
Les séries dans un EVN

EL AMDAOUI Mustapha,

Lycée IBN TIMIYA,
site web: www.elamdaoui.com,
email: elamdaoui@gmail.com

Niveau: MP

Table des matières

I Définitions et quelques propriétés	2
I.1 Séries	2
I.2 Convergence et divergence	2
I.3 Divergence grossière	3
I.4 Reste d'une série convergente	4
I.5 Opérations sur les séries convergentes	4
I.6 Convergence absolue	5
II Rappels et Compléments sur les séries	6
II.1 Critère de majoration	6
II.2 Principe de comparaison	7
II.3 Règle de Riemann	8
II.4 Critère de d'Alembert	9
II.5 Sommation des relations de comparaison	10
II.6 Comparaison série-intégrale	12
III Cas d'une algèbre normé de dim finie	13
III.1 Série de Neumann	13
III.2 L'application exponentielle	14

E désigne un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé de dimension finie où $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I Définitions et quelques propriétés

I.1 Séries à valeurs dans un espace vectoriel normé de dim finie

Définition 1

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$.

On appelle série de terme général u_n la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

On la note $\sum_{n \geq 0} u_n$.

- S_n s'appelle la $n^{\text{ième}}$ somme partielle de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$
- u_n s'appelle le terme général de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$

Remarque :

1. La série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est dite réelle si $E = \mathbb{R}$ et complexe si $E = \mathbb{C}$.
2. Le terme général de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est donné en fonction de la suite (S_n) des sommes partielles par $u_0 = S_0$ et $\forall n \geq 1, u_n = S_n - S_{n-1}$.
3. Soit la suite $(v_n)_{n \geq n_0}$. La série de terme général v_n est la suite $(S_n)_{n \geq n_0}$ définie par $\forall n \geq n_0, S_n = \sum_{k=n_0}^n v_k$.
On la note $\sum_{n \geq n_0} v_n$.
Quitte à compléter par des zéros on peut considérer que $n_0 = 0$.
4. La série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ s'appelle la série déduite de $\sum_{n \geq 0} u_n$ par troncature au rang n_0 .

I.2 Convergence et divergence

Définition 2

1. On dit que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge si (S_n) converge dans E , la limite de la suite (S_n) est appelée somme de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$, notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
2. Une série est dite divergente si elle n'est pas convergente

Définition 3: Séries de même nature

Deux séries sont dites de même nature si, et seulement, si elles sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes

Propriété 1

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série, alors pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, les deux séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq n_0} u_n$ sont de même nature

Preuve:

Les sommes partielles de deux séries diffèrent d'une constante.

Remarque :

On ne modifie pas la nature d'une série en modifiant la valeur d'un nombre fini de termes.

Propriété 2: Suite et série télescopique

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite à valeurs dans E .

La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ et la série $\sum_{n \geq 0} (u_{n+1} - u_n)$ sont de même nature.

En cas de convergence : $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_{n+1} - u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - u_0$

Exemple

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ est convergente de somme 1.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ et la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$ converge vers 0, donc $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ est convergente de somme 1. Car

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

I.3 Divergence grossière**Théorème 1: Condition nécessaire**

Si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Preuve:

$$u_n = S_n - S_{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Par contraposée on obtient le résultat suivant

Corollaire 1

Si $u_n \not\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, alors la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.

On dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge grossièrement

Attention

Il est possible $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ diverge. Par exemple $u_n = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

Propriété 3: Série géométrique

Soit $q \in \mathbb{C}$, alors la série géométrique $\sum_{n \geq 0} q^n$ converge si, et seulement, si $|q| < 1$.

En cas de convergence

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad \text{et} \quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=p}^{+\infty} q^n = \frac{q^p}{1-q}$$

Preuve:

► Si $|q| \geq 1$, alors $q^n \neq 0$, donc la série $\sum_{n \geq 0} q^n$ diverge grossièrement

► Si $|q| < 1$. Pour $n \geq 0$, on a :

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-q}$$

La suite des sommes partielles de la série converge si, et seulement, si $|q| < 1$

I.4 Reste d'une série convergente

Définition 4

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à valeurs dans E convergente dans E .

Le reste d'ordre n de la série est défini par $R_n := \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$

Attention

Pour introduire le reste de rang n d'une série il est nécessaire que celle-ci soit convergente.

Théorème 2

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série convergente alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{k=0}^n u_k + R_n \quad \text{et} \quad R_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Preuve:

Pour $m \geq n$, on a : $\sum_{k=0}^m u_k = \sum_{k=0}^n u_k + \sum_{k=n+1}^m u_k$.

Quand $m \rightarrow +\infty$, on obtient $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{k=0}^n u_k + R_n$ et $R_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n - \sum_{k=0}^n u_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

I.5 Opérations sur les séries convergentes

Propriété 4

Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ convergent. Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, la série $\sum_{n \geq 0} (\lambda u_n + v_n)$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

L'ensemble des séries convergentes est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel

Preuve:

Utiliser la suite des sommes partielles

Propriété 5

1. Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge et $\sum_{n \geq 0} v_n$ diverge alors $\sum_{n \geq 0} (u_n + v_n)$ diverge.
2. Si $\sum_{n \geq 0} (u_n + v_n)$ converge, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ sont de même nature.

Preuve:

Utiliser la suite des sommes partielles

Théorème 3: Les séries coordonnées

Soit $\beta = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $u_n = \sum_{i=1}^p u_{n,i} e_i$ le terme général de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes

1. $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge
2. Pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, la série $\sum_{n \geq 0} u_{n,i}$ converge

En cas de convergence : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{i=1}^p \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,i} \right) e_i$

Preuve:

Utiliser la suite des sommes partielles

Remarque :

L'étude d'une série vectorielle revient à l'étude de p séries numériques.

Exemple

Soit $(A_n)_{n \geq 0} \in M_{p,q}(\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$, on pose $A_n = \left(a_{i,j}^{(n)} \right)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$. Alors

$\sum_{n \geq 0} A_n$ converge si, et seulement, si $\forall (i,j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$, $\sum_{n \geq 0} a_{i,j}^{(n)}$ converge

En cas de convergence, $\sum_{n=0}^{+\infty} A_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{i,j}^{(n)} \right)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$.

I.6 Convergence absolue**Définition 5**

On dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge absolument si la série $\sum_{n \geq 0} \|u_n\|$ est convergente.

Propriété 6

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série absolument convergente, alors la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente et

$$\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\| \quad \text{Inégalité triangulaire}$$

Preuve:

Soit $\beta = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\sum_{n \geq 0} u_{n,k}$ pour $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ les séries coordonnées définies par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{k=1}^p u_{n,k} e_k$.

Avec la norme $\|\cdot\|_{\infty}$, on a $\|u_n\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq p} |u_{n,i}|$ et

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, |u_{n,i}| \leq \|u_n\|_{\infty}.$$

Si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge absolument, on en déduit de l'inégalité précédente que les p séries numériques $\sum_{n \geq 0} u_{n,i}$ convergent

absolument, donc elles convergent et, par suite, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

La majoration de la somme résulte alors du passage à la limite à partir de la relation

$$\left\| \sum_{k=0}^n u_k \right\| \leq \sum_{k=0}^n \|u_k\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \|u_k\|$$

vérifiée pour tout entier n .

Exemple

Pour tout θ , la série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^2}$ est absolument convergente.

En effet, $\left| \frac{e^{in\theta}}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

Exemple

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge mais pas absolument convergente

Définition 6: Série semi-convergente

Une série est dite **semi-convergente** si elle est convergente et non absolument convergente

Définition 7: Série alternée

Une série réelle $\sum_{n \geq 0} u_n$ est dite **alternée** si pour tout $n \in \mathbb{N} : u_n \cdot u_{n+1} \leq 0$.

Propriété 7: Critère spécial des séries alternées

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série alternée telle que $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ décroît et est de limite nulle. Alors

- $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|R_n| \leq |u_{n+1}|$ et $\text{sgn}(R_n) = \text{sgn}(u_{n+1})$

Preuve:

On suppose que $u_n = (-1)^n \alpha_n$, avec $(\alpha_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ décroît et tend vers 0

- Soit $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \alpha_k$. Alors la suite $(S_{2n})_{n \geq 0}$ est décroissante et la suite $(S_{2n+1})_{n \geq 0}$ est croissante. De plus $S_{2n+1} - S_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ d'où les suites $(S_{2n})_{n \geq 0}$ et $(S_{2n+1})_{n \geq 0}$ sont adjacentes donc elles convergent vers le même réel S , donc $(S_n)_{n \geq 0}$ converge et par définition la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$S_{2n-1} \leq S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n} \leq S_{2n-2}$$

- $R_{2n} = S - S_{2n} \leq 0$, donc

$$|R_{2n}| = |S - S_{2n}| = S_{2n} - U \leq S_{2n} - S_{2n+1} = \alpha_{2n+1}$$

d'où R_{2n} est négatif et $|R_{2n}| \leq |u_{2n+1}|$

- $R_{2n+1} = U - S_{2n+1} \geq 0$, donc

$$|R_{2n+1}| = U - S_{2n+1} \leq S_{2n+2} - S_{2n+1} = \alpha_{2n+2}$$

d'où R_{2n+1} est positif et $|R_{2n+1}| \leq |u_{2n+2}|$

$$\text{Soit } \text{sgn}(R_n) = \text{sgn}(u_{n+1}) \text{ et } |R_n| \leq |u_{n+1}|$$

Exemple

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, où $\alpha > 0$, est convergente d'après le critère spécial des séries alternées. De plus

$$\left| \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p^\alpha} \right| \leq \frac{1}{(n+1)^\alpha}$$

II Rappels et Compléments sur les séries**II.1 Critère de majoration****Théorème 4**

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à termes positifs.

$\sum_{n \geq 0} u_n$ converge si, et seulement si, la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ des sommes partielles est majorée.

En cas de convergence $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sup_n S_n$

Preuve:

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$ d'où la suite (S_n) est croissante

$\sum_{n \geq 0} u_n$ converge $\iff (S_n)$ est majorée

Remarque :

Dans le cas de divergence $S_n \rightarrow +\infty$, alors on écrit $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$

II.2 Principe de comparaison**Propriété 8: Principe de comparaison**

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$, $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs telles que :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, 0 \leq u_n \leq v_n$$

1. Si $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge
2. Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge, alors $\sum_{n \geq 0} v_n$ diverge

Preuve:

1. Si $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge, alors pour tout $n \geq N$:

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^N u_k + \sum_{k=N+1}^n u_k \leq \sum_{k=0}^N u_k + \sum_{k=N+1}^n v_k \leq \sum_{k=0}^N u_k + \sum_{k=N+1}^n v_k \leq \sum_{k=0}^N u_k + \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$$

La suite des sommes partielles de $\sum_{n \geq 0} u_n$ est donc majorée.

2. Par contraposée

Théorème 5: Relations de comparaisons

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs, telles que

$$u_n = O(v_n) \text{ ou } u_n = o(v_n).$$

- Si $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge
- Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge, alors $\sum_{n \geq 0} v_n$ diverge

Preuve:

Il existe $M \in \mathbb{R}^+$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que $u_n \leq M v_n$ pour tout $n \geq N$

Exemple

$\sum_{n \geq 0} e^{-\sqrt{n}}$ converge puisque $e^{-\sqrt{n}} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge

Théorème 6: Comparaison au moyen d'équivalents

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs, telles que

$$u_n \sim v_n,$$

alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ sont de même nature

Preuve:

Si $u_n \sim v_n$, alors $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$

Attention

On peut avoir deux séries dont les termes équivalents mais elles ne sont de même nature.

L'exemple suivant montre que l'équivalence $u_n \sim v_n$ n'entraîne pas que les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ sont de même nature lorsque u_n et v_n ne sont pas de signe constant à partir d'un certain rang.

Exemple

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour $n \geq 2$ par :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$$

1. Montrer que $u_n \sim v_n$.
2. Quelle est la nature des séries $\sum_{n \geq 1} u_n$ et $\sum_{n \geq 2} v_n$?

1. Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right] = 1$, on a bien l'équivalence $u_n \sim v_n$

2. ► Comme la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)_{n \geq 1}$ est décroissante et converge vers 0, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente d'après le critère spécial des séries alternées.

► On peut écrire : $v_n = u_n + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ et $v_n - u_n \sim \frac{1}{n}$. La série à termes positifs $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente.

La série $\sum_{n \geq 2} v_n$ étant la somme d'une série convergente et d'une série divergente est donc divergente.

II.3 Règle de Riemann

Propriété 9

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si, et seulement, si $\alpha > 1$

Preuve:

► Pour tout $\alpha \neq 1$:

$$\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} = \frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{\alpha-1} \right) \sim \frac{\alpha-1}{n^\alpha}$$

Il en résulte que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si, cette série télescopique de signe constant converge, donc si, et seulement si, $\alpha > 1$.

► Le cas de $\alpha = 1$ est un cas de divergence, car

$$\ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$$

La série télescopique $\sum_{n \geq 1} \ln(n+1) - \ln(n)$ à termes positifs diverge car la suite $(\ln(n))$ diverge, donc $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge

Théorème 7: Règle de Riemann

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à terme positifs telle qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ vérifiant $u_n \sim \frac{\lambda}{n^\alpha}$. Alors

$$\text{la série } \sum_{n \geq 0} u_n \text{ converge} \iff \alpha > 1$$

Preuve:

Par le critère de comparaison

Théorème 8: Règle de Riemann

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à termes positifs.

- ▶ S'il existe $\alpha > 1$ tel que $u_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ ou $u_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge
- ▶ S'il existe $\alpha \leq 1$ tel que $\frac{1}{n^\alpha} = O(u_n)$ ou $\frac{1}{n^\alpha} = o(u_n)$, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge

II.4 Critère de d'Alembert**Propriété 10: Comparaison logarithmique**

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$, $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries à termes strictement positifs telles que

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, 0 \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

1. Si $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge, alors la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge
2. Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge, alors la série $\sum_{n \geq 0} v_n$ diverge

Preuve:

La suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est décroissante à partir de rang N , d'où pour $n \geq N$, on obtient : $\frac{u_n}{v_n} \leq \frac{u_N}{v_N}$

En posant $\lambda = \frac{u_N}{v_N}$, il vient $u_n \leq \lambda v_n$ pour tout $n \geq N$. on conclut par le critère de la comparaison

Théorème 9: Critère de d'Alembert

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à termes strictement positifs (à partir d'un certain rang) telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R}^+$

1. Si $0 \leq \ell < 1$, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge
2. Si $\ell > 1$, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge
3. Si $\ell = 1$ on ne peut pas conclure.

Preuve:

1. Si $0 \leq \ell < 1$, on choisit $r \in \mathbb{R}$ tel que $0 \leq \ell < r < 1$. Puisque $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow \ell$, alors il existe un rang N à partir duquel $\frac{u_{n+1}}{u_n} < r$ et $\sum_{n \geq 0} r^n$ converge, donc la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge
2. Si $\ell > 1$, alors il existe un rang N à partir duquel $\frac{u_{n+1}}{u_n} > r$ et $\sum_{n \geq 0} r^n$ diverge, donc la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge
3. le cas $\ell = 1$ peut se produire aussi bien avec une série convergente $\sum \frac{1}{n^2}$ qu'avec une série divergente $\sum \frac{1}{n}$

Exemple

Déterminez la nature de la série de terme général $u_n = \frac{n^{\ln n}}{n!}$

La série est à termes positifs. Pour étudier sa nature, on peut utiliser la règle de d'Alembert. On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n+1} e^{\ln^2(n+1) - \ln^2(n)} \sim \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

D'après la règle de d'Alembert, la série $\sum u_n$ est donc convergente

Exemple

Soit $x \in \mathbb{R}$. Étudions la série de terme général $u_n = \frac{x^n}{n!}$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

► Si $x = 0$, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ converge

► Si $x \neq 0$, la série $\sum_{n \geq 0} \left| \frac{x^n}{n!} \right|$ est à termes strictement positifs et $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{|x|}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, avec $u_n = \frac{x^n}{n!}$.

Donc la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ est absolument convergente par la règle de d'Alembert, donc elle converge.

Exemple: Règle de Raabe-Duhamel

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs telle que

$$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times]1, +\infty[, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$$

Posons pour $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = n^\alpha u_n$.

1. Montrer que $\ln v_{n+1} - \ln v_n = O\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$ avec $\gamma = \min(2, \beta)$

2. En déduire qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $u_n \sim \frac{\mu}{n^\alpha}$

3. Montrer $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge si, et seulement, si $\alpha > 1$

4. Étudier la série de terme général $u_n = \frac{e^n n!}{n^n}$

Posons pour $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = n^\alpha u_n$.

1. On a

$$\begin{aligned} \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha \left(1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^\beta}\right)\right) \\ &= \left(1 + \alpha \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \left(1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^\beta}\right)\right) \\ &= 1 + O\left(\frac{1}{n^\gamma}\right) \quad \text{où } \gamma = \min(2, \beta) \end{aligned}$$

2. On a $\ln v_{n+1} - \ln v_n = O\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$, donc la série de terme général $\ln v_{n+1} - \ln v_n$ est convergente, cela signifie que la suite de terme général $\ln v_n$ converge. Posons $\lambda = \lim \ln v_n$, alors $\lim v_n = e^\lambda$ et donc $u_n \sim \frac{e^\lambda}{n^\alpha}$.

3. Par comparaison avec les séries de Riemann $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge si, et seulement, si $\alpha > 1$

4. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^n n!}{n^n}$ est à termes strictement positifs.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = e \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = e^{1 - n \ln(1 + \frac{1}{n})} = e^{\frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, avec $\alpha = -\frac{1}{2}$, donc $\sum_{n \geq 1} \frac{e^n n!}{n^n}$ diverge

II.5 Sommutation des relations de comparaison**Propriété 11**

Soit $\sum_{n \geq 0} v_n$ une série à termes positifs et $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite numérique telles que $u_n = o(v_n)$.

1. Si $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ est absolument convergente et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$

$$2. \text{ Si } \sum_{n \geq 0} v_n \text{ diverge, alors } \sum_{k=0}^n u_k = o\left(\sum_{k=0}^n v_k\right)$$

Preuve:

1. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Comme $u_n = o(v_n)$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$: $|u_n| \leq \varepsilon v_n$.

Par le critère de comparaison des séries à termes positifs, on déduit l'absolue convergence donc la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$. Pour tout $n \geq N$, on a :

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k| \leq \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$$

$$\text{Ce qui prouve : } \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$$

2. Si $\sum_{n \geq 0} v_n$ diverge alors $\sum_{k=0}^n v_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$ tels que pour tout $n \geq N$: $|u_n| \leq \varepsilon v_n$. Pour $n \geq N$

$$\left| \sum_{k=0}^n u_k \right| \leq \left| \sum_{k=0}^{N-1} u_k \right| + \left| \sum_{k=N}^n u_k \right| \leq \left| \sum_{k=0}^{N-1} u_k \right| + \sum_{k=N}^n |u_k| \leq \left| \sum_{k=0}^{N-1} u_k \right| + \varepsilon \sum_{k=N}^n v_k$$

Or, $\sum_{k=0}^n v_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N', \quad \left| \sum_{k=0}^{N-1} u_k \right| \leq \varepsilon \sum_{k=0}^n v_k$$

Pour $n \geq \max(N, N')$, on obtient

$$\left| \sum_{k=0}^n u_k \right| \leq \left| \sum_{k=0}^{N-1} u_k \right| + \varepsilon \sum_{k=N}^n v_k \leq 2\varepsilon \sum_{k=0}^n v_k$$

$$\text{Ainsi } \sum_{k=0}^n u_k = o\left(\sum_{k=0}^n v_k\right)$$

Propriété 12

Soit $\sum_{n \geq 0} v_n$ une série à termes positifs et $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite numérique telles que $u_n = O(v_n)$.

1. Si $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ est absolument convergente et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = O\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$
2. Si $\sum_{n \geq 0} v_n$ diverge, alors $\sum_{k=0}^n u_k = O\left(\sum_{k=0}^n v_k\right)$

Preuve:

Comme $u_n = O(v_n)$, il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq N$: $|u_n| \leq M v_n$.

1. Du test de comparaison des séries à termes positifs, on déduit l'absolue convergence donc la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$. Pour tout $n \geq N$, on a :

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k| \leq M \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$$

$$\text{Ce qui prouve : } \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = O\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$$

2. Pour $n \geq N$

$$\left| \sum_{k=0}^n u_k \right| \leq \left| \sum_{k=0}^{N-1} u_k \right| + \left| \sum_{k=N}^n u_k \right| \leq \left| \sum_{k=0}^{N-1} u_k \right| + \sum_{k=N}^n |u_k| \leq \left| \sum_{k=0}^{N-1} u_k \right| + M \sum_{k=N}^n v_k$$

Or, $\sum_{k=0}^n v_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N', \quad \left| \sum_{k=0}^{N-1} u_k \right| \leq \sum_{k=0}^n v_k$$

Pour $n \geq \max(N, N')$, on obtient

$$\left| \sum_{k=0}^n u_k \right| \leq \left| \sum_{k=0}^{N-1} u_k \right| + \varepsilon \sum_{k=N}^n v_k \leq (1+M) \sum_{k=0}^n v_k$$

$$\text{Ainsi } \sum_{k=0}^n u_k = O\left(\sum_{k=0}^n v_k\right)$$

Propriété 13

Soit $\sum_{n \geq 0} v_n$ une série à termes positifs et $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite numérique telles que $u_n \sim v_n$. Alors

1. $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ sont de même nature.
2. Si $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge, alors $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.
3. Si $\sum_{n \geq 0} v_n$ diverge, alors $\sum_{k=0}^n u_k \sim \sum_{k=0}^n v_k$.

Preuve:

Par hypothèse $u_n \sim v_n$ entraîne $u_n - v_n = o(v_n)$.

1. Découle de 2 et 3.

2. Si $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge, d'après ce qui précède, on a la convergence de la série de terme général $u_n - v_n$ et :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} (u_k - v_k) = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$$

Or, $u_n = (u_n - v_n) + v_n$ et la somme de deux séries convergentes est convergente donc, $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge et :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$$

Ainsi

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$$

3. $u_n - v_n = o(v_n)$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ une série à termes positifs divergente, donc $\sum_{k=0}^n (u_k - v_k) = o\left(\sum_{k=0}^n v_k\right)$ et par suite $\sum_{k=0}^n u_k - \sum_{k=0}^n v_k = o\left(\sum_{k=0}^n v_k\right)$, donc $\sum_{k=0}^n u_k \sim \sum_{k=0}^n v_k$

II.6 Comparaison série-intégrale**Théorème 10: Comparaison série-intégrale**

Soit f une application de $[n_0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, ($n_0 \in \mathbb{N}$) continue par morceaux, positive et décroissante.

1. La série de terme général $\left(\int_{n-1}^n f(t) dt - f(n)\right)_{n \geq n_0+1}$ est convergente.
2. L'intégrale $\int_{n_0}^{+\infty} f(t) dt$ et la série $\sum_{n \geq n_0} f(n)$ sont de même nature.

► **En cas de convergence :**

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(t) dt \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leq \int_n^{+\infty} f(t) dt$$

► **En cas de divergence :**

$$\int_{n_0}^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=n_0}^n f(k) \leq f(n_0) + \int_{n_0}^n f(t) dt$$

Preuve:

1. $u_n = \int_{n-1}^n f(t) dt - f(n)$ n'a de sens que pour $n \geq n_0 + 1$. Puisque f est positive et décroissante, pour tout $n \geq n_0 + 1$, on a :

$$0 \leq u_n \leq f(n-1) - f(n),$$

donc

$$U_n = \sum_{k=n_0+1}^n u_k \leq \sum_{k=n_0+1}^n (f(k-1) - f(k)) \leq f(n_0) - f(n) \leq f(n_0).$$

La série $\sum_{n \geq n_0+1} u_n$ à termes positifs est donc convergente, puisque la suite de ses sommes partielles est majorée.

2. Pour $n \geq n_0$, posons $S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k$, avec la relation de Chasles on obtient :

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{k=n_0+1}^n u_k = \sum_{k=n_0+1}^n \int_{k-1}^k f(t) dt - \sum_{k=n_0+1}^n f(k) \\ &= \int_{n_0}^n f(t) dt - \sum_{k=n_0+1}^n f(k) \end{aligned}$$

Puisque $(U_n)_{n \geq n_0+1}$ converge, alors les deux suites $(S_n)_{n \geq n_0}$ et $(I_n)_{n \geq n_0}$, avec $I_n = \int_{n_0}^n f(t) dt$ et $S_n = \sum_{k=n_0}^n f(k)$, sont de même nature

Exemple

Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ et la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ sont de même nature.

III Cas d'une algèbre normée de dim finie

On pose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $\mathbb{A}$ une $\mathbb{K}$ -algèbre normée unitaire normée de dimension finie et d'unité $1_{\mathbb{A}}$.

III.1 Série de Neumann

Propriété 14: Série de Neumann

Soit $u \in \mathbb{A}$ tel que $\|u\| < 1$. Alors

1. La série $\sum_{n \geq 0} u^n$ est absolument convergente.
2. $1_{\mathbb{A}} - u$ est inversible dans $\mathbb{A}$ et on a $(1_{\mathbb{A}} - u)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$.
3. $\|(1_{\mathbb{A}} - u)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|u\|}$.

Preuve:

1. On a $\forall n \in \mathbb{N}, \|u^n\| \leq \|u\|^n$ et $\sum_{n \geq 0} \|u\|^n$ converge car $\|u\| < 1$ donc $\sum_{n \geq 0} u^n$ converge absolument. La finitude de la dimension assure la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} u^n$.
2. Par la condition nécessaire et télescopage, on a

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u^n \right) (1_{\mathbb{A}} - u) = (1_{\mathbb{A}} - u) \sum_{n=0}^{+\infty} u^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (u^n - u^{n+1}) = 1_{\mathbb{A}} - \lim_{n \rightarrow +\infty} u^n = 1_{\mathbb{A}},$$

donc $1_{\mathbb{A}} - u$ est inversible et on a $(1_{\mathbb{A}} - u)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$.

3. Par inégalité triangulaire

$$\|(1_{\mathbb{A}} - u)^{-1}\| = \left\| \sum_{n=0}^{+\infty} u^n \right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|u^n\| = \frac{1}{1 - \|u\|}$$

Remarque :

On déduit que le groupe $\mathcal{U}(\mathbb{A})$ des inversibles de $\mathbb{A}$ contient la boule ouverte de centre 1 et de rayon 1.

Application 1: Localisation du spectre d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, $\|\cdot\|$ une norme d'algèbre sur $\mathcal{L}(E)$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ alors $\text{Sp}(u) \subset B_f(O, \|u\|)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On suppose que $\lambda > \|u\|$, alors a $\left\| \frac{1}{\lambda} u \right\| < 1$ donc $\text{id}_E - \frac{1}{\lambda} u$ est inversible. Donc $\lambda \text{id}_E - u$ est inversible. On déduit que $\lambda \notin \text{Sp}(u)$, d'où $\text{Sp}(u) \subset B_f(O, \|u\|)$.

Application 2: Ouverture de $\mathbb{U}(\mathbb{A})$

Le groupe $\mathbb{U}(\mathbb{A})$ des unités de $\mathbb{A}$ est un ouvert de $\mathbb{A}$.

Soit $u \in \mathbb{U}(\mathbb{A})$ et $h \in \mathbb{A}$ tel que $\|h\| < \frac{1}{\|u^{-1}\|}$. On a $\|u^{-1}h\| \leq \|u^{-1}\| \|h\| < 1$ donc $1 - u^{-1}h$ est inversible d'où $u - h = u(1 - u^{-1}h)$ est inversible.

On déduit que $B\left(u, \frac{1}{\|u^{-1}\|}\right) \subset \mathbb{U}(\mathbb{A})$. Donc $\mathbb{U}(\mathbb{A})$ est ouvert.

Application 3: Continuité de l'application inverse

L'application $f : u \mapsto u^{-1}$ est continue sur $\mathbb{U}(\mathbb{A})$.

Preuve:

Soit $u \in \mathbb{U}(\mathbb{A})$ et $\alpha \in \left]0, \frac{1}{\|u^{-1}\|}\right]$, alors $B(u, \alpha) \subset \mathbb{U}(\mathbb{A})$.

Soit $h \in \mathbb{A}$ tel que $\|h\| < \alpha$ donc $u - h \in B(u, \alpha)$, d'où $u - h$ est alors inversible.

On a :

$$f(u - h) - f(u) = (u - h)^{-1} - u^{-1} = (u - h)^{-1}(u - (h - h))u^{-1} = (u - h)^{-1}hu^{-1}$$

Donc

$$\|f(u - h) - f(u)\| \leq \|(u - h)^{-1}\| \|h\| \|u^{-1}\| \leq \|(1 - u^{-1}h)^{-1}\| \|u^{-1}\| \|h\| \|u^{-1}\| \leq \|(1 - u^{-1}h)^{-1}\| \|h\| \|u^{-1}\|^2$$

On a :

$$\|u^{-1}h\| \leq \|u^{-1}\| \|h\| \leq \|u^{-1}\| \alpha < 1$$

donc

$$\|(1 - u^{-1}h)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|u^{-1}h\|} \leq \frac{\|u^{-1}\|}{1 - \|u^{-1}\| \|h\|} \leq \frac{\|u^{-1}\|}{1 - \alpha \|u^{-1}\|}$$

Donc $\|f(u - h) - f(u)\| \leq \frac{\|u^{-1}\|^2}{1 - \alpha \|u^{-1}\|} \|h\|$. L'application f est alors continue en u , d'où sur $\mathbb{U}(\mathbb{A})$.

III.2 L'application exponentielle**Propriété 15: Exponentielle d'un élément**

Soit $u \in \mathbb{A}$ alors la série $\sum_{n \geq 0} \frac{u^n}{n!}$ converge.

L'application sur $\mathbb{A}$ définie par $u \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}$ s'appelle la fonction exponentielle sur $\mathbb{A}$ et on la note $\exp$.

Preuve:

On a $\forall n \in \mathbb{N}, \|u^n\| \leq \|u\|^n$ et la série à termes positifs $\sum_{n \geq 0} \frac{\|u\|^n}{n!}$ converge, donc $\sum_{n \geq 0} \frac{u^n}{n!}$ converge absolument. Puisque $\mathbb{A}$ est de dimension finie, alors la série $\sum_{n \geq 0} \frac{u^n}{n!}$ converge

Propriété 16

Soit $u, v \in \mathbb{A}$. Alors

1. $\exp(0_{\mathbb{A}}) = 1_{\mathbb{A}}$
2. Si v inversible alors $\exp(vuv^{-1}) = v \exp(u) v^{-1}$.
3. Si $uv = vu$, alors

$$\exp(u + v) = \exp(u) \exp(v) = \exp(v) \exp(u)$$

4. $\exp(u)$ est inversible et a pour inverse $\exp(-u)$

5. Pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $(\exp(u))^m = \exp(mu)$

Preuve:

1. $\exp(0_A) = 1_A$

2. On part de la relation $\forall k \in \mathbb{N}$, $(vuv^{-1})^k = vu^k v^{-1}$, donc pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^n \frac{(vuv^{-1})^k}{k!} = v \left(\sum_{k=0}^n \frac{u^k}{k!} \right) v^{-1}$$

Par continuité de $a \mapsto vav^{-1}$ et la caractérisation séquentielle de la continuité, on tire

$$\exp(vuv^{-1}) = v \exp(u) v^{-1}$$

3. Posons $U_n = \sum_{k=0}^n \frac{u^k}{k!}$, $V_n = \sum_{k=0}^n \frac{v^k}{k!}$, $W_n = \sum_{k=0}^n w_k$ où $w_k = \sum_{p+q=k} \frac{u^p v^q}{p!q!} = \frac{(u+v)^k}{k!}$. Notons aussi $\tilde{U}_n = \sum_{k=0}^n \frac{\|u\|^k}{k!}$, $\tilde{V}_n = \sum_{k=0}^n \frac{\|v\|^k}{k!}$, $\tilde{W}_n = \sum_{k=0}^n \tilde{w}_k$ où $\tilde{w}_k = \sum_{p+q=k} \frac{\|u\|^p \|v\|^q}{p!q!} = \frac{(\|u\| + \|v\|)^k}{k!}$, enfin $\square_n = \llbracket 0, n \rrbracket^2$ et $\triangle_n = \{(p, q) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2, p+q \leq n\}$. On a

$$\|U_n V_n - W_n\| = \left\| \sum_{(p,q) \in \square_n \setminus \triangle_n} \frac{u^p v^q}{p!q!} \right\| \leq \sum_{(p,q) \in \square_n \setminus \triangle_n} \frac{\|u\|^p \|v\|^q}{p!q!} = \tilde{U}_n \tilde{V}_n - \tilde{W}_n$$

Comme $\|u\|$, $\|v\|$ et $\|u\| + \|v\|$ sont des réels, on déduit des propriétés de l'exponentielle réelle, que $\tilde{U}_n \tilde{V}_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{\|u\|} e^{\|v\|}$ et $\tilde{W}_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{\|u\| + \|v\|}$. Donc $\tilde{U}_n \tilde{V}_n - \tilde{W}_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Il s'ensuit que $U_n V_n - W_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par encadrement. Comme les suites $(U_n)_{n \geq 0}$, $(V_n)_{n \geq 0}$ et $(W_n)_{n \geq 0}$ convergent respectivement vers $\exp(u)$, $\exp(v)$ et $\exp(u+v)$ et comme l'application $(u, v) \mapsto uv$ est bilinéaire continue, alors $\exp(u+v) = \exp(u)\exp(v)$

4. On prend $v = -u$

5. Par récurrence sur $m \in \mathbb{N}$, puis pour $m \in \mathbb{Z}^-$ on utilise $\exp(-u) = \exp(u)^{-1}$

Méthode: Méthode de calcul de l'exponentielle d'une matrice

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$:

- Si $A = \mathbf{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est diagonale alors

$$\exp(A) = \mathbf{diag}(e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_n})$$

- Si A est diagonalisable, il existe deux matrices $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $D = \mathbf{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ telles que $A = PDP^{-1}$. Donc :

$$\exp(A) = P \mathbf{diag}(e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_n}) P^{-1}$$

- Si A est nilpotente, alors $\exp(A) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{A^k}{k!}$
- Si A est trigonalisable, il existe un unique couple de matrices $(D, N) \in M_n(\mathbb{K})^2$ tel que :

$$\begin{cases} \bullet D \text{ est diagonalisable} \\ \bullet N \text{ est nilpotente} \\ \bullet DN = ND \text{ et } A = D + N \end{cases}$$

Alors

$$\exp(A) = \exp(D)\exp(N) = \exp(D) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{N^k}{k!}$$

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Calculons $\exp(A)$.

On a $A^2 = 0$, donc A est nilpotente, donc $\exp(A) = I_2 + A$

Exemple: Calcul par le polynôme minimal

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $\pi_A = (X-1)(X-2)$. Calculer $\exp(A)$

Soit $p \in \mathbb{N}$, il existe $a_p, b_p \in \mathbb{K}$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que

$$X^p = Q \cdot \pi_A + a_p X + b_p$$

On évalue en 1 et en 2, on obtient $\begin{cases} a_p + b_p = 1 \\ 2a_p + b_p = 2^p \end{cases}$, soit $a_p = 2^p - 1$ et $b_p = 2 - 2^p$. Donc si on évalue en A , alors $X^p = (2^p - 1)A + (2 - 2^p)I_n$, puis

$$\exp(A) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{A^p}{p!} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^p - 1}{p!} A + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2 - 2^p}{p!} I_n = (e^2 - e)A + (2e - e^2)I_n$$