

NORMES

Définition: Norme

On appelle norme toute application $\|.\| : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telle que :

- **Séparation:** $\forall x \in E, \quad \|x\| = 0 \implies x = 0_E$
- **Homogénéité:** $\forall x \in E$ et $\alpha \in \mathbb{K}, \|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
- **Inégalité triangulaire :** $\forall x, y \in E$ et $\alpha \in \mathbb{K}, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Auquel cas $(E, \|\cdot\|)$ est dit un espace vectoriel normé.

Si de plus E est une $\mathbb{K}$ -algèbre,

- la norme est dite sous-multiplicative si: $\forall x, y \in E, \quad \|xy\| \leq \|x\|\|y\|$.
- La norme est dite d'algèbre si elle est sous-multiplicative et $\|1_E\| = 1$

Propriété: Seconde inégalité triangulaire

$$\forall x, y \in E, \quad \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|$$

Propriété: Distance

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur E

- On appelle distance associée à la norme $\|\cdot\|$ sur E l'application:

$$d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}^+, (x, y) \longmapsto \|x - y\|$$

- Soit $x \in E$ et A une partie non vide de E . On appelle distance de x à A le nombre

$$d(x, A) = \inf \{d(x, y) \mid y \in A\}$$

Et on a $\forall x, y \in E, \quad |d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$

Définition: Normes équivalentes

Soit N_1 et N_2 deux normes sur E . On dit que N_1 est équivalente à N_2 si :

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^* \text{ tels que } \forall x \in E, \alpha N_2(x) \leq N_1(x) \leq \beta N_2(x)$$

On note $N_1 \sim N_2$. Une telle relation $\sim$ est d'équivalence

Propriété: Propriété fondamentale

Soit N_1 et N_2 deux normes sur E . Alors les assertions suivantes sont équivalentes

1. $N_1 \sim N_2$
2. $\left\{ \frac{N_1(x)}{N_2(x)} / x \in E \setminus \{0\} \right\}$ et $\left\{ \frac{N_2(x)}{N_1(x)} / x \in E \setminus \{0\} \right\}$ sont majorés.
3. Toute suite d'éléments de E convergente pour une norme converge pour l'autre vers la même limite.

Méthode

Pour montrer que les deux normes N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes, on cherche une suite (x_n) d'éléments de $E \setminus \{0\}$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{N_2(x_n)}{N_1(x_n)} = +\infty \text{ ou } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{N_2(x_n)}{N_1(x_n)} = 0$$

Théorème: de Riesz

Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

BOULES, SPHÈRES ET BORNITUDE

Définition: Boules et sphères

$(E, \|\cdot\|)$ un espace normé, $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.

- **Boule ouverte:** $B(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| < r\}$
- **Boule fermée:** $\mathcal{B}_f(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| \leq r\}$
- **sphère:** $\mathcal{S}(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| = r\}$

Si $a = O$ et $r = 1$, on parle des boules et sphère unités.

Propriété: Boules et convexité

Les boules de E sont convexes de E .

Définition: Partie bornée

Une partie A non vide de E est dite bornée si $\exists k \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall x \in A, \|x\| \leq k. \quad \text{Autrement-dit } A \subset \mathcal{B}_f(O, k)$$

Définition: Fonction bornée

Une fonction $f : X \longrightarrow E$ où X est un ensemble quelconque non vide est dite bornée si la partie $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ est bornée. Ou encore $\exists k \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in X, \|f(x)\|_E \leq k$.

Définition: Suite bornée

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans E est bornée si $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \|u_n\| \leq M$

SUITES CONVERGENTES

$(E, \|\cdot\|)$ désigne un espace normé.

Définition: Suite convergente

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E tend vers $\ell \in E$ si

$$\|u_n - \ell\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \text{ c'est-à-dire } \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \implies \|u_n - \ell\| \leq \varepsilon$$

ℓ est unique, appelé la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et on note $\ell = \lim u_n$ ou $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

Une suite non convergente est dite divergente.

Propriété: Domination

Soit (u_n) une suite de E et $\ell \in E$. Alors la suite (u_n) converge vers ℓ si, et seulement, s'il existe une suite réelle et positive $(\alpha_n)_n$ convergeant vers 0 et telle que $\forall n \in \mathbb{N}; \quad \|u_n - \ell\| \leq \alpha_n$

Propriété: Convergence et bornitude

Toute suite convergente est bornée

Propriété: Opérations algébriques

- Si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in E$, alors $\|u_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \|\ell\|$;
- Si $\alpha_n \in \mathbb{K} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha$ et $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in E$ alors $\alpha_n \cdot u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha \cdot \ell$;
Si de plus $\alpha \in \mathbb{K}^*$, alors $\frac{1}{\alpha_n} \cdot u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha} \cdot \ell$;
- Si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ et $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell'$ alors $\lambda u_n + \mu v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda \ell + \mu \ell'$;
- Si de plus, E est une algèbre normée, $u_n v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \ell'$.

SUITES EXTRAITES

Définition: Suites extraites

On dit que (v_n) est une suite extraite de (u_n) s'il existe une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\varphi(n)}$.

Propriété

- Les suites extraites d'une suite convergente sont convergentes vers la même limite
- (u_n) converge ssi (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite

Définition: Valeur d'adhérence

Soit $(u_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ et $\alpha \in E$. On dit que α est valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_n$ si elle est limite d'une suite extraite de $(u_n)_n$.

Propriété

- Toute suite convergente admet une et une seule valeur d'adhérence.
- Toute suite ayant au moins deux valeurs d'adhérence est divergente.
- Toute suite n'ayant pas de valeur d'adhérence est divergente.

Théorème: de Bolzano-Weierstrass

Si E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, toute suite bornée d'éléments de E admet au moins une valeur d'adhérence.

ESPACES DE BANACH

Définition: Suites de Cauchy

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ est dite de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq m \geq n_0 \implies \|u_n - u_m\| \leq \varepsilon$$

Propriété: Propriété caractéristique

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy si et seulement s'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels positifs telle que

$$\begin{cases} \forall n, p \in \mathbb{N}, \quad \|u_{n+p} - u_n\| \leq \varepsilon_n \\ \varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{cases}$$

Propriété

- Une suite convergente est de Cauchy.
- Une suite de Cauchy est bornée.
- Une suite de Cauchy, qui admet une valeur d'adhérence, converge.

Définition: Espace de Banach

On appelle espace de Banach (complet) tout espace vectoriel normé dans lequel toute suite de Cauchy est convergente.

Propriété

Tout espace vectoriel normé de dimension finie est un espace de Banach

CONTACT INFORMATION

Web: www.elamdaoui.com

Email: elamdaoui@gmail.com

Phone: 06 62 30 38 81

OUVERTS

E désigne un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé.

Définition

Soit $\mathcal{O} \subset E$. On dit que $\mathcal{O}$ est un ouvert de E si
$$\forall x \in \mathcal{O}, \exists \varepsilon > 0, B(a, \varepsilon) \subset \mathcal{O}$$

Propriété

- $\emptyset$ et E sont des ouverts de E .
- Union quelconque d'ouverts est un ouvert.
- Intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Propriété: Boule ouverte

Une boule ouverte est un ouvert.

Définition: Ouverts relatifs à une partie

On appelle ouvert dans A ou relativement à A tout ensemble de la forme $A \cap \mathcal{O}$ où $\mathcal{O}$ est un ouvert de E .

INTÉRIEURS

Définition: Intérieur

Soit A une partie de E et $a \in E$.
On dit que a est intérieur à A si: $\exists r > 0$, tel que $B(a, r) \subset A$
On note $\mathring{A}$ l'ensemble des points intérieurs à A .

Propriété

Soit A, B deux parties de E .

- $\mathring{A} \subset A$ et $A \subset B \implies \mathring{A} \subset \mathring{B}$;
- $\mathring{A}$ est ouvert et $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$;
- A ouvert $\Leftrightarrow A = \mathring{A}$.
- $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A .

Propriété

Soit $a \in E$ et $r > 0$, alors $\bigcup_{x \in A} \mathring{B}_f(a, r) = \mathring{B}(a, r)$

FERMÉS

Définition: Fermé

On appelle fermé tout ensemble $\mathcal{F}$ dont le complémentaire $\mathcal{C}_E^{\mathcal{F}}$ est ouvert.

Propriété

- $\emptyset$ et E sont des fermés.
- Intersection quelconque de fermés est fermé
- Union finie de fermés est un fermé.

Propriété: Boule fermée

Une boule fermée est un fermé.

Propriété: Caractérisation séquentielle des fermés

Une partie $\mathcal{F}$ d'un espace vectoriel normé E est fermée, si et seulement, si toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{F}$ qui converge dans E admet une limite qui appartient à $\mathcal{F}$.

ADHÉRENCE D'UN PARTIE

Définition: Adhérence et partie dense

Soit A une partie de E et $a \in E$.

- On dit que a est dit adhérent à A si $\forall r > 0, B(a, r) \cap A \neq \emptyset$.
- On note $\overline{A}$ l'ensemble des points adhérents à A .
- On dit que A est dense dans E si $\overline{A} = E$.

Propriété: Caractérisation séquentielle de l'adhérence

- $a \in \overline{A} \iff \exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}, \text{ tq } a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$.
- $\overline{A} = E \iff \exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}, \text{ tq } a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$

Propriété

Soit A et B deux parties de E .

- $\mathring{\mathcal{C}\overline{A}} = \mathring{\mathcal{C}A}$ et $\mathring{\mathcal{C}A} = \mathring{\mathcal{C}\overline{A}}$, donc $\overline{A}$ est un fermé ;
- $A \subset \overline{A}$ et $A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}$;
- $\overline{A}$ est un fermé et $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$
- A fermé $\Leftrightarrow A = \overline{A}$;
- $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A .

Définition: Frontière

La frontière de $A \subset E$ est l'ensemble: $\text{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \overline{A} \cap \mathring{\mathcal{C}A}$

LIMITE D'UNE FONCTION EN UN POINT

$(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ et $(G, \|\cdot\|_G)$ sont des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés

Définition: limite d'une fonction en un point

Soit $f : A \subset E \longrightarrow F$ une application, $a \in \overline{A}$ et $\ell \in F$.
On dit que f admet pour limite ℓ en a selon A , lorsque $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0$ tel que $\|x - a\|_E < \alpha$ et $x \in A$, alors $\|f(x) - \ell\|_F < \varepsilon$. On note $\lim_{x \rightarrow a \atop x \in A} f(x) = \ell$

Propriété: Caractérisation séquentielle de la limite

$\lim_{x \rightarrow a \atop x \in A} f(x) = \ell$ si, et seulement si, toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers a , la suite $(f(x_n))_n$ converge vers ℓ

Propriété: Opérations sur les limites

Soit $f, g \in F^A, \alpha \in \mathbb{K}^E$ et a adhérent à A tels que:

$$f \xrightarrow{x \rightarrow a \atop x \in A} \ell, g \xrightarrow{x \rightarrow a \atop x \in A} \ell' \text{ et } \alpha \xrightarrow{x \rightarrow a \atop x \in A} \lambda. \text{ Alors}$$

- $f + g \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell + \ell'$.
- $\alpha f \xrightarrow{x \rightarrow a} \lambda.\ell$.
- Si $\lambda \neq 0$, alors $\exists W \in \mathcal{V}_A(a)$ sur lequel α ne s'annule pas et $\frac{1}{\alpha} \xrightarrow{x \rightarrow a \atop x \in A} \frac{1}{\lambda}$.
- Si F est une algèbre normée $f.g \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell.\ell'$

Propriété: Composition

Soit $f : A \subset E \longrightarrow F$ et $g : B \subset F \longrightarrow G$ telles que $f(A) \subset B$ et a adhérent à A . Si $f \xrightarrow{x \rightarrow a} b$ et $g \xrightarrow{x \rightarrow b} \ell$, alors $g \circ f \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$

CONTINUITÉ

Définition: Continuité

Soit $f : A \subset E \longrightarrow F$ et $a \in A$.

- On dit que f est continue en a si $\lim_{x \rightarrow a \atop x \in A} f(x) = f(a)$
- On dit que f est continue sur A si elle est continue en tout point de A .

$\mathcal{C}(A, F)$ désigne l'ensemble des fonctions continues de A à valeurs dans F

Propriété: Caractérisation séquentielle

Soit $f : A \subset E \longrightarrow F$ et $a \in A$.
 f est continue en a si, et seulement si, $\forall (x_n) \in A^{\mathbb{N}},$

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \implies f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(a)$$

Propriété: Opérations algébriques

- $\mathcal{C}(A, F)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel
- Si F est une algèbre normée, alors $\mathcal{C}(A, F)$ est une $\mathbb{K}$ -algèbre
- Si $\alpha \in \mathcal{C}(A, \mathbb{K})$ et $f \in \mathcal{C}(A, F)$, alors $\alpha.f \in \mathcal{C}(A, F)$.
- Si $\alpha \in \mathcal{C}(A, \mathbb{K})$ et ne s'annule pas, alors $\frac{1}{\alpha} \in \mathcal{C}(A, \mathbb{K})$.

Propriété: Composition

La composée de deux fonctions continues est continue

Propriété: Fonctions composantes et fonctions coordonnées

Soit $f : A \subset E \longrightarrow F$

- Si F est un espace produit alors f est continue si, et seulement si, ses fonctions composantes le sont.
- Si F est de dimension finie alors f est continue si, et seulement si, ses fonctions coordonnées dans une base de F le sont.

Propriété: Continuité et densité

Soit $f, g : A \subset E \longrightarrow F$ deux fonctions continues. Si B est dense dans A et f et g coïncident sur B , alors f et g sont égales.

Propriété: Continuité et topologie

Soit $f : A \subset E \longrightarrow F$. Les trois affirmations suivantes sont équivalentes :

- f est continue sur A ;
- l'image réciproque de tout ouvert de F est ouvert de A ;
- l'image réciproque de tout fermé de F est fermé de A .

CONTACT INFORMATION

Web: www.elamdaoui.com

Email: elamdaoui@gmail.com

Phone: 06 62 30 38 81

APPLICATIONS LINÉAIRES

$(E, \| \cdot \|_E)$ et $(F, \| \cdot \|_F)$ des $\mathbb{K}$ -evns

Théorème: Fondamental

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

- u est continue;
- u est continue en 0_E ;
- $\exists k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall x \in E, \|u(x)\|_F \leq k\|x\|_E$;
- l'ensemble $\left\{ \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} \mid x \in E \setminus \{0\} \right\}$ est majoré;
- u est lipschitzienne;
- u est bornée sur la boule $B_f(0, 1)$
- u est bornée sur la sphère $S(0, 1)$

Propriété: fondamentale en dimension finie

Si E est de dimension finie, alors toute $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est continue

Propriété

Soit N_1 et N_2 deux normes de E un espace vectoriel normé. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

- N_1 et N_2 sont équivalentes ;
- $\text{Id}_E : \begin{cases} (E, N_1) & \longrightarrow & (E, N_2) \\ x & \longmapsto & x \end{cases}$ est bicontinue ;
- les ouverts de E pour la norme N_1 sont ouverts pour la norme N_2 .

APPLICATIONS MULTILINÉAIRES

Propriété

Si $u : E \times F \rightarrow G$ est bilinéaire. u est continue si et seulement si

$$\exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in E, \forall y \in F, \|B(x, y)\| \leq k\|x\|\|y\|$$

Lorsque E et F sont de dimensions finies, alors toute application bilinéaire sur $E \times F$ est continue

Propriété

Soient $E_1, \dots, E_n, F$ des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés. Si $E_1, \dots, E_n$ sont de dimensions finies alors toute application multilinéaire $M : E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F$ est continue. Au quel cas $\exists k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$:

$$\|M(x_1, \dots, x_n)\| \leq k\|x_1\| \cdots \|x_n\|$$

Exemple: Inégalité de Hadamard

Soit M une matrice carrée dont les vecteurs colonnes sont $C_1, \dots, C_n$. On note $\|C_i\|_2$ la norme euclidienne de C_i . On a l'inégalité suivante :

$$\det(M) \leq \|C_1\|_2 \cdots \|C_n\|_2$$

COMPACTITÉ

$(E, \| \cdot \|_E)$ et $(F, \| \cdot \|_F)$ des $\mathbb{K}$ -evns

Définition: Partie compacte

Une partie A de E est dite compacte dans E si toute suite d'éléments de A admet une valeur d'adhérence dans A

Propriété

- Tout compact est nécessairement fermé et borné.
- Tout fermé d'un compact est compact E .
- Le produit cartésien de compacts est compact

Propriété: Les compacts d'un EVN de dimension finie

Les compacts d'un EVN de dimension finie sont ses fermés bornés.

Propriété

Soit $f \in \mathcal{C}(A, F)$ et A un compact de E , alors

- $f(A)$ est un compact de F .
- $f(A)$ est borné et il existe $a, b \in A$ tels que

$$\|f(a)\| = \inf_{x \in A} \|f(x)\| \text{ et } \|f(b)\| = \sup_{x \in A} \|f(x)\|$$

On dit que f atteint ses bornes de sa norme.

- $F = \mathbb{R}$, alors f est bornée sur A et elle atteint ses bornes: il existe $a, b \in A$ tels que:

$$f(a) = \inf_{x \in A} f(x) \text{ et } f(b) = \sup_{x \in A} f(x)$$

Définition

On dit que l'application $f : A \subset E \rightarrow F$ est uniformément continue si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : \forall x, y \in A, \|x - y\| < \eta \implies \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$$

Propriété

Toute application lipschitzienne $f : A \subset E \rightarrow F$ est uniformément continue.

Propriété: Caractérisation séquentielle de la continuité uniforme

$f : A \subset E \rightarrow F$ est uniformément continue sur A ssi

$$\forall (x_n), (y_n) \in A^{\mathbb{N}}, x_n - y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \implies f(x_n) - f(y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Méthode

Pour montrer que f n'est pas uniformément continue sur A on cherche deux suites $(x_n), (y_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tels que $x_n - y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $f(x_n) - f(y_n) \not\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Propriété

Toute application uniformément continue est évidemment continue

Théorème: de Heine

Toute fonction continue sur un compact est uniformément continue.

CONNEXITÉ PAR ARCS

Définition: Connexité par arcs

- On appelle chemin de a à b dans A toute application continue $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$ telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.
- On dit que A est connexe par arcs si pour tous $x, y \in A$ il existe un chemin de x à y dans A .

Propriété: Convexité et connexité par arcs

Si A convexe alors A est connexe par arcs.

Définition: Partie étoilée

A une partie d'un espace vectoriel normé E est dite étoilée si $\exists a \in A$ tel que $\forall b \in A, [a, b] \subset A$.

Propriété

Toute partie étoilée est connexe par arcs

Propriété: Connexité par arcs et continuité

Soit $f : A \subset E \rightarrow F$ continue. Si A est connexe par arcs alors $f(A)$ est connexe par arcs.

Propriété: Les connexes par arcs de $\mathbb{R}$

Les connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Théorème: des valeurs intermédiaires

Soit A connexe par arcs, $f \in \mathcal{C}(A, \mathbb{R})$ et $(a, b) \in A^2$. Alors pour tout m entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe $c \in A$ tel que $f(c) = m$.

Propriété

Soit A une partie d'espace vectoriel normé E . La relation $\mathcal{R}$ définie sur A par: pour tout $(x, y) \in A^2$

$$x \mathcal{R} y \iff \exists \gamma \in \mathcal{C}([0, 1], A), \begin{cases} \gamma(0) = x \\ \gamma(1) = y \end{cases}$$

est une relation d'équivalence.

La classe de a pour cette relation est appelée la composante connexe par arcs de a dans A est connexe par arcs et notée $\mathcal{C}(a)$.

Exemple: Groupe orthogonal

Pour $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geq 2$. On note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ le groupe orthogonal

$$\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}), {}^tAA = I_n\}$$

- $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact et non connexe par arcs
- Les composantes connexes par arcs de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ sont $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$.

CONTACT INFORMATION

Web: www.elamdaoui.com

Email: elamdaoui@gmail.com

Phone: 06 62 30 38 81