

CONVERGENCE ET CONVERGENCE ABSOLUE

$(E, \| \cdot \|)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé de dim finie et $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série de E

Définition

On dit que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge ssi (S_n) la suite des sommes partielles converge dans E . la limite de (S_n) est appelée somme de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$, notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Une série est dite divergente si elle n'est pas convergente

Propriété: Série télescopique

La série télescopique $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge ssi la suite (u_n) est convergente.

Propriété: Condition nécessaire

Si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, alors la suite (u_n) tend vers 0

Propriété: Série géométrique

Soit $q \in \mathbb{C}$. Alors $\sum_{n \geq 0} q^n$ converge ssi $|q| < 1$. Au quel cas $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

Propriété: Reste d'une série convergente

Le reste d'ordre n d'une série convergente $\sum_{n \geq 0} u_n$ est défini par $R_n := \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$, et on a: $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{k=0}^n u_k + R_n$ et $R_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Propriété: Séries numériques coordonnées

Soit $\beta = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $u_n = \sum_{i=1}^p u_{n,i} e_i$ le terme général de la série $\sum u_n$. Alors: $\sum u_n$ converge $\iff \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, la série $\sum u_{n,i}$ converge
En cas de convergence: $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{i=1}^p \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,i} \right) e_i$

Propriété: Critère spécial des séries alternées

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série réelle alternée telle que $(|u_n|)$ décroît et est de limite nulle. Alors: $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge et $\text{sgn}(R_n) = \text{sgn}(u_{n+1})$ et $|R_n| \leq |u_{n+1}|$.

Définition: Convergence absolue

On dit que $\sum u_n$ converge absolument si la série $\sum \|u_n\|$ est convergente.

Propriété: Convergence absolue $\Rightarrow$ convergence

Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge absolument, alors la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente.

SÉRIES À TERMES POSITIFS

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs.

Propriété: Critère de majoration

$\sum_{n \geq 0} v_n$ converge $\iff$ la suite (S_n) est majorée où $S_n = \sum_{k=0}^n v_k$.
En cas de convergence $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sup_n S_n$

Propriété: Principes de comparaison

- Si $u_n = o(v_n)$ ou $u_n = O(v_n)$ alors
 - $\sum v_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge.
 - $\sum u_n$ diverge $\Rightarrow \sum v_n$ diverge.
- Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature

Propriété: Séries de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si, et seulement, si $\alpha > 1$

Propriété: Règle de Riemann

- Si $\exists \alpha > 1$ tel que $u_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ ou $u_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, alors $\sum u_n$ converge
- S'il existe $\alpha \leq 1$ tel que $\frac{1}{n^\alpha} = O(u_n)$ ou $\frac{1}{n^\alpha} = o(u_n)$, alors $\sum u_n$ diverge
- S'il existe $\lambda > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que: $u_n \sim \frac{\lambda}{n^\alpha}$. Alors $\sum u_n$ CV ssi $\alpha > 1$

Propriété: Critère de d'Alembert

Si $(u_n)_{n \geq 0}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang et $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R}^+$

- Si $0 \leq \ell < 1$, alors $\sum u_n$ converge
- Si $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ diverge
- Si $\ell = 1$ on ne peut pas conclure.

Propriété: Comparaison série-intégrale

Soit $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction décroissante continue sur $\mathbb{R}^+$. Alors

- La série de terme général $u_n = \int_{n-1}^n f(t) dt - f(n)$ converge.
- L'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ et la série $\sum f(n)$ sont de même nature.

- En cas de CV: $\forall n \in \mathbb{N}, \int_{n+1}^{+\infty} f(t) dt \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leq \int_n^{+\infty} f(t) dt$
- En cas de DIV: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=0}^n f(k) \leq f(0) + \int_0^n f(t) dt$

SOMMATION DES RELATIONS DE COMPARAISON

Soit $\sum v_n$ une série à termes positifs et $\sum u_n$ une série numérique.

Théorème

- On suppose que $\sum v_n$ est **convergente**

- Si $u_n = o(v_n)$, alors $\sum_{n \geq 1} u_n$ est AC et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$
- Si $u_n = O(v_n)$, alors $\sum_{n \geq 1} u_n$ est AC et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = O\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$
- Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum_{n \geq 1} u_n$ est AC et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$

- On suppose que $\sum v_n$ est **divergente**

- Si $u_n = o(v_n)$, alors $\sum_{k=0}^n u_k = o\left(\sum_{k=0}^n v_k\right)$
- Si $u_n = O(v_n)$, alors $\sum_{k=0}^n u_k = O\left(\sum_{k=0}^n v_k\right)$
- Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum_{n \geq 1} u_n$ est DIV et $\sum_{k=0}^n u_k \sim \sum_{k=0}^n v_k$

SÉRIE DE NEUMANN ET SÉRIE EXPONENTIELLE

Soit $\mathbb{A}$ une $\mathbb{K}$ -algèbre normée unitaire de dimension finie.

Propriété: Série de Neumann

Soit $u \in \mathbb{A}$ tel que $\|u\| < 1$

- La série $\sum_{n \geq 0} u^n$ est absolument convergente.
- $1_{\mathbb{A}} - u$ est inversible dans $\mathbb{A}$ et $(1_{\mathbb{A}} - u)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$.
- $\|(1_{\mathbb{A}} - u)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|u\|}$.

Propriété: L'application exponentielle

Soit $u \in \mathbb{A}$, alors la série $\sum_{n \geq 0} \frac{u^n}{n!}$ est absolument convergente.

$\exp: u \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}$ s'appelle la fonction exponentielle sur $\mathbb{A}$.

Propriété

Soit $u, v \in \mathbb{A}$ tels que $u \times v = v \times u$, alors $\exp(u + v) = \exp(u) \times \exp(v)$

CONTACT INFORMATION

Web: www.elamdaoui.com

Email: elamdaoui@gmail.com

Phone: 06 62 30 38 81