\mathcal{O}$ est un ouvert et par suite $\{x\}$ est un fermé.
Une partie finie de singletons donc elle est fermée.
2. Soit $a \in E$ et $r \geq 0$ et on pose $\mathcal{O}$ le complémentaire de $B_f(a, r)$.
Soit $x \in \mathcal{O}$ donc $\|x - a\| > r$. On pose $\varepsilon = \|x - a\| - r$, on a $\varepsilon > 0$ et soit $y \in B(x, \varepsilon)$.
On a $\|y - a\| \geq \|x - a\| - \|y - x\| > \varepsilon + r - \varepsilon = r$ donc $y \in \mathcal{O}$ d'où $B(x, \varepsilon) \subset \mathcal{O}$.
On déduit que $\mathcal{O}$ est un ouvert de E et par suite $B_f(a, r)$ est un fermé de E .
3. Soit $a \in E$ et $r \geq 0$. On a $S(a, r) = B_f(a, r) \cap \mathcal{C}_E^{B(a, r)}$ donc $S(a, r)$ est fermé car intersection de deux fermés.

**Exemple**

$\mathbb{Z}$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

On écrit $\mathbb{Z}_{\mathbb{R}}^{\mathbb{Z}} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]k, k+1[$, donc $\mathbb{Z}_{\mathbb{R}}^{\mathbb{Z}}$ est un ouvert comme union d'ouverts, et par suite $\mathbb{Z}$ est fermé

Propriété 50: Caractérisation séquentielle des fermés

Soit U une partie d'un espace vectoriel normé E . Les assertions suivantes sont équivalentes

1. U est fermé.
2. Toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de U qui converge dans E , sa limite appartient à U .

Preuve:

Soit $\mathcal{O}$ le complémentaire de U .

- 1 $\Rightarrow$ 2) Supposons que U est fermé. Soit $(x_n) \in U^{\mathbb{N}}$ convergente de limite ℓ et supposons que $\ell \notin U$ donc $\ell \in \mathcal{O}$. Comme $\mathcal{O}$ est ouvert, alors il existe $\varepsilon > 0$, $B(\ell, \varepsilon) \subset \mathcal{O}$. On a $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ donc $\exists n \in \mathbb{N}$, $\|x_n - \ell\| < \varepsilon$ d'où $x_n \in B(\ell, \varepsilon) \subset \mathcal{O}$. Absurde car $x_n \in U$ d'où $\ell \in U$.
- 2 $\Rightarrow$ 1) Supposons que $\mathcal{O}$ n'est pas ouvert donc $\exists \ell \in E$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $B(\ell, \frac{1}{2^n}) \not\subset \mathcal{O}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $B(\ell, \frac{1}{2^n}) \cap U \neq \emptyset$. On déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n \in B(\ell, \frac{1}{2^n}) \cap U$. On a $(x_n) \in U^{\mathbb{N}}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|x_n - \ell\| < \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $x_n \rightarrow \ell \notin U$.
Ainsi, on a construit une suite $(x_n) \in U^{\mathbb{N}}$ convergente mais sa limite n'appartient pas à U . Ce qui est absurde, d'où $\mathcal{O}$ est ouvert et par suite U est fermé.

Propriété 51

Dans un espace vectoriel normé, non nécessairement de dimension finie, tout sous-espace vectoriel de dimension finie est fermé.

Preuve:

Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie et soit (x_n) une suite d'éléments de F telle que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x \in E$. La suite (x_n) est de Cauchy dans F et puisque F est de Banach, alors (x_n) converge dans F , d'où F est fermé dans E .

Propriété 52: Produit fini de fermés

Soit $E_1, \dots, E_n$ des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés et $U_1, \dots, U_n$ des fermés respectifs de $E_1, \dots, E_n$. Alors $U_1 \times \dots \times U_n$ est un fermé de l'espace vectoriel normé produit $E = E_1 \times \dots \times E_n$ muni de la norme produit.

Preuve:

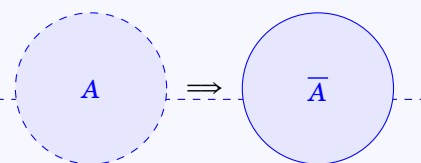
Soit $(x_p)_{p \geq 0}$ une suite d'éléments de $U_1 \times \dots \times U_n$ convergeant dans E vers $x = (x_1, \dots, x_n)$. Pour $p \in \mathbb{N}$, on pose $x_p = (x_{1,p}, \dots, x_{n,p})$, alors pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la suite $(x_{k,p})_{p \geq 0}$ est d'éléments de U_k convergeant dans E_k vers x_k . Mais U_k est fermé, donc $x_k \in U_k$. Ainsi $x \in U_1 \times \dots \times U_n$, puis on déduit la fermeture de $U_1 \times \dots \times U_n$.

III.5 Adhérence d'un partie**Définition 26: Adhérence**

Soit A une partie de E et $a \in E$.

On dit que a est adhérent à A si $\forall r > 0, B(a, r) \cap A \neq \emptyset$.

L'adhérence de A est l'ensemble, noté $\bar{A}$, des points adhérents à A .

**Propriété 53: Caractérisation séquentielle d'un point adhérent**

Soit A une partie de E et $a \in E$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes

1. $a \in \bar{A}$.
2. Il existe une suite $(a_n)_{n \geq 0} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$.

Preuve:

1 $\Rightarrow$ 2) Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $A \cap B(a, 2^{-n}) \neq \emptyset$ et donc il existe $a_n \in A \cap B(a, 2^{-n})$. La suite $(a_n)_{n \geq 0}$ est d'éléments de A telle que $\|a_n - a\| \leq 2^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$.

2 $\Rightarrow$ 1) Soit $(a_n)_{n \geq 0} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \rightarrow a$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $n \in \mathbb{N}$, $\|a_n - a\| < \varepsilon$ donc $a_n \in A \cap B(a, \varepsilon)$ d'où $A \cap B(a, \varepsilon) \neq \emptyset$.

Propriété 54

Soit A et B deux parties de E .

1. $\overset{\circ}{\bar{A}} = \bar{\overset{\circ}{A}}$ $\overset{\circ}{\bar{A}} = \bar{\overset{\circ}{A}}$, donc $\bar{A}$ est un fermé.
2. $A \subset B \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{B}$.
3. $A \subset \bar{A}$.
4. $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$.
5. A fermé $\Leftrightarrow A = \bar{A}$.
6. $\bar{A}$ est le plus petit fermé contenant A .
7. $\bar{A}$ est l'intersection de tous les fermés contenant A .

Preuve:

1. Soit $a \in E$. $a \notin \bar{A}$, si et seulement, s'il existe $r > 0$ tel que $A \cap B(a, r) = \emptyset$, si et seulement, s'il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset \overset{\circ}{\bar{A}}$, si et seulement, si $a \in \overset{\circ}{\bar{A}}$.
2. Soit $a \in \bar{A}$ et $\varepsilon > 0$. On a $A \cap B(a, \varepsilon) \neq \emptyset$ et $A \cap B(a, \varepsilon) \subset B \cap B(a, \varepsilon)$ donc $B \cap B(a, \varepsilon) \neq \emptyset$. On déduit que $a \in \bar{B}$ et par suite $\bar{A} \subset \bar{B}$.
3. Soit $a \in A$ et $\varepsilon > 0$. On a $a \in A \cap B(a, \varepsilon)$ donc $A \cap B(a, \varepsilon) \neq \emptyset$ donc $a \in \bar{A}$ d'où $A \subset \bar{A}$.
4. L'inclusion $\bar{A} \subset \bar{\bar{A}}$ est évidente. Inversement soit $x \in \bar{\bar{A}}$, il existe une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de $\bar{A}$ telle que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$. Or $x_n \in \bar{A}$, donc $B(x_n, \frac{1}{2^n}) \cap A \neq \emptyset$, donc il existe $a_n \in A$ tel que $\|a_n - x_n\| \leq \frac{1}{2^n}$. Ainsi

$$\|a_n - x\| \leq \|a_n - x_n\| + \|x_n - x\| \leq \frac{1}{2^n} + \|x_n - x\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$
5. $\Leftrightarrow A = \bar{A}$, donc A est fermé
 $\Rightarrow$ Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de A qui converge vers $a \in E$, alors $a \in \bar{A} = A$. Donc A est fermé

6. Soit U un fermé contenant A . Soit $a \in \overline{A}$, alors il existe une suite $(a_n)_{n \geq 0}$ d'éléments qui converge vers a . Une telle suite es d'éléments de U , donc par fermeture de U , a appartient à U . Donc $\overline{A} \subset U$
7. Soit $\mathcal{F} = \{F \text{ fermé de } E, A \subset F\}$. L'intersection $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$ est un fermé de E contenant A et si H est fermé contenant A , alors $H \in \mathcal{F}$, puis $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \subset H$. Donc $\overline{A} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$ par l'assertion précédente.

Exemple: Mines-Ponts MP 2006

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé et soit A un sous-espace vectoriel de E .

1. Montrer que l'adhérence de A est un sous-espace vectoriel de E .
2. Montrer que tout hyperplan H de E est soit fermé (c'est-à-dire $\overline{H} = H$) soit dense dans E (c'est-à-dire $\overline{H} = E$).

1. Montrons que $\overline{A}$ est sous-espace vectoriel de E . Soient $(a, b) \in \overline{A} \times \overline{A}$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Il existe $(a_n, b_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ et $b = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$. On sait que $\lambda a + \mu b = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda a_n + \mu b_n)$ or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda a_n + \mu b_n \in A$ car A est un sous-espace vectoriel donc $\lambda a + \mu b \in \overline{A}$.
2. Soit H un hyperplan de E . On a tout d'abord $H \subset \overline{H} \subset E$. Si H n'est pas fermé, $H \subsetneq \overline{H}$, il existe $a \in \overline{H} \setminus H$, donc $H \oplus \mathbb{R}a \subset \overline{H}$. Or $H \oplus \mathbb{R}a = E$ puisque H est un hyperplan ne contenant pas a , d'où $\overline{H} = E$.

Propriété 55

Soit $a \in E$ et $r > 0$, alors

$$\overline{B(a, r)} = B_f(a, r)$$

Preuve:

Soit $r > 0$. On a $B(a, r) \subset B_f(a, r)$ et $B_f(a, r)$ fermé donc $\overline{B(a, r)} \subset B_f(a, r)$.

Soit $x \in B_f(a, r)$ donc $\|x - a\| \leq r$. On considère la suite $x_n = a + \frac{n}{n+1}(x - a)$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}, \|x_n - a\| = \frac{n}{n+1} \|x - a\| \leq \frac{nr}{n+1} < r$ donc $x_n \in B(a, r)$, de plus $\|x_n - x\| = \frac{1}{n+1} \|a - x\| \rightarrow 0$ donc (x_n) est une suite d'éléments de $B(a, r)$ qui converge vers x d'où, d'après la caractérisation séquentielle de l'adhérence, $x \in \overline{B(a, r)}$.

On déduit que $B_f(a, r) \subset \overline{B(a, r)}$ et par suite $B_f(a, r) = \overline{B(a, r)}$.

III.6 Frontière

Définition 27: Frontière

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ avec E un espace vectoriel normé. La frontière de A est l'ensemble

$$\text{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{A} \cap \overset{\circ}{C}_E^A$$

Exemple

$$\text{Fr}(\mathbb{Q}) = \overline{\mathbb{Q}} \setminus \overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$$

Propriété 56

1. $\text{Fr}(A)$ est fermé de E
2. $\text{Fr}(A) = \text{Fr}(\mathbb{C}A)$.
3. $\overline{A} = \overset{\circ}{A} \cup \text{Fr}(A)$

Propriété 57

Soit $a \in E$ et $r > 0$, alors

$$\text{Fr}(B_f(a, r)) = \text{Fr}(B(a, r)) = \text{Fr}(S(a, r)) = S(a, r)$$

III.7 Densité

Définition 28: Partie dense

On dit que A est dense dans E si $\overline{A} = E$.
 Soit $B \subset E$. On dit que $A \subset B$ est dense dans B si $B \subset \overline{A}$.

Propriété 58

Soit A un ensemble de E . Alors les assertions suivantes sont équivalentes.

1. A est dense dans E .
2. $\forall x \in E, B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.
3. Pour tout ouvert $\mathcal{O}$ non vide de E , on a $A \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$.
4. $\forall x \in E, \exists y \in A, d(x, y) = \|x - y\| < \varepsilon$.
5. $\forall x \in E, d(x, A) = 0$.
6. $\forall x \in E, \exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = x$.

Exemple

$GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $M_n(\mathbb{K})$

Remarque :

Tout ensemble dense n'est pas bornée

III.8 Voisinages, fermés et ouverts relatifs à une partie

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé, $A \subset E$ et $a \in A$.

Définition 29: Voisinages relatifs à une partie

On appelle voisinage de a dans A ou relativement à A tout ensemble de la forme $A \cap \mathcal{V}$ où $\mathcal{V}$ est un voisinage de a dans E .
 L'ensemble des voisinage de a dans A est noté $\mathcal{V}_A(a)$.

Remarque :

1. $\mathcal{V}_A(a) = \{V \cap A, V \in \mathcal{V}(a)\}$.
2. $V \in \mathcal{V}_A(a) \iff \exists \varepsilon > 0, B(a, \varepsilon) \cap A \subset V$.

Définition 30: Ouverts relatifs à une partie

On appelle ouvert dans A ou relativement à A tout ensemble de la forme $A \cap \mathcal{O}$ où $\mathcal{O}$ est un ouvert de E .

Remarque :

1. $\emptyset$ et A sont des ouverts relatifs à A .
2. Si A est un ouvert de E alors les ouverts relatifs à A sont les ouverts de E contenus dans A .

Propriété 59

U est un ouvert relatif à A si, et seulement, si

$$\forall x \in U, \exists \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap A \subset U$$

Preuve:

$\Rightarrow$ Supposons que U est un ouvert relatif à A , alors il existe $\mathcal{O}$ ouvert de E tel que $U = A \cap \mathcal{O}$. Pour $x \in U$, alors $x \in \mathcal{O}$ et $x \in A$. Comme $\mathcal{O}$ est ouvert dans E , alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset \mathcal{O}$, puis $B(x, \varepsilon) \cap A \subset U$.
 $\Leftarrow$ Soit $x \in U$, alors il existe $\varepsilon_x > 0$ tel que $B(x, \varepsilon_x) \cap A \subset U$. Posons $\mathcal{O} = \bigcup_{x \in U} B(x, \varepsilon_x)$, alors $\mathcal{O}$ est un ouvert de E vérifiant $\mathcal{O} \cap A = U$.

Définition 31: Fermés relatifs à une partie

On appelle fermé dans A ou relativement à A tout ensemble de la forme $A \cap U$ où U est un fermé de E .

Remarque :

1. $\emptyset$ et A sont des fermés relatifs à A .
2. Le complémentaire dans A d'un fermé relatif à A est un ouvert relatif à A .
3. Si A est un fermé de E alors les fermés relatifs à A sont les fermés de E contenus dans A .

Propriété 60: Caractérisation séquentielle des fermés

Soit U une partie de A . Les assertions suivantes sont équivalentes

1. U est fermé relativement à A .
2. Toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de U qui converge dans A , sa limite appartient à U .

IV Étude locale d'une application, continuité

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, A une partie de E et $f : A \subset E \rightarrow F$ une application. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés, A une partie de E , $f : A \subset E \rightarrow F$ une application. ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

IV.1 Limites**Définition 32: limite d'une fonction en un point**

Soit $a \in \overline{A}$ et $\ell \in F$.

On dit que f admet pour limite $\ell \in F$ en a (ou au point a) selon A , lorsque

$$\|f(x) - \ell\|_F \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} 0$$

Autrement-dit $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0$ tel que $\|x - a\|_E < \alpha$ et $x \in A$, alors $\|f(x) - \ell\|_F < \varepsilon$.

Propriété 61

Si f admet une limite ℓ en $a \in \overline{A}$ selon A , alors ℓ est unique et on le note $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ou $\lim_a f(x)$.

On note aussi $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$.

Preuve:

Preuve epsilonlesque

Propriété 62: Caractérisation séquentielle

Soit $a \in \overline{A}$ et $\ell \in F$. Les assertions suivantes sont équivalentes

1. $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) = \ell$
2. Toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers a , la suite $(f(x_n))_n$ converge vers ℓ

Preuve:

1 $\Rightarrow$ 2) Supposons que f tend vers ℓ en a et soit (x_n) une suite d'éléments de A tendant vers a . Pour $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in A, \quad \|x - a\|_E < \eta \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_F < \varepsilon.$$

Comme $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel $\|x_n - a\|_E < \eta$. Finalement, pour tout $n \geq N$, on a $\|x_n - a\| < \eta$, ce qui entraîne $\|f(x_n) - \ell\|_F < \varepsilon$.

Alors $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$

2 ⇒ 1) *Raisonnons par contraposée. On suppose que f ne tend pas vers ℓ , alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que*

$$\forall \alpha > 0, \quad \exists x \in A, \quad \|x - a\|_E < \alpha \text{ et } \|f(x) - \ell\| \geq \varepsilon$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, choisissons un élément $x_n \in A$ tel que $\|x_n - a\| < \frac{1}{n}$ et $\|f(x_n) - \ell\|_F \geq \varepsilon$. La suite (x_n) converge vers a mais la suite $(f(x_n))$ n'admet pas ℓ pour limite

L'équivalence est achevée.

Remarque :

La notion de limite est une notion topologique elle ne dépend pas des normes équivalentes

Méthode: Pour montrer que f n'admet pas de limite en a ?

On procède de l'une des deux façons suivantes

- Chercher $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$ et $(f(x_n))$ diverge.
- Chercher $(x_n), (y_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telles que $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$ et $y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$ mais $(f(x_n))$ et $(f(y_n))$ ne tendent pas vers la même limite.

Exemple

Étudions les limites en $(0,0)$ de la fonction $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \mapsto \frac{xy}{x^2 + y^2}$

$$f\left(\frac{1}{n}, 0\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \text{ et } f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{2}$$

Propriété 63: Domination

Soit $f : D \subset E \rightarrow F$, $A \subset D$ et $a \in \overline{A}$. On suppose qu'il existe $W \in \mathcal{V}_A(a)$ et $g : W \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} \forall x \in W, & \|f(x) - \ell\| \leq g(x) \\ g(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} 0 \end{cases}$$

$$\text{Alors } f(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} \ell$$

Remarque :

Ce théorème généralise le théorème des gendarmes dans le cas réel

Exemple

$\mathbb{R}^2$ muni de $\|\cdot\|_{\infty}$.

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

Montrons que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$.

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on a $|xy| \leq x^2 + y^2$, donc

$$\left| \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \right| \leq |y| \leq \|(x,y)\|_{\infty} \xrightarrow[(x,y) \rightarrow (0,0)]{} 0$$

Propriété 64: Fonctions coordonnées

Si F est de dimension finie $p \geq 1$ et $\beta = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F .

Si $f : A \subset E \rightarrow F$ est donnée par ses fonctions coordonnées $(f_1, \dots, f_p)$, alors f admet une limite $\ell = \sum_{i=1}^p \ell_i e_i$ en a suivant A si, et seulement si, chaque f_i , $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, admet ℓ_i limite en a suivant A . Dans ce cas :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \sum_{i=1}^p \lim_{x \rightarrow a} f_i(x) e_i$$

Preuve:

Caractérisation séquentielle

Propriété 65: Fonctions composantes

Si $F = F_1 \times \cdots \times F_p$ est un produit d'espaces vectoriels normés et $f : A \subset E \rightarrow F$ est donnée par ses applications composantes : $x \mapsto f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$ alors f admet une limite ℓ en a suivant A si, et seulement si, chaque f_i , $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, admet une limite ℓ_i en a suivant A . Dans ce cas :

$$\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p) \quad \text{c'est-à-dire} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f_1(x), \dots, \lim_{x \rightarrow a} f_p(x) \right)$$

Preuve:

Caractérisation séquentielle

Propriété 66: Opérations algébriques

Soient $f, g : A \subset E \rightarrow F$, $a \in \bar{A}$ et $\alpha \in \mathbb{K}^A$

1. Si $f \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} \ell$ et $g \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} \ell'$ alors $f + g \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} \ell + \ell'$.

Si de plus F est une algèbre normée alors $f \cdot g \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} \ell \cdot \ell'$

2. Si $\alpha \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} \lambda$ et $f \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} \ell$ alors $\alpha f \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} \lambda \cdot \ell$

3. Si $\alpha \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} \lambda \in \mathbb{K}^*$, il existe $W \in \mathcal{V}_A(a)$ sur lequel α ne s'annule pas et $\frac{1}{\alpha} \xrightarrow[x \in W]{x \rightarrow a} \frac{1}{\lambda} \in \mathbb{K}^*$

Preuve:

Utiliser la caractérisation séquentielle

Propriété 67: Composition

Soient $f : A \subset E \rightarrow F$ et $g : B \subset F \rightarrow G$ telles que $f(A) \subset B$ et a adhérent à A .

Si $f \xrightarrow[x \rightarrow a]{} b$ et $g \xrightarrow[x \rightarrow b]{} \ell$, alors $g \circ f \xrightarrow[x \rightarrow a]{} \ell$

Preuve:

Par la caractérisation séquentielles des limites.

Notons que b est adhérent à B car $b = \lim_a f$ est adhérent à $f(A)$ et $f(A) \subset B$.**Corollaire 4**

Si $f \xrightarrow[x \rightarrow a]{} \ell$, alors $\|f\| \xrightarrow[x \rightarrow a]{} \|\ell\|$

Définition 33: Extension $F = \mathbb{R}$, $\ell = \pm\infty$

- On dit que f tend vers $+\infty$ en a selon A , lorsque pour tout $M \in \mathbb{R}$ il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in A$, $\|x - a\| < \eta \Rightarrow f(x) \geq M$
- On dit que f tend vers $-\infty$ en a selon A , lorsque pour tout $M \in \mathbb{R}$ il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in A$, $\|x - a\| < \eta \Rightarrow f(x) \leq M$

Exemple

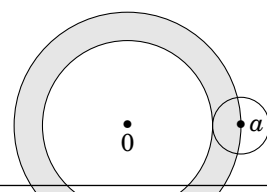
Soit

$$f : \begin{cases} B(0,1) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{1}{1 - \|x\|} \end{cases}$$

Soit $a \in S(0,1) \subset B_f(0,1)$, alors $f(x) \xrightarrow[x \in B(0,1)]{x \rightarrow a} +\infty$

Soit $A \in]1, +\infty[$, pour $x \in B(0,1)$, on a

$$\frac{1}{1 - \|x\|} \geq A \iff \|x\| \geq 1 - \frac{1}{A}$$



Soit $r = \frac{1}{A}$, alors pour $x \in B(a, r) \cap B(0, 1)$, on a

$$\|x\| \geq \|a\| - \|x - a\| \geq 1 - r$$

Donc $f(x) \xrightarrow[\substack{x \rightarrow a \\ x \in B(0,1)}}{+ \infty}.$

Définition 34: Extension $E = \mathbb{R}$, $a = \pm\infty$

- On dit que f tend vers ℓ en $+\infty$, lorsque pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in A$, $x \geq A \Rightarrow \|f(x) - \ell\| < \varepsilon$
- On dit que f tend vers ℓ en $-\infty$, lorsque pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in A$, $x \leq -A \Rightarrow \|f(x) - \ell\| < \varepsilon$

Définition 35: Cas où $\|x\| \rightarrow +\infty$ A est non borné.

On dit que $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = b$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in A$; $\|x\| \geq M \Rightarrow \|f(x) - b\| < \varepsilon$

IV.2 Continuité

Définition 36: Continuité sur une partie A

Soit $f : A \subset E \rightarrow F$ et $a \in A$.

- On dit que f est continue en a si $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = f(a)$
- On dit que f est continue sur A si elle est continue en chaque point de A .

Notation :

$\mathcal{C}(A, F)$ désigne l'ensemble des fonctions continues de A à valeurs dans F

Exemple

Les fonctions constantes sont continues

Exemple

L'application Id_E est continue

Exemple

La fonction $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ est continue

Propriété 68

Soit $f : A \subset E \rightarrow F$ et $a \in A$. Les assertions suivantes sont équivalentes

1. f est continue en a
2. $\forall (x_n) \in A^{\mathbb{N}}, (x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(a)).$

Propriété 69

1. $\mathcal{C}(A, F)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel
2. Si F est une algèbre normée, alors $\mathcal{C}(A, F)$ est une $\mathbb{K}$ -algèbre

Preuve:

Par opérations sur les limites en tout point $a \in A$

Propriété 70

Soit $\alpha : A \subset E \rightarrow \mathbb{K}$ et $f : A \subset E \rightarrow F$ deux fonctions continues. Alors

1. $\alpha \cdot f$ est continue sur A
2. Si α ne s'annule pas sur A , alors $\frac{1}{\alpha}f$ est continue sur A

Preuve:

Par opérations sur les limites en tout point $a \in A$.

Propriété 71

Soit $f : A \subset E \rightarrow F$ et $g : B \subset F \rightarrow G$ telles que $f(A) \subset B$.

Si f et g sont continues alors $g \circ f$ est continue.

Preuve:

Par opérations sur les limites en tout point $a \in X$.

Propriété 72

Soit $f : A \subset E \rightarrow F$

1. Si F est un espace normé produit alors f est continue si, et seulement si, ses fonctions composantes le sont.
2. Si F est de dimension finie alors f est continue si, et seulement si, ses fonctions coordonnées dans une base de F le sont.

IV.3 Fonctions lipschitziennes**Définition 37: Fonctions k -lipschitziennes**

Soit $f : A \subset E \rightarrow F$ et $k \in \mathbb{R}^+$. On dit que f est k -lipschitzienne si :

$$\forall (x, y) \in A^2, \|f(x) - f(y)\|_F \leq k \|x - y\|_E$$

Lorsque $0 \leq k < 1$, on parle d'une fonction contractante

Exemple: Norme

Soit E un espace vectoriel normé, l'application $x \mapsto \|x\|$ est 1-lipschitzienne

En effet, pour tout $x, y \in E$

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

Exemple: Distance

Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé, l'application $x \mapsto d(x, A)$ est 1-lipschitzienne

En effet, pour tout $x, y \in E$

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq \|x - y\|$$

Propriété 73

Toute application lipschitzienne est continue

Preuve:

Soit $f : A \subset E \rightarrow F$ une fonction lipschitzienne. Il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x, y \in A, \|f(y) - f(x)\|_F \leq k \|y - x\|_E$$

Soit $a \in A$.

Quand $x \rightarrow a$, $\|f(y) - f(x)\|_F \leq k \|y - x\|_E \rightarrow 0$ donc $f(x) \rightarrow f(a)$.

Ainsi f est continue en chaque $a \in A$.

Exemple

Soit A une partie non vide de E ; L'application $d : x \mapsto d(x, A)$ est continue

Car l'application $d_A : x \mapsto d(x, A)$ est lipschitzienne

Exemple: Base duale

E est de dimension finie et $B = (e_1, \dots, e_p)$ est une base de E . On munit E de la norme $\|x\| = \max(|x_i|)$, alors $e_i^* : x \mapsto x_i$ est continue

Pour tout $x, y \in E$, $|e_i^*(x) - e_i^*(y)| \leq \|x - y\|$. Ainsi les formes linéaires composantes dans une base sont lipschitziennes et donc continues.

Exemple

$$E_{ij}^* : \begin{cases} M_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow \mathbb{K} \\ (a_{k\ell})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq \ell \leq n}} & \longmapsto a_{ij} \end{cases} \text{ est continue}$$

Exemple

Soient $(E_1, N_1), \dots, (E_p, N_p)$ des espaces normés et $(E, \|\cdot\|)$ l'espace normé produit.

Pour $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, l'application $p_i : x = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_p) \mapsto x_i$ est continue

En effet p_i est lipschitzienne

Exemple

$$f : \begin{cases} M_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow \mathbb{K} \\ M & \longmapsto \det(M) \end{cases} \text{ est continue}$$

En effet E_{ij}^* est continue et $\det = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n E_{i\sigma(i)}^*$

Exemple

Tout fonction polynômiale sur $\mathbb{K}^p$ est continue

Exemple

L'application $M \mapsto \text{com}(M)$ est continue de $M_p(K)$ vers lui-même.

En effet, ses applications coordonnées dans la base canonique sont sommes et produit de fonctions continues.

Exemple

L'application $M \mapsto M^{-1}$ est continue sur $\text{GL}_p(\mathbb{K})$.

En effet, $M^{-1} = \frac{1}{\det M} {}^t \text{com}(M)$ et donc les coefficients de M^{-1} sont des sommes et produits en les coefficients de M .

IV.4 Applications linéaires continues

Théorème 4: Théorème fondamental

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. u est continue sur E ;
2. $\exists k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall x \in E, \|u(x)\|_F \leq k\|x\|_E$.

Preuve:

1 $\Rightarrow$ 2) u est continue en 0 donc $\exists \alpha > 0, \forall x \in E, \|x\| \leq \alpha \Rightarrow \|u(x)\| \leq 1$.

Soit $x \in E \setminus \{0\}$, le vecteur $\alpha \frac{x}{\|x\|_E}$ est de norme α , donc $\left\| u \left(\alpha \frac{x}{\|x\|_E} \right) \right\|_F \leq 1$. Par homogénéité de la norme et la linéarité de u , on obtient

$$\frac{\alpha}{\|x\|_E} \|u(x)\|_F \leq 1$$

Soit $\|u(x)\|_F \leq \frac{1}{\alpha} \|x\|_E$. Une telle inégalité est vraie pour $x = 0$.

2 $\Rightarrow$ 1) Toute fonction lipschitzienne est continue

Notation :

On note

- On note $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'ensemble formé des applications linéaires continues de E vers F .
- $\mathcal{L}_c(E)$ l'ensemble formé des endomorphismes continus de E

Exemple

L'application

$$\sigma : \begin{cases} E \times E & \longrightarrow E \\ (x, y) & \longmapsto x + y \end{cases}$$

est continue

Méthode: Pour montrer qu'une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ n'est pas continue ?

On construit une suite (x_n) d'éléments de $E \setminus \{0\}$ telle que $\frac{\|u(x_n)\|}{\|x_n\|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$

Exemple

Soient $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{K})$ et $u : E \rightarrow \mathbb{K}$ définie par $u(f) = f(1)$.

Étudions la continuité de u , pour les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$.

Indication : Considérer la suite $f_n : t \mapsto t^n$

u est une forme linéaire sur E .

- Cas $\|\cdot\|_\infty$.

Pour tout $f \in E, |u(f)| = |f(1)| \leq \|f\|_\infty$ donc u est continue.

- Cas $\|\cdot\|_1$.

Pour $f_n : t \mapsto t^n, |u(f_n)| = 1$ et $\|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1}$. Par suite $\frac{|u(f_n)|}{\|f_n\|_1} = n+1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, donc u n'est pas continue.

Propriété 74

Si E est de dimension finie alors $\mathcal{L}(E, F) = \mathcal{L}_c(E, F)$.

Preuve:

Si $E = \{0\}$ alors $f = 0$ donc f est continue sur E .

Sinon soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Soit $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$ donc

$$\|f(x)\| = \left\| \sum_{k=1}^n x_k f(e_k) \right\| \leq \sum_{k=1}^n |x_k| \|f(e_k)\| \leq \left(\sum_{k=1}^n \|f(e_k)\| \right) \|x\|_\infty$$

On déduit que f est continue sur E .

IV.5 Applications multilinéaires

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés et $B : E \times F \rightarrow G$ bilinéaire.

Propriété 75

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. B est continue sur $E \times F$.
2. $\exists k \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in E, \forall y \in F, \|B(x, y)\|_G \leq k \|x\|_E \|y\|_F$.

Preuve:

1 $\Rightarrow$ 2) B est continue en $(0, 0)$ donc $\exists \alpha > 0, \forall (x, y) \in E \times F, \|(x, y)\|_\infty \leq \alpha \Rightarrow \|B(x, y)\|_G \leq 1$.

Soit $x \in E \setminus \{0\}$ et $y \in F \setminus \{0\}$, le vecteur $\alpha \cdot \left(\frac{x}{\|x\|_E}, \frac{y}{\|y\|_F} \right)$ est de norme α , donc $\left\| B \left(\alpha \frac{x}{\|x\|_E}, \alpha \frac{y}{\|y\|_F} \right) \right\|_G \leq 1$. Par homogénéité de la norme et la linéarité de u , on obtient

$$\frac{\alpha^2}{\|x\|_E \cdot \|y\|_F} \|B(x, y)\|_G \leq 1$$

Soit $\|B(x, y)\|_G \leq \frac{1}{\alpha^2} \|x\|_E \cdot \|y\|_F$. Une telle inégalité est vraie pour $x = 0$ ou $y = 0$.

2 $\Rightarrow$ 1) Soit $(x, y) \in E \times F$ et $(x_n, y_n) \in (E \times F)^{\mathbb{N}}$ telle que $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$ donc $x_n \rightarrow x$ et $y_n \rightarrow y$. On a $B(x_n, y_n) - B(x, y) = B(x_n, y_n) - B(x_n, y) + B(x_n, y) - B(x, y) = B(x_n, y_n - y) + B(x_n - x, y)$ donc $\|B(x_n, y_n) - B(x, y)\| \leq \|B(x_n, y_n - y)\| + \|B(x_n - x, y)\| \leq k \|x_n\| \|y_n - y\| + k \|y\| \|x_n - x\|$. Or $x_n \rightarrow x$ et $y_n \rightarrow y$ donc $x_n - x \rightarrow 0$, $y_n - y \rightarrow 0$ et (x_n) borné donc $\|B(x_n, y_n) - B(x, y)\| \rightarrow 0$ d'où B est continue en (x, y) . On déduit que B est continue sur $E \times F$.

Exemple

L'application, produit externe sur E , $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ est continue sur $\mathbb{K} \times E$. En effet, c'est une application bilinéaire sur $\mathbb{K} \times E$ et on a $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \|\lambda x\| \leq |\lambda| \|x\|$.

Exemple

Si E est préhilbertien réel. Le produit scalaire $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ est continue sur E^2 . En effet, c'est une application bilinéaire sur E^2 et on a, d'après Cauchy-Schwarz, $\forall x, y \in E, |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$.

Exemple

On suppose que E une algèbre normée. L'application produit $(x, y) \mapsto xy$ est continue sur E^2 . En effet, c'est une application bilinéaire sur E^2 et on a

$$\forall x, y \in E, \|xy\| \leq \|x\| \|y\|$$

Propriété 76

Si E et F sont de dimensions finies alors toute application bilinéaire de $E \times F$ vers G est continue.

Preuve:

Si $E = \{0\}$ ou $F = \{0\}$ alors $B = 0$ donc B est continue sur $E \times F$.

Sinon soit $B = (e_1, \dots, e_m)$ une base de E et $B' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base de F .

Soit $x = \sum_{k=1}^m x_k e_k$ et $y = \sum_{l=1}^n y_l \varepsilon_l$ donc

$$\begin{aligned} \|B(x, y)\| &= \left\| \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n x_k y_l B(e_k, \varepsilon_l) \right\| \\ &\leq \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n |x_k| |y_l| \|B(e_k, \varepsilon_l)\| \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \|B(e_k, \varepsilon_l)\| \right) \|x\|_\infty \|y\|_\infty \end{aligned}$$

Or toutes les normes sont équivalentes en dimension finie donc $\exists \alpha, \beta > 0$ tel que $\forall x \in E, \forall y \in F, \|x\|_\infty \leq \alpha \|x\|$ et $\|y\|_\infty \leq \beta \|y\|$ d'où

$$\|B(x, y)\| \leq \alpha \beta \left(\sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \|B(e_k, \varepsilon_l)\| \right) \|x\| \|y\|$$

On déduit que B est continue sur $E \times F$.

Propriété 77

Soient $E_1, \dots, E_n, F$ des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés. Si $E_1, \dots, E_n$ sont de dimensions finies alors toute application multilinéaire $M : E_1 \times \dots \times E_n \longrightarrow F$ est continue. Au quel cas

$$\exists k \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n, \|M(x_1, \dots, x_n)\| \leq k \|x_1\| \dots \|x_n\|$$

IV.6 Continuité et densité**Propriété 78: Continuité et densité**

Soit $f, g : A \subset E \longrightarrow F$ deux fonctions continues. Si B est dense dans A et $f|_B = g|_B$, alors f et g sont égales.

Preuve:

Soit $x \in A$. Il existe $(x_n) \in B^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = g(x_n)$ donc, par passage à la limite, on obtient $f(x) = g(x)$

Exemple

Déterminons les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Remarquons que αId est solution du problème posé.

Soit f une solution. Alors f est un morphisme de groupes additifs, donc

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{Z} : \quad f(na) = nf(a)$$

Soit $x = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. On a $f\left(\frac{p}{q}\right) = pf\left(\frac{1}{q}\right)$ et $qf\left(\frac{1}{q}\right) = f(1)$, donc $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}f(1)$. En posant $\alpha = f(1)$, $f(x) = \alpha x$.

Les deux fonctions f et $x \longmapsto \alpha x$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et coïncident sur la partie $\mathbb{Q}$ dense dans $\mathbb{R}$, elles sont donc égales.

IV.7 Continuité et topologie**Propriété 79: Continuité et topologie**

Soit $f : A \subset E \longrightarrow F$. Les trois affirmations suivantes sont équivalentes :

1. f est continue sur A ;
2. l'image réciproque de tout ouvert de F est un ouvert de A ;
3. l'image réciproque de tout fermé de F est un fermé de A .

Preuve:

1 $\Rightarrow$ 2) Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de F .

- Si $f^{-1}(\mathcal{O}) = \emptyset$ alors $f^{-1}(\mathcal{O})$ est un ouvert relatif à A .
- Sinon, soit $x \in f^{-1}(\mathcal{O})$ donc $f(x) \in \mathcal{O}$ donc $\exists \varepsilon > 0, B(f(x), \varepsilon) \subset \mathcal{O}$. On a f est continue en x donc $\exists \eta > 0, \forall y \in B(x, \eta) \cap A, f(y) \in B(f(x), \varepsilon) \subset \mathcal{O}$ d'où $B(x, \eta) \cap A \subset f^{-1}(\mathcal{O})$ et par suite $f^{-1}(\mathcal{O})$ est un ouvert relatif à A .

2 $\Rightarrow$ 1) Soit $a \in A$ et $\varepsilon > 0$. La boule $B(f(a), \varepsilon)$ est un ouvert de F donc $f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$ est un ouvert relatif à A . On a $a \in f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$ donc $\exists \eta > 0, B(a, \eta) \cap A \subset f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$ d'où $f(B(a, \eta) \cap A) \subset B(f(a), \varepsilon)$. On déduit que $\forall x \in A, \|x - a\| < \eta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$ donc f est continue en a et par suite f est continue sur A .

2 $\Rightarrow$ 3) Soit U un fermé de F donc $\mathcal{C}_F^U$ est un ouvert de F d'où $f^{-1}(\mathcal{C}_F^U)$ est un ouvert relatif à A . Or $f^{-1}(\mathcal{C}_F^U) = \mathcal{C}_A^{f^{-1}(U)}$ donc $f^{-1}(U)$ est un fermé relatif à A .

3 $\Rightarrow$ 2) Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de F donc $\mathcal{C}_F^{\mathcal{O}}$ est un fermé de F d'où $f^{-1}(\mathcal{C}_F^{\mathcal{O}})$ est un fermé relatif à A . Or $f^{-1}(\mathcal{C}_F^{\mathcal{O}}) = \mathcal{C}_A^{f^{-1}(\mathcal{O})}$ donc $f^{-1}(\mathcal{O})$ est un ouvert relatif à A .

Remarque :

Le résultat est faux en terme d'image directe

Conséquence 2

Soient $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Les ensembles $\{x \in E / f(x) = \alpha\}$, $\{x \in E / f(x) \leq \alpha\}$ et $\{x \in E / f(x) \geq \alpha\}$ sont fermés.
2. Les ensembles $\{x \in E / f(x) \neq \alpha\}$, $\{x \in E / f(x) < \alpha\}$ et $\{x \in E / f(x) > \alpha\}$ sont ouverts.

Preuve:

Il suffit de remarquer $]-\infty, \alpha]$, $[\alpha, +\infty[$ et $\{\alpha\}$ sont des fermés et que $]-\infty, \alpha[$, $]\alpha, +\infty[$ sont des ouverts

Exemple

$GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert et $SL_n(\mathbb{K})$ est un fermé de $M_n(\mathbb{K})$.

En effet $GL_n(\mathbb{K}) = \det^{-1}(\mathbb{K}^*)$ et $\det$ est continue et $\mathbb{K}^*$ est un ouvert. De même, on obtient que $SL_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) / \det A = 1\}$ est un fermé.

Exemple

$\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) / {}^tAA = I_n\}$ est une partie fermée.

En effet $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{I_n\})$ avec $f : A \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto {}^tAA$ continue et $\{I_n\}$ fermé.

V Compacts**V.1 Compacts**

Soit C une partie de E

Définition 38: Partie compacte

On dit que C est compacte dans E si elle est vide ou si toute suite d'éléments de C admet une valeur d'adhérence dans C .

Exemple

1. Les segments de $\mathbb{R}$ sont des compacts dans $\mathbb{R}$.
2. Les disques fermés de $\mathbb{C}$ sont des compacts dans $\mathbb{C}$.
3. Une partie finie est compacte.

Propriété 80

Si N_1 et N_2 sont deux normes équivalents sur E . Alors tout compact dans E pour N_1 est compact pour N_2 .

Propriété 81

Tout compact est nécessairement fermé et borné.

Preuve:

Soit C une partie compact de E

- Montrons que C est fermé.

Soit $(a_n) \in C^{\mathbb{N}}$ une suite convergente. L'ensemble C est compact, donc on peut extraire une suite $(a_{\varphi(n)})$ de (a_n) qui converge dans C . Or (a_n) et $(a_{\varphi(n)})$ ont la même limite donc (a_n) converge dans C d'où C est fermé.

- Montrons, par absurde, que C est bornée.

Supposons C non bornée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in C$ tel que $\|x_n\| > n$. En faisant varier n , cela détermine une suite $(x_n) \in C^{\mathbb{N}}$ telle que $\|x_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Or cette suite n'a pas de valeurs d'adhérence. Absurde.

Propriété 82: Les compacts d'un espace de dimension finie

Les compacts d'un espace vectoriel normé de dimension finie sont ses fermés bornés.

Preuve:

Tout compact est fermé et borné.

Inversement soit C une partie fermée et bornée de E et montrons que C est un compact.

Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de C , alors $(x_n)_{n \geq 0}$ est bornée, comme E est de dimension finie alors, d'après le théorème de Bolzano Weierstrass, la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ admet une valeur d'adhérence ℓ et soit $(x_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$ une suite extraite telle que $x_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$. Comme C est un fermé, donc $\ell \in C$

Propriété 83: Les fermés d'un compact

Si C est compact alors tout fermé de C est compact dans E .

Preuve:

Soit $F \subset C$ fermé et (x_n) une suite d'éléments de F . On a (x_n) est une suite d'éléments de C compact donc on peut extraire de (x_n) une suite $(x_{\varphi(n)})$ convergente.

On a $(x_{\varphi(n)})$ est une suite convergente à éléments dans F fermé donc sa limite est dans F d'où F est compact.

Propriété 84

Une suite d'éléments d'une partie compacte converge si, et seulement si, elle admet une unique valeur d'adhérence

Preuve:

Toute suite convergente admet une seule valeur d'adhérence

Inversement soit ℓ cette valeur d'adhérence. Supposons que la suite (u_n) ne converge pas vers ℓ . Alors il existe $\varepsilon > 0$ et $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|x_{\varphi(n)} - \ell\| > \varepsilon$. La suite d'éléments $(x_{\varphi(n)})$ du compact C admet une valeur d'adhérence ℓ' qui est nécessairement distincte de ℓ car $\|\ell' - \ell\| \geq \varepsilon$. Mais ℓ' est également une valeur d'adhérence de la suite (x_n) (car une suite extraite d'une suite extraite de (x_n) est encore une suite extraite de (x_n)), d'où la contradiction.

Attention

La réciproque de cette propriété est fausse. Voir l'exemple ci-dessous

Exemple

On considère l'espace $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. L'ensemble $A = B_f(0, 1)$ est fermée et bornée, mais elle n'est pas compacte

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = X^n \in A$. Soit $\varphi_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante. On a :

$$\|P_{\varphi(n+1)} - P_{\varphi(n)}\|_\infty = 1 \not\rightarrow 0$$

Donc $(P_{\varphi(n)})$ est divergente

Remarque :

1. Toute partie non bornée de E n'est pas compacte.
2. On suppose que $E \neq \{0\}$. Tout sous-espace vectoriel non nul de E n'est pas compact. En particulier, E n'est pas compact.

Propriété 85: Produit d'une famille finie de compacts

Si A est compact de E et B compact de F alors $A \times B$ est un compact de $E \times F$.

Preuve:

Soit (a_n, b_n) un compact de $A \times B$ donc $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ et $(b_n) \in B^{\mathbb{N}}$. On a A compact donc on peut extraire de (a_n) une suite convergente $(a_{\varphi(n)})$ dans A . On pose $a = \lim a_{\varphi(n)}$.

On a B compact donc on peut extraire de $(b_{\varphi(n)})$ une suite convergente $(b_{\varphi \circ \psi(n)})$ dans B . On pose $b = \lim a_{\varphi \circ \psi(n)}$. On a $(a_{\varphi \circ \psi(n)})$ est une suite extraite de $(a_{\varphi(n)})$. Or $(a_{\varphi(n)})$ est convergente donc $(a_{\varphi \circ \psi(n)})$ converge et on a $a = \lim a_{\varphi \circ \psi(n)}$. On a $(a_{\varphi \circ \psi(n)})$ et $(b_{\varphi \circ \psi(n)})$ convergent donc $(a_{\varphi \circ \psi(n)}, b_{\varphi \circ \psi(n)})$ converge de limite $(a, b) \in A \times B$. On a $(a_{\varphi \circ \psi(n)}, b_{\varphi \circ \psi(n)})$ est une suite convergente dans $A \times B$ extraite de (a_n, b_n) donc $A \times B$ est compact.

Corollaire 5

Soit $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels normés et $A_1 \subset E_1, \dots, A_p \subset E_p$ compacts donc $A_1 \times \dots \times A_p$ est compact dans $E_1 \times \dots \times E_p$.

Preuve:

Par récurrence

V.2 Image d'un compact par une fonction continue**Propriété 86**

Soit $f \in \mathcal{C}(E, F)$ et A un compact de E , alors $f(A)$ est compact de F .

Preuve:

Soit (y_n) une suite d'éléments dans $f(A)$ donc il existe une suite (x_n) d'éléments dans A telle que $\forall n \in \mathbb{N}, y_n = f(x_n)$. A étant compact donc on peut extraire de (x_n) une suite convergente $(x_{\varphi(n)})$. Posons $x = \lim x_{\varphi(n)}$. l'application f est continue sur A et $(x_{\varphi(n)})$ est convergente donc $(f(x_{\varphi(n)}))$ est convergente de limite $f(x) \in f(A)$. On déduit que $(y_{\varphi(n)})$ est convergente dans $f(A)$ d'où $f(A)$ est compact.

Exemple: Mines MP Maths 2-2017

Soit K un sous-ensemble compact de E et $\text{Conv}(K)$ son enveloppe convexe. On appelle que $\mathcal{H}$ est l'ensemble des $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ tels que $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$.

1. Définir une application ϕ de $\mathbb{R}^{n+1} \times E^{n+1}$ dans E telle que $\text{Conv}(K) = \phi(\mathbb{R}^{n+1} \times \mathcal{H})$.
2. En déduire que $\text{Conv}(K)$ est un sous-ensemble compact de E .

En prenant $\Phi : (\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}, a_1, \dots, a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \times E^{n+1} \mapsto \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i a_i \in E$, on a $\text{Conv}(K) = \phi(\mathbb{R}^{n+1} \times \mathcal{H})$

On remarque que ϕ est continue par théorèmes généraux. De même les applications notées $\varphi_i : (\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \lambda_i$ pour $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ et $S : (\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k$ sont continues car linéaires.

$$\text{Or } \mathcal{H} = \left(\bigcap_{i=1}^{n+1} \varphi_i^{-1}(\mathbb{R}^+) \right) \cap S^{-1}(\{1\})$$

donc $\mathcal{H}$ est un fermé de $\mathbb{R}^{n+1}$ par intersection et car une image réciproque par une application continue d'un fermé est un fermé de l'ensemble de départ.

De plus $\mathcal{H}$ est borné car $\mathcal{H} \subset [0, 1]^{n+1}$

Ainsi $\mathcal{H}$ est une partie compacte car fermée-bornée en dimension finie

Par produit de compacts, $\mathcal{H} \times K^{n+1}$ est un compact.

Par image d'une partie compacte par une application continue $\text{Conv}(K)$ est un sous-ensemble compact de E

Attention

L'image réciproque d'un compact par une application continue n'est pas forcément un compact. En effet, pour $f : x \mapsto \sin x$ on a $[-1, 1]$ est compact dans $\mathbb{R}$ alors que $f^{-1}([-1, 1]) = \mathbb{R}$ n'est pas compact dans $\mathbb{R}$ car non borné.

Propriété 87

On suppose que A est compact et $f : A \subset E \rightarrow F$ continue sur A , alors $f(A)$ est borné et il existe $a, b \in A$ tels que $\|f(a)\| = \inf_{x \in A} \|f(x)\|$ et $\|f(b)\| = \sup_{x \in A} \|f(x)\|$.
(On dit que f atteint les bornes de sa norme).

Preuve:

L'ensemble $f(A)$ est compact donc borné. Soit $M = \sup\{\|f(x)\| \mid x \in A\}$ donc $\exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $\|f(a_n)\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} M$.

A étant compact donc on peut extraire de (a_n) une suite $(a_{\varphi(n)})$ convergente dans A . Posons $a = \lim a_{\varphi(n)}$ donc $a \in A$.

la fonction f est continue sur A donc $\|f(a_{\varphi(n)})\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \|f(a)\|$. D'autre part, on a $\|f(a_n)\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} M$ donc $\|f(a_{\varphi(n)})\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} M$ d'où $\|f(a)\| = M$ par unicité de la limite.

Propriété 88

Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continue où A est un compact d'un espace vectoriel normé E , alors f est bornée et atteint ses bornes : Il existe $a, b \in A$ tel que $f(a) = \inf_{x \in A} f(x)$ et $f(b) = \sup_{x \in A} f(x)$

Preuve:

Soit $M = \sup\{f(x)/x \in A\}$ et $m = \inf\{f(x)/x \in A\}$ donc $\exists (a_n), (b_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tels que $f(a_n) \rightarrow m$ et $f(b_n) \rightarrow M$.
On a A compact donc on peut extraire de (a_n) et (b_n) deux suites $(a_{\varphi(n)})$ et $(b_{\psi(n)})$ convergentes dans A . Posons $a = \lim a_{\varphi(n)}$ et $b = \lim b_{\psi(n)}$ donc $a, b \in A$. On a f continue sur A donc $f(a_{\varphi(n)}) \rightarrow f(a)$ et $f(b_{\psi(n)}) \rightarrow f(b)$. D'autre part, on a $f(a_n) \rightarrow m$ et $f(b_n) \rightarrow M$ donc $f(a_{\varphi(n)}) \rightarrow m$ et $f(b_{\psi(n)}) \rightarrow M$ d'où $f(a) = m$ et $f(b) = M$ par unicité de la limite.

Exemple

Si A est un compact non vide de E , alors pour tout $x \in E$, il existe $x_0 \in A$ tel que $d(x, A) = d(x, x_0)$

V.3 Continuité uniforme**Définition 39**

On dit que l'application $f : A \subset E \rightarrow F$ est uniformément continue si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : \forall x, y \in A, \|x - y\| < \eta \implies \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$$

Propriété 89

Toute application lipschitzienne $f : A \subset E \rightarrow F$ est uniformément continue.

Preuve:

Si f est K -lipschitzienne, alors, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, on a l'implication :

$$\|x - y\| < \frac{\varepsilon}{1+K} \implies \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$$

Propriété 90: Caractérisation séquentielle de la continuité uniforme

$f : A \subset E \rightarrow F$ est uniformément continue sur A si, et seulement si,

$$\forall (x_n), (y_n) \in A^{\mathbb{N}}, x_n - y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \implies f(x_n) - f(y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Preuve:

$\Rightarrow$) Soit $(x_n), (y_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tels que $x_n - y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\varepsilon > 0$.

L'application f est uniformément continue sur A donc

$$\exists \eta \geq 0, \forall x, y \in A, (\|x - y\| \leq \eta \implies \|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon).$$

Comme $x_n - y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \|x_n - y_n\| \leq \eta,$$

d'où

$$\forall n \geq N, \|f(x_n) - f(y_n)\| \leq \varepsilon$$

et par suite $f(x_n) - f(y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

$\Leftarrow$) On suppose que f n'est pas uniformément continue sur A donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que, $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n, y_n \in A, \|x_n - y_n\| \leq \frac{1}{n+1}$ et $\|f(x_n) - f(y_n)\| \geq \varepsilon$ d'où $x_n - y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $f(x_n) - f(y_n) \not\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Absurde, donc f est uniformément continue sur A .

Remarque :

Si f est uniformément continue sur A alors f est continue sur A . La réciproque est fausse.

Méthode: Pour montrer que f n'est pas uniformément continue sur A ?

On cherche deux suites $(x_n), (y_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tels que $x_n - y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $f(x_n) - f(y_n) \not\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Exemple

Soit la fonction $f : x \mapsto x^2$. On a $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \rightarrow 0$ mais $f(\sqrt{n+1}) - f(\sqrt{n}) = (n+1) - n = 1 \neq 0$ donc f n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$. C'est aussi un exemple d'une fonction continue qui n'est pas uniformément continue.

Propriété 91

Toute application uniformément continue est évidemment continue

Attention

La réciproque est fautive comme le montrent les contre-exemples déjà vus dans le cadre des fonctions d'une variable réelle.

Théorème 5: de Heine

Toute fonction continue sur un compact est uniformément continue.

Preuve:

Supposons que f n'est pas uniformément convergente donc il existe deux suites $(x_n), (y_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telles que $x_n - y_n \rightarrow 0$ et $f(x_n) - f(y_n) \not\rightarrow 0$.

Quitte à remplacer (x_n, y_n) par une suite extraite il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f(x_n) - f(y_n) \geq \varepsilon$.

On a A compact donc $A \times A$ compact d'où on peut extraire de (x_n, y_n) une suite convergente $(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)})$ d'où $(x_{\varphi(n)})$ et $(y_{\varphi(n)})$ convergent. Posons $x = \lim x_{\varphi(n)}$ et $y = \lim y_{\varphi(n)}$. On a $x_n - y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ d'où $x = y$.

On a f est continue sur A donc $f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x) - f(y) = 0$. Absurde, car $f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)}) \geq \varepsilon > 0$ d'où f est uniformément continue sur A .

VI Connexité par arcs

VI.1 Définition et exemples

Soient E, F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés, $A \subset E$ et $a, b \in A$.

Définition 40: Partie connexe par arcs

- On appelle chemin de a à b dans A toute application continue $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$ telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.
- On dit que A est connexe par arcs si pour tous $x, y \in A$ il existe un chemin de x à y dans A .

Propriété 92

Soient $A \subset E$ et $B \subset F$ connexes par arcs alors $A \times B$ est connexes par arcs.

Preuve:

Soient $(a, b), (c, d) \in A \times B$ donc $a, c \in A$ et $b, d \in B$.

A est connexe par arcs donc $\exists \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow A$ continue tel que $\gamma_1(0) = a$ et $\gamma_1(1) = c$.

B est connexe par arcs donc $\exists \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow B$ continue tel que $\gamma_2(0) = b$ et $\gamma_2(1) = d$.

Posons $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ donc γ est définie de $[0, 1]$ vers $A \times B$ et continue sur $[0, 1]$. On a $\gamma(0) = (\gamma_1(0), \gamma_2(0)) = (a, b)$ et $\gamma(1) = (\gamma_1(1), \gamma_2(1)) = (c, d)$ donc γ est un chemin dans $A \times B$ de (a, b) à (c, d) d'où $A \times B$ est connexe par arcs.

Propriété 93

Soit A une partie d'espace vectoriel normé E . La relation $\mathcal{R}$ définie sur A par : pour tout $(x, y) \in A^2$

$$x \mathcal{R} y \iff \exists \gamma \in \mathcal{C}([0, 1], A), \begin{cases} \gamma(0) = x \\ \gamma(1) = y \end{cases}$$

est une relation d'équivalence

Preuve:

- $\sim$ est réflexive :
- $\sim$ est symétrique : Si $a \sim b$, alors il existe un chemin γ de a à b dans A alors l'application α définie sur $[0, 1]$ par

$\alpha(t) = \gamma(1-t)$ définit un chemin de b à a dans A . On l'appelle le chemin inverse de γ .

- $\sim$ est transitive : Si $a \sim b$ et $b \sim c$, alors il existe un chemin γ_1 de a à b dans A et un chemin γ_2 de b à c dans A . On considère l'application γ définie sur $[0, 1]$ par

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_2(2t-1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Définition 41

Soit $a \in A$. La classe de a pour cette relation est appelée la composante connexe par arcs de a dans A et notée $\mathcal{C}(a)$.

Propriété 94

Une composante connexe par arcs est connexe par arcs.

Remarque :

1. Si A est connexe par arcs alors $\forall a \in A, \mathcal{C}(a) = A$.
2. $\forall a, b \in A$ alors $\mathcal{C}(a) = \mathcal{C}(b)$ ou $\mathcal{C}(a) \cap \mathcal{C}(b) = \emptyset$.
3. L'ensemble des composantes connexes sur A forme une partition de A .

Propriété 95

Tout convexe est connexe par arcs.

Preuve:

Soit $x, y \in A$. On a A convexe donc $\forall t \in [0, 1], (1-t)x + ty \in A$.

Considérons alors l'application $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$ définie par $\gamma(t) = (1-t)x + ty$. On a γ est continue, $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$ donc A est connexe par arcs.

Remarque :

1. Tout sous-espace vectoriel de E est convexe donc connexe par arcs. En particulier, E est connexe par arcs.
2. Les boules ouvertes, fermées sont connexes par arcs.

Propriété 96

Les connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Preuve:

On sait que les intervalles sont convexes donc connexes par arcs dans $\mathbb{R}$.

Réciproquement, soit $I \subset \mathbb{R}$ connexe par arcs.

Soit $x, y \in I$. L'ensemble I est connexe par arcs donc $\exists \gamma : [0, 1] \rightarrow I$ continue telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires $[x, y] \subset \gamma([0, 1]) \subset I$ d'où $[x, y] \subset I$. On déduit que I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition 42: Partie étoilée

A une partie d'un espace vectoriel normé E est dite étoilée si $\exists a \in A$ tel que

$$\forall b \in A, [a, b] \subset A$$

Exemple

L'ensemble $M_n(\mathbb{K}) \setminus \text{GL}_n(\mathbb{K})$ est étoilé en O_n

Propriété 97

Toute partie étoilée est connexe par arcs

VI.2 Continuité et connexité par arcs

Propriété 98

Soit $f : A \subset E \rightarrow F$ continue. Si A est connexe par arcs alors $f(A)$ est connexe par arcs. Autrement-dit l'image d'un connexe par arcs par une fonction continue est connexe par arcs

Preuve:

Soit $x, y \in f(A)$ donc $\exists u, v \in A$ tels que $f(u) = x$ et $f(v) = y$.

On a $u, v \in A$ et A connexe par arcs donc $\exists \gamma : [0, 1] \rightarrow A$ continu tel que $\gamma(0) = u$ et $\gamma(1) = v$ donc l'application $f \circ \gamma$ est continue de $[0, 1]$ vers $f(A)$ telle que $(f \circ \gamma)(0) = x$ et $(f \circ \gamma)(1) = y$.

On déduit que $f \circ \gamma$ est un chemin de x à y dans $f(A)$ d'où $f(A)$ est connexe par arcs.

Exemple

Soit E un espace vectoriel normé de dimension $n \geq 2$, $a \in E$ et $r > 0$. La sphère $S(a, r)$ est connexe par arcs

On écrit $S(a, r) = \{a + ru \mid \|u\| = 1\} = \left\{a + r \frac{x}{\|x\|} \mid x \in E \setminus \{0\}\right\}$

Corollaire 6

On suppose que $f \in \mathcal{C}(A, \mathbb{R})$ et A connexe par arcs, alors $f(A)$ est un intervalle.

Preuve:

On a A connexe par arcs et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur A donc $f(A)$ est connexe par arcs sur $\mathbb{R}$ d'où $f(A)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Propriété 99: Théorème des valeurs intermédiaires

Soit A connexe par arcs, $f \in \mathcal{C}(A, \mathbb{R})$ et $(a, b) \in A^2$. Alors pour tout m entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe $c \in A$ tel que $f(c) = m$.

Preuve:

On a A connexe par arcs et f continue sur A donc $f(A)$ est connexe par arcs dans $\mathbb{R}$ d'où $f(A)$ est un intervalle. Soit m entre $f(a)$ et $f(b)$. Puisque $f(A)$ est un intervalle et $f(a), f(b) \in f(A)$ donc $m \in f(A)$ d'où $\exists c \in A, f(c) = m$.

Exemple

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et injective.

Montrer que f est strictement monotone

Soit $D = \{(x, y) \in I^2, x < y\}$. Cet ensemble est convexe, donc connexe par arcs.

L'application $g : D \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$ est continue sur D , donc $g(D)$ est connexe de $\mathbb{R}$ ne contenant pas 0, alors la fonction g garde un signe strict

Propriété 100: Les parties ouvertes et fermées dans un connexe par arcs

Les seules parties ouvertes et fermées d'un connexe par arcs D sont la partie vide $\emptyset$ et la partie pleine D

Preuve:

Soit A une partie ouverte et fermée relativement à un connexe par arcs $D \neq \emptyset$, alors l'application $\chi_A : D \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\chi_A(x) = 0$ sinon est continue car pour tout ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}$, $\chi_A^{-1}(\mathcal{O})$ est soit vide, soit A , soit $D \setminus A$, soit D . Comme D est connexe par arcs, alors $\chi_A(D) \subset \{0, 1\}$ est connexe par arcs. Rappelons que les connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont exactement ses intervalles, donc $\chi_A(D)$ est soit $\{0\}$, soit $\{1\}$, donc $A = \emptyset$ ou $A = D$